



BLAISE PASCAL  
PT 2023-2024

TD 9 – Mécanique des fluides

# Statique des fluides

- Difficulté d'analyse et compréhension, initiative requise ;
- Difficulté technique et calculatoire ;
- Exercice important.



Flasher ce code pour accéder au corrigé

| Ceinture |                  | Proposition de parcours d'entraînement                   |
|----------|------------------|--|
|          | Ceinture blanche | Questions de cours + exercices 1 à 3, 6 et 11            |
|          | Ceinture jaune   | Questions de cours + exercices 1 à 6, 10 et 11           |
|          | Ceinture rouge   | Questions de cours (★) + exercices 1, 2, 4 à 7, 10 et 11 |
|          | Ceinture noire   | Questions de cours (★) + exercices 1, 2, 4 à 9, 11 et 12 |

## Questions et applications de cours

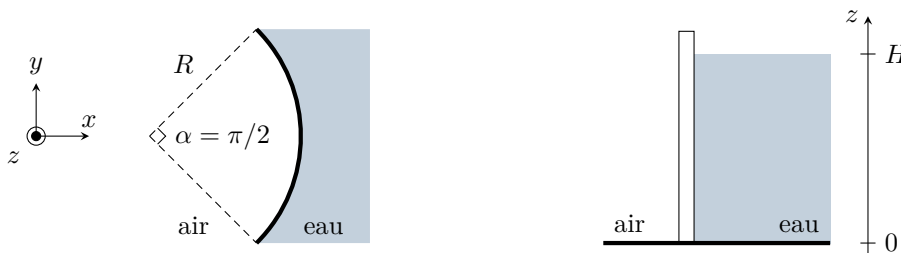
Seuls les étudiants du groupe PT\* seront interrogés en colle sur les questions marquées d'une étoile, car elles sont plus techniques et/ou moins essentielles ... mais tous les étudiants sont bien sûr invités à les travailler !

**9.1** - Établir la relation de la statique des fluides dans le seul champ de pesanteur, en admettant que le champ de pression ne dépend que de la coordonnée verticale  $z$ .

**9.2** - En partant de la relation de la statique des fluides, exprimer le champ de pression dans le modèle de l'atmosphère isotherme.

**9.3** - On considère le barrage voûte schématisé ci-dessous, cylindrique de rayon  $R$ , d'angle d'ouverture  $\alpha = \pi/2$ , et rempli d'eau jusqu'à une hauteur  $H$ . Déterminer sans calcul (mais en justifiant!) la direction et le sens de la résultante des forces de pression exercées par l'eau sur le barrage, puis la calculer.

Donnée : champ de pression dans l'eau :  $P(z) = P_0 + \rho_0 g(H - z)$ .



## Analyse de corrigés

### Exercice 1 : Champ de pression dans l'atmosphère



- ▷ Relation de la statique des fluides dans un gaz ;
- ▷ Intégration par séparation de variables.

Des mesures météorologiques dans l'atmosphère permettent de montrer que la température y évolue de manière affine par morceaux. Ces variations étant très stables et reproductibles, elles ont été compilées dans un modèle appelé « International Standard Atmosphere » qui sert de base aux météorologues. L'origine se trouvant à la surface de la Terre, ce modèle prend comme références

$$T(z=0) = T_0 = 15^\circ\text{C} \quad \text{et} \quad P(z=0) = P_0 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

et donne la valeur du gradient thermique à toute altitude. On s'intéresse ici aux 11 premiers kilomètres de l'atmosphère (troposphère), où

$$\frac{dT}{dz} = -k = -6,5 \text{ K} \cdot \text{km}^{-1}.$$

- 1 - Déterminer la température en fonction de l'altitude dans la troposphère.
- 2 - En déduire l'équation différentielle vérifiée par la pression atmosphérique  $P(z)$ .
- 3 - Résoudre cette équation différentielle.

**Correction** — 1 - La dérivée étant constante, on a, par séparation des variables,

$$\int_{T_0}^{T(z)} dT = -k \int_0^z dz \quad \text{soit} \quad \boxed{T(z) = T_0 - kz.}$$

2 - D'après la relation de la statique des fluides,

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g = -\frac{MP(z)}{RT(z)} g.$$

**Question d'analyse 1** - Justifier la présence du signe  $-$ .

**Question d'analyse 2** - Retrouver l'expression de  $\rho$ .

Cette équation différentielle se résout par séparation de variables,

$$\int_{P_0}^{P(z)} dP = -\frac{Mg}{R} \int_0^z \frac{dz}{T_0 - kz} = +\frac{Mg}{Rk} \int_0^z \frac{-k dz}{T_0 - kz}$$

**Question d'analyse 3** - Pourquoi n'est-il pas possible de procéder comme pour l'atmosphère isotherme, c'est-à-dire d'écrire l'équation sous forme canonique et d'identifier une longueur caractéristique  $\delta = RT/Mg$  ?

**Question d'analyse 4** - Expliquer l'intérêt de la réécriture de l'intégrale sur  $z$ .

On en déduit

$$\begin{aligned} \ln \frac{P(z)}{P_0} &= \frac{Mg}{Rk} \ln \frac{T_0 - kz}{T_0} \\ \frac{P(z)}{P_0} &= \left( \frac{T_0 - kz}{T_0} \right)^{Mg/Rk} \\ \boxed{P(z)} &= P_0 \left( 1 - \frac{kz}{T_0} \right)^{Mg/Rk} \end{aligned}$$

**Question d'analyse 5** - Expliquer la présence du  $T_0$  au dénominateur dans le logarithme de la première ligne.

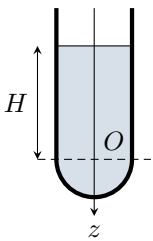
**Question d'analyse 6** - Expliquer que  $Mg/Rk$  se retrouve en exposant.

**Exercice 2 : Force de pression sur un tube à essais**

oral banque PT | 💡 2 | ✂️ 2 | Ⓜ️



- ▷ Relation de l'hydrostatique ;
- ▷ Résultante des forces de pression.



On considère un tube à essais rempli d'un liquide incompressible de masse volumique  $\rho$ . On raisonne sur un axe vertical  $z$  descendant dont l'origine se trouve comme indiqué sur le schéma ci-contre.

- 1 - Calculer la pression  $P(z)$ .
- 2 - Justifier que la résultante des forces pressantes sur la partie cylindrique du tube est nulle.
- 3 - Déterminer la direction de la résultante des forces de pression subies par la portion hémisphérique du tube.
- 4 - Faire le calcul. Commenter.

Données :

$$\int \cos \theta \sin \theta \, d\theta = -\frac{\cos(2\theta)}{4} + \text{cte} \quad \text{et} \quad \int \cos^2 \theta \sin \theta \, d\theta = -\frac{\cos^3 \theta}{3} + \text{cte}$$

**Correction** — 1 - D'après la relation de la statique des fluides,

$$\frac{dP}{dz} = +\rho g \quad \text{d'où} \quad \int_{P_0}^{P(z)} dP = \rho g \int_{-H}^z dz \quad \text{soit} \quad \boxed{P(z) = P_0 + \rho g(z + H)}.$$

**Question d'analyse 1** - Justifier le signe dans la relation de la statique des fluides et les bornes d'intégration.

2 - Pour chaque surface élémentaire de cette portion cylindrique du tube, la force de pression élémentaire est portée par le vecteur  $\vec{e}_r$ . Ainsi, les forces en deux points symétriques sont de sens opposés. Comme ces deux points sont à la même altitude, alors la pression  $y$  est la même, donc ces forces sont également de même norme. Elles se compensent donc.

**Question d'analyse 2** - Retranscrire le raisonnement ci-dessus sur deux schémas du tube : l'un en vue de dessus, l'autre en vue de face, sur lequel vous ferez apparaître les surfaces élémentaires et les forces de pression associées.

3 - Tout plan contenant l'axe  $(Oz)$  est un plan de symétrie du système, donc la résultante des forces pressantes est incluse dans l'intersection de ces plans, c'est-à-dire selon l'axe  $(Oz)$ . On en déduit

$$\vec{F}_P = F_{P,z} \vec{e}_z.$$

**Question d'analyse 3** - Retrouver le résultat précédent en raisonnant de manière explicite sur les deux plans  $(O, x, z)$  et  $(O, y, z)$  et pour une écriture générale de la résultante sous la forme  $\vec{F}_P = F_{P,x} \vec{e}_x + F_{P,y} \vec{e}_y + F_{P,z} \vec{e}_z$

4 - Raisonnons en coordonnées **sphériques**, ce qui change la définition de l'angle  $\theta$ . La force de pression est en tout point  $M$  encore une fois dirigée par  $\vec{e}_r$  ... mais comme le système de coordonnées n'est plus le même, ce n'est plus le même vecteur.

La surface élémentaire qui subit la force est de normale  $\vec{e}_r$  et de rayon  $r = R$ , d'où on déduit le vecteur surface élémentaire

$$d\vec{S} = R^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \, \vec{e}_r.$$

**Question d'analyse 4** - Justifier l'expression de  $d\vec{S}$ .

Cet élément de surface subit la force pressante exercée par l'eau, de pression  $P(z)$ , et la force pressante exercée par l'air, de pression uniforme  $P_0$  et de sens opposé à la précédente. Ainsi,

$$d\vec{F}_P = P(z) d\vec{S} - P_0 d\vec{S}$$

d'où on déduit

$$\begin{aligned} dF_z &= (P(z) - P_0) R^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \, \vec{e}_r \cdot \vec{e}_z \\ &= \rho g(H + z) R^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \times \cos \theta \\ &= \rho g(H + R \cos \theta) R^2 \sin \theta \cos \theta \, d\theta \, d\varphi \end{aligned}$$

**Question d'analyse 5** - Pourquoi est-il suffisant d'exprimer la seule composante  $dF_z$  ?

**Question d'analyse 6** - Refaire le schéma de définition des coordonnées sphériques, en l'adaptant au sens de l'axe ( $Oz$ ) (cf. fiche outil sur les systèmes de coordonnées si besoin).

**Question d'analyse 7** - À partir de ce schéma, retrouver que  $z = R \cos \theta$  et que  $\vec{e}_r \cdot \vec{e}_z = \cos \theta$ .

On peut alors sommer,

$$\begin{aligned}
 F_z &= \iint dF_z \\
 &= \iint \rho g (H + R \cos \theta) \cos \theta R^2 \sin \theta d\theta d\varphi \\
 &= R^2 \rho g \times \int_0^{\pi/2} (H + R \cos \theta) \cos \theta \sin \theta d\theta \times \int_0^{2\pi} d\varphi \\
 &= 2\pi R^2 \rho g \int_0^{\pi/2} (H + R \cos \theta) \cos \theta \sin \theta d\theta \\
 &= 2\pi R^2 H \rho g \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta + 2\pi R^3 \rho g \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \\
 &= 2\pi R^2 H \rho g \times \left( -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) + 2\pi R^3 \rho g \left( -\frac{0^3}{3} + \frac{1^3}{3} \right) \\
 &= \pi R^2 H \rho g + \frac{2\pi}{3} R^3 \rho g \\
 F_z &= \pi R^2 \rho g \left( H + \frac{2}{3} R \right)
 \end{aligned}$$

ce qui conduit en fin de compte à

$$\vec{F} = \pi R^2 \rho g \left( H + \frac{2}{3} R \right) \vec{e}_z.$$

**Question d'analyse 8** - Justifier toutes les bornes d'intégration.

## Relation de l'hydrostatique

### Exercice 3 : Baromètre de Torricelli



▷ Relation de l'hydrostatique.



Fig. 280. — Baromètre à siphon ordinaire.

Evangelista Torricelli (1608-1647) est connu pour ses nombreux travaux en mécanique des fluides, et en particulier l'invention du premier baromètre. Il s'agit d'un tube en U, dont l'extrémité haute est bouchée et l'extrémité basse ouverte, rempli de mercure. Le point B se trouve à la pression atmosphérique, la pression au dessus du point A est négligeable.

Donnée : masse volumique du mercure  $\mu = 1,36 \cdot 10^4 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

- Déterminer la hauteur de liquide  $h$  entre les points A et B en fonction des grandeurs pertinentes.
- Comment peut-on mesurer concrètement la pression atmosphérique avec cet appareil ? Faire un schéma dans le cas où la pression atmosphérique est faible et un autre dans le cas où elle est élevée.
- Le Torr, nommé en hommage à Torricelli, est une unité de pression historique analogue au millimètre de mercure mmHg. On a la correspondance  $1 \text{ atm} = 760 \text{ Torr}$  : est-ce étonnant ?

**Exercice 4 : Deux liquides dans un tube en U**

💡 2 | ✂ 1



▷ Relation de l'hydrostatique.

Considérons un tube en U de section  $1 \text{ cm}^2$  rempli d'eau jusqu'à  $10 \text{ cm}$  du fond. On ajoute  $3 \text{ mL}$  d'huile d'olive de densité  $0,92$  dans une des branches du tube. Calculer la hauteur à laquelle se trouvent les deux surfaces libres et l'interface entre l'huile d'olive et l'eau.

**Exercice 5 : Ressort et tube en U**

oral banque PT | 💡 2 | ✂ 2



▷ Lien entre mécanique des fluides et des solides ;  
 ▷ Relation de l'hydrostatique ;  
 ▷ Force exercée par un ressort.

On dispose dans un tube en U un bouchon de masse  $m$  et de section  $S$  égale à la section du tube dans lequel il oscille sans frottement. Un ressort de raideur  $k$  est accroché d'une part au bouchon et d'autre part à un point fixe, voir figure 1. Une graduation se trouve à une hauteur  $h$  au dessus de la position initiale du bouchon. On note  $\Delta \ell_0$  son allongement dû à la pesanteur.

On remplit le tube d'un liquide de masse volumique  $\rho$  inconnue jusqu'à la graduation. Le bouchon remonte de  $\Delta z$  par rapport à sa position initiale. On note  $P$  la pression au niveau du point  $M$  et  $P_{\text{atm}}$  la pression atmosphérique.

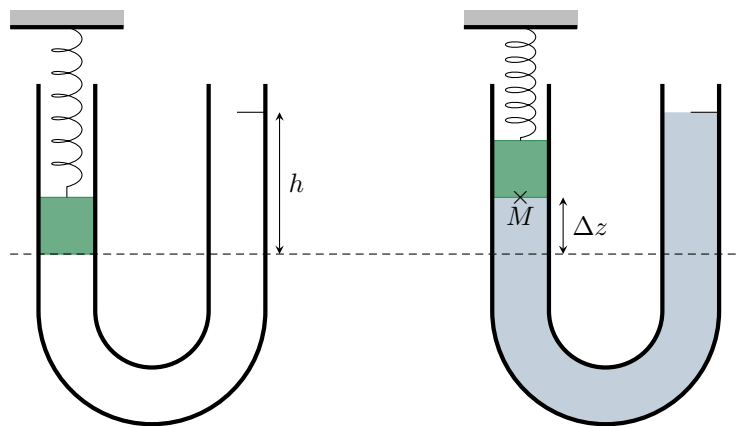


Figure 1 – Ressort dans un tube en U.

- 1 - Déterminer l'expression de  $\Delta \ell_0$  en fonction de  $k$  et  $m$ .
- 2 - Écrire l'équation d'équilibre du bouchon en fonction des pressions et de  $\Delta \ell$ .
- 3 - Déterminer l'expression de  $\rho$  en fonction des données du problème.
- 4 - Calculer  $\rho$  pour un tube de diamètre  $d = 2 \text{ cm}$ , avec  $\Delta z = 1 \text{ cm}$ ,  $h = 10,7 \text{ cm}$ , et  $k = 30 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ .

**Forces pressantes****Exercice 6 : Tunnel de l'aquarium Nausicaa**

💡 2 | ✂ 2 | ©



▷ Résultante des forces de pression ;  
 ▷ Intégration en coordonnées cylindriques.

L'aquarium Nausicaa de Boulogne-sur-Mer est le plus grand d'Europe. Parmi les divers espaces dans lesquels il propose à ses visiteurs d'observer les animaux marins figure un tunnel sous-marin long de  $18 \text{ m}$ . Ce tunnel peut être approximé par un demi-cylindre de rayon  $a = 3 \text{ m}$  et de longueur  $L = 18 \text{ m}$  se trouvant au fond d'un bassin profond de  $H = 8 \text{ m}$ . On cherche à estimer la résultante des forces pressantes subies par les vitres constituant le tunnel.

- 1 - Exprimer le champ de pression  $P(y)$  dans l'eau de l'aquarium.
- 2 - Montrer sans calcul que la résultante des forces pressantes subies par le tunnel est dirigée selon  $-\vec{e}_y$ .

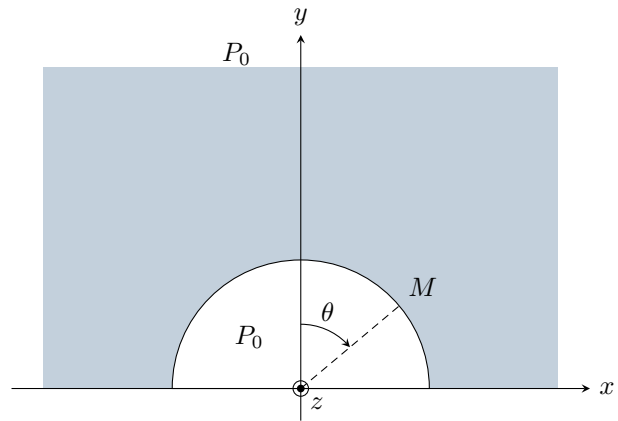


Figure 2 – Tunnel de l'aquarium Nausicaa.

3 - Montrer que la composante  $dF_{p,y}$  de la force pressante subie par l'élément de surface  $dS$  centré sur le point  $M$  s'écrit

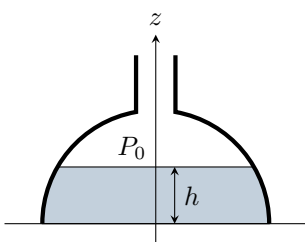
$$dF_{p,y} = \left( \frac{1}{2} \rho g a^2 - \rho g H a \cos \theta + \frac{1}{2} \rho g a^2 \cos(2\theta) \right) d\theta dz .$$

4 - En déduire la résultante des forces pressantes. Calculer sa valeur numérique.

**Exercice 7 : Entonnoir retourné**

💡 2 | ✂ 3

- Résultante des forces de pression.
- Intégration en coordonnées sphériques.



Un entonnoir en forme de demi-sphère de rayon  $R$  est retourné et posé au fond d'un évier, puis progressivement rempli d'eau de masse volumique  $\mu_0$  constante jusqu'à une hauteur  $h$ . L'air environnant est à pression  $P_0$  uniforme. Le but de l'exercice est de montrer que (même en l'absence de fuite!) l'entonnoir se soulève pour une hauteur d'eau critique  $h_c$ .

1 - Quelle est la force responsable du soulèvement ? En déduire qu'il est nécessaire de prendre en compte les variations de pression avec l'altitude dans l'eau, même si elles sont faibles. Exprimer le champ de pression dans l'eau en fonction de  $z$  et  $h$ .

2 - Déterminer sans calcul la direction de la force exercée par l'eau sur l'entonnoir, et montrer qu'elle vaut

$$\vec{F} = \pi \mu_0 g \frac{h^3}{3} \vec{e}_z .$$

3 - Déterminer la hauteur critique  $h_c$ . Pouvez-vous faire l'expérience chez vous ?

**Exercice 8 : Hublot d'aquarium**

💡 3 | ✂ 2

- Relation de l'hydrostatique.
- Résultante des forces de pression.
- Intégration par découpage mésoscopique.

Certains aquariums proposent à leurs visiteurs d'observer les animaux marins au travers de hublots circulaires, voir figure 3. Le but de cet exercice est de calculer la force pressante exercée par l'eau sur le hublot. Le hublot a un rayon  $R = 1$  m et son centre se trouve à une profondeur  $H = 5$  m sous la surface. L'axe  $(Oz)$  est vertical ascendant et son origine est prise au centre du hublot. Les points à la périphérie de l'aquarium sont repérés par l'angle  $\alpha$  défini sur la figure.

1 - Exprimer la pression dans l'eau en fonction de  $z$  et de la pression atmosphérique  $P_0$ .

2 - Exprimer  $z$  en fonction de  $\alpha$ , puis en déduire  $dz$  en fonction de  $d\alpha$ .

3 - Montrer que la bande de hublot comprise entre les ordonnées  $z$  et  $z + dz$  a pour surface  $dS = R^2 \cos^2 \alpha d\alpha$ .

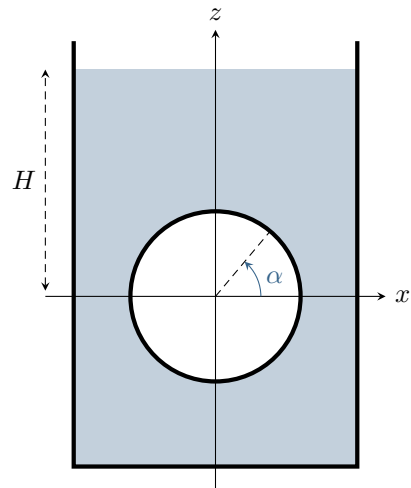


Figure 3 – Hublot d’aquarium.

4 - En déduire la résultante des forces de pression subies par le hublot de l’aquarium. On donne

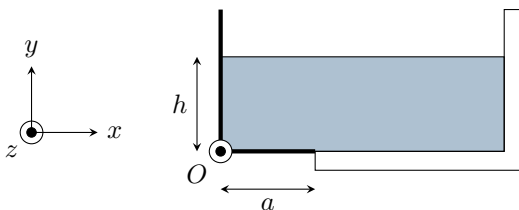
$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 u \, du = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin u \cos^2 u \, du = 0.$$

5 - Comment aurait-on pu anticiper qualitativement ce résultat ?

**Exercice 9 : Plaque pivotante**

oral banque PT | 💡 3 | ✂️ 2

- Lien entre mécanique des fluides et des solides.
- Résultante des forces de pression.
- Moment cinétique.



Les deux parois du récipient ci-contre dessinées en traits épais sont rigidement liées et peuvent pivoter sans frottement autour de l’axe  $(Oz)$ . Le récipient est parallélépipédique et possède une longueur  $b$  dans la direction  $(Oz)$ . On note  $P_0$  la pression dans l’air environnant et  $\vec{g} = -g\vec{e}_y$ .

- 1 - Exprimer la pression dans l’eau.
- 2 - La pression sur la plaque horizontale est-elle uniforme ? Exprimer la résultante des forces de pression sur la plaque horizontale et le moment résultant autour de  $z$ .
- 3 - Mêmes questions pour la plaque verticale.
- 4 - À quelle condition sur la hauteur d’eau y a-t-il basculement ? Déterminer la hauteur  $h_0$  pour laquelle la plaque bascule.

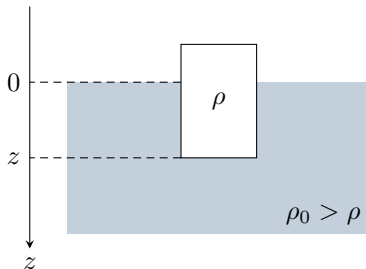
## Poussée d'Archimède

### Exercice 10 : Oscillations d'un flotteur

oral ATS | 💡 1 | ✂️ 2



- ▷ Lien entre mécanique des fluides et des solides.
- ▷ Résultante des forces de pression.
- ▷ Oscillateur harmonique.



On modélise un flotteur (bouchon de pêche, bouée, etc.) par un cylindre de masse volumique  $\rho$  plongeant partiellement dans l'eau de masse volumique  $\rho_0 > \rho$ . On suppose son axe de révolution constamment vertical.

- 1 - Déterminer la hauteur immergée à l'équilibre.
- 2 - Quelle est la force à exercer sur le flotteur pour l'immerger en entier ?
- 3 - À partir de la position d'équilibre déterminée précédemment, on enfonce légèrement le cylindre avant de le relâcher. Montrer que le cylindre effectue des oscillations et déterminer leur période.

## Champ de pression

### Exercice 11 : Ballon sonde

inspiré oral banque PT | 💡 2 | ✂️ 2 | 🌀



- ▷ Relation de la statique des fluides dans un gaz ;
- ▷ Intégration par séparation de variables ;
- ▷ Poussée d'Archimède.



Un ballon sonde est assimilé à une sphère indéformable de rayon  $R_0 = 2$  m remplie d'hélium, ouverte par le bas, ce qui permet à l'hélium de s'échapper au fur et à mesure de l'ascension et au ballon de demeurer en équilibre thermique et mécanique avec l'atmosphère. Le ballon de masse à vide 1 kg est conçu pour emporter des équipements scientifiques. La température de l'atmosphère suit la loi  $T(z) = T_0(1 - \alpha z)$  avec  $\alpha = 2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^{-1}$ .

- 1 - Déterminer la constante  $\beta$  telle que le champ de pression atmosphérique s'écrive

$$P(z) = P_0(1 - \alpha z)^\beta .$$

- 2 - En déduire l'évolution de la masse volumique de l'air avec l'altitude.

- 3 - Déterminer la masse d'hélium restant dans le ballon en fonction de l'altitude.
- 4 - En déduire la masse maximale que peut soulever le ballon à l'altitude  $z$ .
- 5 - Application numérique : calculer cette masse au niveau du sol et à 10 km d'altitude.

Données :

- ▷ masse molaire de l'air  $29,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$  et de l'hélium  $4,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$  ;
- ▷ constante des gaz parfaits  $R = 8,3 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ .

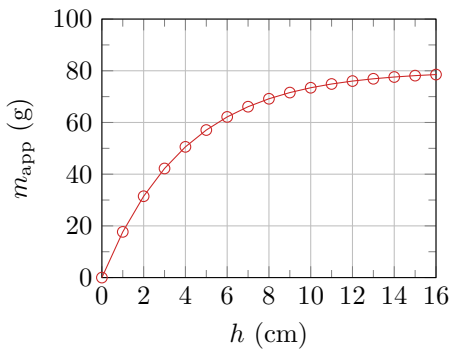


**Exercice 12 : Modèle de Janssen d'un milieu granulaire**

oral Centrale PSI | 💡 3 | ✂️ 2



▷ Obtention d'une équation différentielle par découpage mésoscopique.



Un récipient cylindrique de diamètre  $D = 50$  mm et de hauteur  $H = 80$  cm est partiellement rempli de sable, jusqu'à une hauteur  $h < H$ . On note  $P_{\text{atm}}$  la pression atmosphérique,  $g$  le champ de gravitation terrestre, et  $\mu$  la masse volumique du sable dans le cylindre, c'est-à-dire le rapport entre la masse de sable versée et le volume qu'elle occupe. On introduit un axe  $z$  vertical *descendant* en prenant l'origine  $z = 0$  à la surface du sable. Au fond du cylindre, en  $z = h$ , on place un capteur de pression. On pose

$$m_{\text{app}} = \frac{\pi D^2}{4g} (P(z=h) - P_{\text{atm}}).$$

On trace expérimentalement  $m_{\text{app}}$  en fonction de  $h$ , représenté ci-contre.

1 - Interpréter physiquement l'expression de  $m_{\text{app}}$ .

2 - On envisage dans un premier temps de modéliser le sable par un fluide de masse volumique  $\mu$  en équilibre hydrostatique. Ce modèle est-il valable ?

Le modèle proposé par Janssen en 1895 consiste à ajouter à ce modèle fluide l'effet du frottement (solide) des grains de sable sur la paroi. Une particule mésoscopique de sable en contact sur une surface  $dS$  avec la paroi subit une force

$$\overrightarrow{dF} = -k (P(z) - P_{\text{atm}}) dS \vec{e}_z.$$

3 - Montrer que ce modèle est conforme à l'expérience et déterminer la valeur de  $k$ .

4 - Pourquoi est-il préférable d'utiliser un sablier plutôt qu'une clepsydre (analogue d'un sablier mais avec de l'eau) ?