

Énergétique des écoulements

Théorème de Bernoulli

Plan du cours

I	Bilan d'énergie mécanique pour un système ouvert	2
I.A	Du système ouvert à un système fermé	2
I.B	Variation d'énergie du système fermé	4
I.C	Conclusion : bilan d'énergie mécanique	6
I.D	Généralisation aux systèmes à plusieurs entrées et plusieurs sorties	7
II	Théorème de Bernoulli : conservation de l'énergie mécanique dans un écoulement parfait	8
II.A	Énoncé	8
II.B	Conséquences pour les écoulements à l'air libre	9
II.C	Pression et vitesse dans un écoulement parfait en conduite.	11
III	Pertes de charge	13
III.A	Définition	13
III.B	Pertes de charge régulières	15
III.C	Pertes de charge singulières.	17
III.D	Effets des pertes de charge sur l'écoulement ... ou pourquoi il faut se méfier de son intuition	17
IV	Élément actif	18

Au programme

Extrait du programme officiel : partie 1 « Thermodynamique et mécanique des fluides », bloc 5 « Énergétique des fluides en écoulement dans une conduite ».

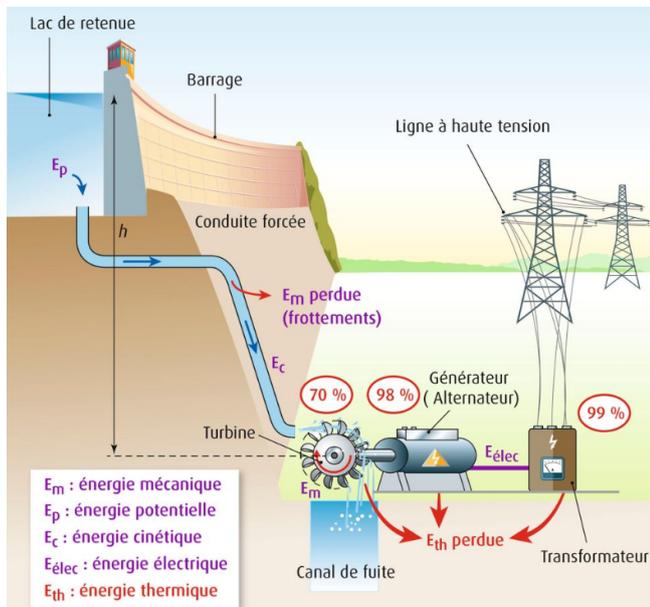
Dans cette partie, on effectue des bilans énergétiques dans une conduite. On se place dans un premier temps dans le cadre de la dynamique des fluides parfaits. Toute utilisation de l'équation d'Euler ou de Navier-Stokes est exclue. La relation de Bernoulli est établie. Les pertes de charge dans les conduites sont ensuite prises en compte et, dans ce cadre, les étudiants sont initiés à la lecture d'abaques.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Relation de Bernoulli.	Définir un volume et une surface de contrôle stationnaire. Établir et exploiter la relation de Bernoulli pour un écoulement parfait, incompressible et stationnaire.
Pertes de charge singulière et régulière. Bilan d'énergie.	Modifier la relation de Bernoulli afin de tenir compte de la dissipation d'énergie. Établir un bilan de puissance pour un circuit hydraulique ou pneumatique avec ou sans pompe. Mettre en évidence une perte de charge.
Travail indiqué massique d'une machine.	Relier la notion de travail indiqué massique à la présence de parties mobiles.

En **gras**, les points devant faire l'objet d'une approche expérimentale.

Au concours

- ▷ Écrit : épreuve A 2019 et 2021, épreuve B 2023.
- ▷ Oral : souvent.



Dans une centrale hydroélectrique, l'écoulement de l'eau depuis un réservoir en altitude met en rotation la turbine d'un alternateur, qui génère un courant électrique. Il y a donc conversion d'énergie potentielle de pesanteur en énergie électrique.

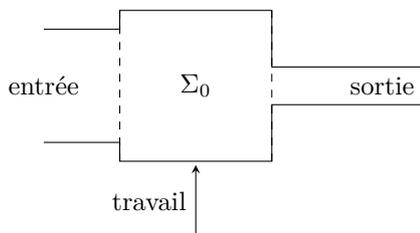
↪ objectif du chapitre : apprendre à faire des bilans d'énergie pour un fluide en écoulement dans une conduite.

On se restreint dans ce chapitre au cas d'un **circuit hydraulique** ou **pneumatique**, dans lequel les effets thermiques sont négligeables : on ne considère que les variations d'énergie mécanique du fluide.

Hypothèses générales :

- ▷ écoulement stationnaire : grandeurs eulériennes indépendantes du temps ;
- ▷ écoulement incompressible : masse volumique constante.

I - Bilan d'énergie mécanique pour un système ouvert



On considère un fluide en écoulement stationnaire et incompressible dans une conduite. L'énergie mécanique de ce fluide peut varier :

- ▷ ou bien parce qu'il échange de l'énergie sous forme de travail avec des pièces en mouvement ;
- ▷ ou bien parce que de l'énergie mécanique est dissipée (= convertie sous forme thermique) par viscosité.

I.A - Du système ouvert à un système fermé

La partie étudiée est délimitée par une **surface de contrôle**, c'est-à-dire une surface fictive qui sert à délimiter par la pensée le système étudié, que l'on note Σ_0 .

↪ difficulté : Σ_0 est un système ouvert, son énergie peut donc varier non seulement sous l'effet du travail échangé, mais aussi parce qu'il échange de la matière.



Les théorèmes énergétiques sous leur forme « usuelle » rencontrée jusqu'à présent ne s'appliquent qu'à des systèmes fermés.

↪ besoin de les reformuler pour notre système ouvert, et pour y arriver il est nécessaire de se ramener à un système fermé.

• Définition du système fermé

Raisonnons entre deux instants proches t et $t + dt$, voir figure 1. On note $\delta\Sigma_e$ la portion de fluide qui rentre dans Σ_0 entre t et $t + dt$; et $\delta\Sigma_s$ la portion de fluide qui sort de Σ_0 entre t et $t + dt$.

Objectif : construire un système fermé Σ_f tel que la totalité des particules fluides passant par Σ_0 entre ces deux instants soient incluses dans Σ_f .

Constitution du système fermé : le délimiter sur les figures

▷ à l'instant t :

$$\Sigma_f = \delta\Sigma_e + \Sigma_0$$

▷ à l'instant $t + dt$:

$$\Sigma_f = \Sigma_0 + \delta\Sigma_s.$$

Espace 1

Espace 2

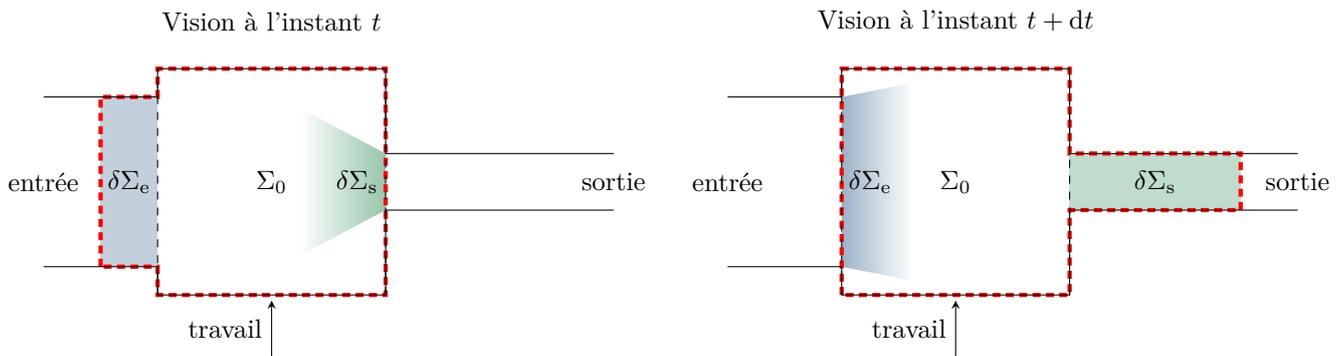


Figure 1 – Du système ouvert à un système fermé.

Remarques importantes :

- ▷ Contrairement à ce que laisse penser la figure, Σ_0 est un système macroscopique, mais $\delta\Sigma_e$ et $\delta\Sigma_s$ sont des systèmes infinitésimaux, mésoscopiques, d'où la notation en δ .
- ▷ Attention à ne pas confondre, $\delta\Sigma_e$ et $\delta\Sigma_s$ ne contiennent pas les mêmes particules fluides qui sauteraient en un temps infiniment court au travers de Σ_0 .
- ▷ À l'instant t , $\delta\Sigma_s$ est inclus dans Σ_0 et n'est pas encore défini en tant que tel. De même, à l'instant $t + dt$, $\delta\Sigma_e$ est inclus dans Σ_0 et n'est plus défini.
- ▷ Il est d'usage de représenter la situation sur un unique schéma, représenté figure 2.

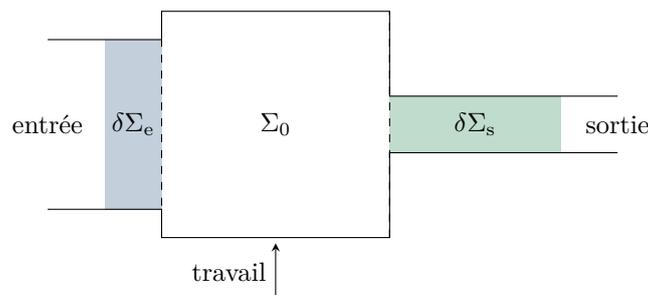


Figure 2 – Schéma récapitulatif.

• Notion de masse traversant

Bilan de masse :

$$\text{masse de } \Sigma_0 \text{ à l'instant } t + dt = \text{masse de } \Sigma_0 \text{ à l'instant } t + \text{masse entrée entre } t \text{ et } t + dt - \text{masse sortie entre } t \text{ et } t + dt$$

Traduction en équation :

$$m_0(t + dt) = m_0(t) + \delta m_e - \delta m_s$$

D

Espace 3

Cas particulier du régime stationnaire : par stationnarité la masse m_0 est indpt de temps, d'où on déduit

$$\delta m_e = \delta m_s \equiv \delta m$$

↪ les systèmes $\delta\Sigma_e$ et $\delta\Sigma_s$ ont la même masse δm , appelée **masse traversant**.

Physiquement, la masse δm est reliée au débit massique : c'est la masse qui traverse la section d'entrée et/ou de sortie pendant dt , donc par définition

$$\delta m = D_m dt.$$

On vient ni plus ni moins de retrouver la conservation du débit massique pour un écoulement stationnaire.

Rappel : Notation d ou δ ? Ces deux notations sont attachées à des grandeurs infinitésimales mais, lorsqu'on écrit un bilan (de masse, d'énergie, d'entropie, etc.) elles ont des significations très différentes.

- ▷ la notation d est associée à une variation : différence entre deux valeurs initiale et finale, on peut la calculer par une soustraction, p.ex. dt est la différence entre deux instants infiniment proches.
- ▷ la notation δ est associée à un échange : ce n'est pas du tout une variation, mais on peut « compter » la quantité échangée en regardant ce qui traverse la surface de contrôle.

De toute façon, δm ne peut pas correspondre à une variation car les deux masses m_f et m_0 sont constantes.

I.B - Variation d'énergie du système fermé

• Idée

Notons $E_{m,f} = E_{c,f} + E_{pp,f}$ l'énergie mécanique totale du système fermé Σ_f . L'objectif est d'exprimer sa variation $dE_{m,f}$ entre t et $t + dt$ de deux façons différentes :

- ▷ d'une part à l'aide de la constitution du système : l'énergie mécanique est une grandeur additive, mais $\delta\Sigma_e$ et $\delta\Sigma_s$ n'ont a priori pas la même énergie mécanique ;
- ▷ d'autre part à l'aide des énergies échangées avec l'extérieur dans l'organe étudié, c'est-à-dire par application du théorème de l'énergie mécanique.

• À partir de la constitution du système

Additivité de l'énergie mécanique. Entre t et $t + dt$, elle varie de

$$dE_{m,f} = E_{m,f}(t + dt) - E_{m,f}(t) = \left[E_{m,0}(t + dt) + \frac{1}{2}\delta m v_s^2 + \delta m g z_s \right] - \left[E_{m,0}(t) + \frac{1}{2}\delta m v_e^2 + \delta m g z_e \right]$$

(hypothèse d'un axe z orienté vers le haut). Or par stationnarité $E_{m,0}(t) = E_{m,0}(t + dt)$, donc

$$dE_{m,f} = \delta m \left[\left(\frac{1}{2}v_s^2 + g z_s \right) - \left(\frac{1}{2}v_e^2 + g z_e \right) \right].$$

Espace 4

Remarque : La définition exacte des vitesses et des altitudes en entrée/sortie peut poser question : faut-il considérer le centre de la conduite ? les extrémités ? une moyenne ? Bien que pertinentes pour la rigueur de la démonstration, ces questions sont en réalité sans grande importance.

En effet, on fait très souvent l'hypothèse que le profil de vitesse est uniforme sur les sections d'entrée et de sortie (= écoulement parfait), et il n'y a donc aucune ambiguïté sur les définitions de v_s et v_e . On admet que même si ce n'est pas le cas le raisonnement est valable à condition de considérer les vitesses débitantes $v = D_V/S$.

De même, la définition exacte de z_s et z_e peut poser question : on admet que dans tous les cas usuels le raisonnement est valable en considérant l'altitude du centre du tuyau, de petit diamètre par rapport aux variations d'altitude lorsque celles-ci sont pertinentes.

- **À partir des échanges énergétiques et du théorème de l'énergie mécanique**

▷ **Échanges de travail avec les pièces mobiles** : Si l'organe étudié contient des parties mobiles (hélice, etc.), alors le fluide peut les mettre en mouvement ou réciproquement : cela se fait par échange de travail.



On appelle **travail indiqué** le travail échangé entre le fluide et les pièces mobiles d'une machine. Il peut être positif ou négatif.

Exemple :

$\delta W_i > 0$ pour une pompe mais < 0 pour une turbine.

Espace 5

▷ **Pertes par viscosité** : Les forces de viscosité sont dissipatives : leur travail δW_{visc} est donc toujours négatif. En pratique, on utilise une description effective par les pertes de charge, qui seront étudiées au paragraphe III.

▷ **Travail de transvasement** : Si le fluide avance ... c'est qu'il est poussé par des forces, qui ne peuvent être que des forces de pression. On distingue les forces de **pression d'admission**, côté entrée et qui sont dans le sens de l'écoulement, des forces de **pression de refoulement**, côté sortie et qui s'opposent à l'écoulement. Comme la pression est a priori différente sur les sections d'entrée et de sortie, il faut décomposer.

Face d'entrée :



la pression d'admission est motrice et son travail est positif :

$$\delta W_{p,e} = \mathcal{P}_{p,e} dt = +P_e S_e v_e dt = +P_e D_V dt = +P_e \frac{D_m}{\rho} dt$$

Espace 6

Face de sortie : la pression de refoulement est résistante, donc son travail est négatif, et on a

$$\delta W_{p,s} = -P_s S_s v_s dt = -P_s \frac{D_m}{\rho} dt.$$

Espace 7

La somme $\delta W_{\text{trans}} = \delta W_{p,e} + \delta W_{p,s}$ est appelé **travail de transvasement**, c'est ce travail qui garantit l'écoulement du fluide au travers de la machine.

▷ **Conclusion : application du théorème de l'énergie mécanique**

Toutes les forces discutées ci-dessus sont non-conservatives, donc le théorème de l'énergie mécanique appliqué au système fermé sous forme infinitésimale donne

$$dE_{m,f} = \delta W_i + \delta W_{\text{visc}} + P_e \frac{D_m}{\rho} dt - P_s \frac{D_m}{\rho} dt.$$

I.C - Conclusion : bilan d'énergie mécanique

Par identification entre les deux expressions,

$$dE_{m,f} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{constr}}}{=} \delta m \left[\left(\frac{1}{2} v_s^2 + gz_s \right) - \left(\frac{1}{2} v_e^2 + gz_e \right) \right] \underset{\substack{\uparrow \\ \text{TEM}}}{=} \delta W_i + \delta W_{\text{visc}} + P_e \frac{D_m}{\rho} dt - P_s \frac{D_m}{\rho} dt.$$

et puisque $\delta m = D_m dt$ les termes en pression peuvent passer dans le membre de gauche,

$$\delta m \left[\left(\frac{P_s}{\rho} + \frac{1}{2} v_s^2 + gz_s \right) - \left(\frac{P_e}{\rho} + \frac{1}{2} v_e^2 + gz_e \right) \right] = \delta W_i + \delta W_{\text{visc}}.$$

Cette écriture est infinitésimale, et donc peu commode à utiliser pour réaliser des bilans macroscopiques. En pratique, on utilise donc les deux versions énoncées ci-dessous.

- **Écriture « par unité de masse traversant » : en énergies massiques**

On introduit le **travail indiqué massique** (ou **par unité de masse traversant**) w_i , s'exprimant en $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1}$, reçu par le fluide par

$$\delta W_i = w_i \delta m,$$

et de même le travail de viscosité par unité de masse traversant w_{visc} ,

$$\delta W_{\text{visc}} = w_{\text{visc}} \delta m.$$

On en déduit une première réécriture du bilan d'énergie, dite « par unité de masse traversant » ou « massique » :

$$\left(\frac{P_s}{\rho} + \frac{1}{2} v_s^2 + gz_s \right) - \left(\frac{P_e}{\rho} + \frac{1}{2} v_e^2 + gz_e \right) = w_i + w_{\text{visc}}.$$

Espace 8

🚫🚫🚫 **Attention !** Confusion fréquente : le terme « massique » est à comprendre comme « par unité de masse traversante », et pas « par unité de masse du système ouvert » : la masse par laquelle on divise est $\delta m \neq m_0$.

↪ le travail indiqué massique correspond au travail indiqué que reçoit 1 kg de fluide entre son entrée et sa sortie du volume de contrôle Σ_0 ... mais ce n'est pas du tout le travail reçu par tout le fluide contenu dans Σ_0 au cours d'une transformation qu'on ne saurait même pas définir.

- **Écriture « par unité de temps » : en puissance**

Introduisons maintenant les puissances associées au travail indiqué et à celui des forces visqueuses :

$$\delta W_i = \mathcal{P}_i dt \quad \text{et} \quad \delta W_{\text{visc}} = \mathcal{P}_{\text{visc}} dt,$$

où \mathcal{P}_i est la **puissance indiquée** reçue par le fluide (en W).

On en déduit une seconde réécriture du bilan d'énergie, dite « par unité de temps » ou « en puissance » :

$$D_m \left[\left(\frac{P_s}{\rho} + \frac{1}{2} v_s^2 + gz_s \right) - \left(\frac{P_e}{\rho} + \frac{1}{2} v_e^2 + gz_e \right) \right] = \mathcal{P}_i + \mathcal{P}_{\text{visc}}.$$

Espace 9

- En résumé ...

Entre l'entrée et la sortie d'un volume de contrôle au sein d'un écoulement stationnaire et incompressible, le bilan d'énergie mécanique d'un fluide s'écrit de deux façons différentes :

ou bien avec les travaux massiques (par unité de masse traversant) algébriques reçus au sein du volume de contrôle,

$$\left(\frac{P_s}{\rho} + \frac{1}{2}v_s^2 + gz_s \right) - \left(\frac{P_e}{\rho} + \frac{1}{2}v_e^2 + gz_e \right) = w_i + w_{\text{visc}},$$

ou bien avec les puissances algébriques reçues,

$$D_m \left[\left(\frac{P_s}{\rho} + \frac{1}{2}v_s^2 + gz_s \right) - \left(\frac{P_e}{\rho} + \frac{1}{2}v_e^2 + gz_e \right) \right] = \mathcal{P}_i + \mathcal{P}_{\text{visc}}.$$

Ce bilan d'énergie est parfois appelé **théorème** ou **relation de Bernoulli généralisé(e)**.

Remarque : dans la pratique, l'effet de la viscosité ne sera jamais écrit sous cette forme : voir le paragraphe III sur les pertes de charge.

⚠️ **Attention !** Ne pas mélanger les versions « puissance » (D_m en facteur) et « massique » (pas de facteur du tout). La nécessité de mettre un facteur se retrouve par analyse dimensionnelle.

La puissance indiquée et le travail indiqué massique (par unité de masse traversant) sont reliés par

$$\mathcal{P}_i = D_m w_i$$

- Charge hydraulique

On appelle **charge hydraulique** « la quantité qui intervient dans le théorème de Bernoulli ». Moralement, elle quantifie l'énergie mécanique massique du fluide en un point de l'écoulement. Cependant, on sera très prudent avec son expression, qui n'est ni universelle ni bien posée : en fonction des besoins, on peut l'exprimer comme une énergie massique, comme une pression, ou comme une hauteur, le premier cas étant le plus classique.

$$K_e = \frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz$$

$$K_p = P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gz$$

$$K_h = \frac{P}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + z$$

Il faut retenir l'expression encadrée et savoir retrouver les autres en isolant le terme qui a la dimension voulue en divisant l'expression par « ce qu'il faut ».

I.D - Généralisation aux systèmes à plusieurs entrées et plusieurs sorties

La démonstration est un peu plus fastidieuse, mais suit exactement les mêmes idées de physique.

Bilan de masse : la masse du système ouvert est constante, on en déduit donc la relation entre les masses traversant le système

$$\sum_{\text{entrées } i} \delta m_i = \sum_{\text{sorties } j} \delta m_j$$

ce que l'on peut transposer aux débits massiques, puisque $\delta m_i = D_{m,i} dt$,

$$\sum_{\text{entrées } i} D_{m,i} = \sum_{\text{sorties } j} D_{m,j}.$$

On retrouve ni plus ni moins que la conservation du débit massique dans un écoulement stationnaire.

Bilan d'énergie mécanique : le raisonnement est tout à fait identique et donne

$$\sum_{\text{sorties } j} D_{m,j} \left(\frac{P_j}{\rho} + \frac{1}{2}v_j^2 + gz_j \right) - \sum_{\text{entrées } i} D_{m,i} \left(\frac{P_i}{\rho} + \frac{1}{2}v_i^2 + gz_i \right) = \mathcal{P}_i + \mathcal{P}_{\text{visc}}.$$

Hormis dans le cas particulier où il y a égalité des débits, formuler une relation équivalente en terme de travaux massiques est impossible.

II - Théorème de Bernoulli : conservation de l'énergie mécanique dans un écoulement parfait

Un cas particulier important pour les circuits hydrauliques est celui d'une simple conduite ($\mathcal{P}_i = 0$). Si la conduite n'est ni trop longue ni trop biscornue, les effets de la viscosité peuvent souvent être négligés ($\mathcal{P}_{\text{visc}} = 0$) et l'écoulement modélisé par un écoulement parfait.

II.A - Énoncé

• Cas d'un écoulement en conduite

D'après le bilan d'énergie appliqué entre l'entrée et la sortie d'un tronçon quelconque de la conduite,

$$\left(\frac{P_s}{\rho} + \frac{1}{2} v_s^2 + g z_s \right) - \left(\frac{P_e}{\rho} + \frac{1}{2} v_e^2 + g z_e \right) = \cancel{w_1} + \cancel{w_{\text{visc}}} = 0.$$

Les sections d'entrée et de sortie étant quelconques, on en déduit :

Théorème de Bernoulli en conduite :

Dans un écoulement en conduite parfait, stationnaire et incompressible, la charge hydraulique prend la même valeur sur toute section \mathcal{S} de la conduite,

$$\forall \mathcal{S}, \quad \frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + g z = K.$$

Dans cette écriture, la pression P , la vitesse v et l'altitude z s'interprètent comme les valeurs moyennées sur la section \mathcal{S} ... cependant si la conduite est de petite dimension $z \simeq \text{cte}$ et pour un écoulement parfait $v = \text{cte}$ sur une section.

On admet que cette relation demeure valable en bonne approximation lorsque les caractéristiques de l'écoulement varient suffisamment lentement : on parle alors de régime **quasi-stationnaire**.

Rappel : L'hypothèse d'écoulement incompressible permet de garantir que la masse volumique est uniforme dans tout l'écoulement.

• Généralisation à un écoulement quelconque (théoriquement hors-programme ... mais qui sert quand même !)

On admet que cette relation de conservation se généralise entre deux points d'une même ligne de courant : cela permet de généraliser au cas des écoulements externes. La démonstration nécessite les équations dynamiques de la mécanique des fluides, qui ne sont pas au programme.

Théorème de Bernoulli le long d'une ligne de courant :

Dans un écoulement parfait, stationnaire et incompressible, la charge hydraulique prend la même valeur en tout point d'une ligne de courant \mathcal{L} ,

$$\forall M \in \mathcal{L}, \quad \frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + g z = K(\mathcal{L}) = \text{cte}.$$

Si l'écoulement est irrotationnel, la valeur de K est indépendante de la ligne de courant \mathcal{L} considérée : la charge hydraulique prend la même valeur en tout point de l'écoulement.

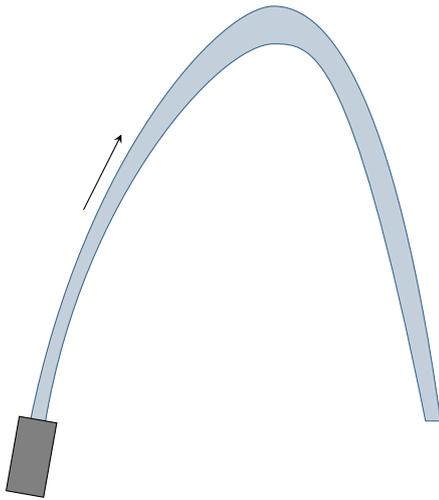
Ces relations sont valables pour un écoulement interne ou externe.

Dans cette écriture, la pression P , la vitesse v et l'altitude z s'interprètent comme les valeurs locales au point M .

Remarque : dans le cas $v = 0$, on retrouve la relation de l'hydrostatique, $P + \rho g z = \text{cte}$.

II.B - Conséquences pour les écoulements à l'air libre

• Pression dans un jet d'eau à l'air libre



On admet qu'un jet d'eau à l'air libre peut être modélisé par un écoulement parfait, stationnaire, incompressible et irrotationnel.

Dans une section droite du jet :

$$v = \text{cte} \text{ (écoulement parfait) et } z \simeq \text{cte} \text{ (jet de petite taille)}$$

Espace 10

Conséquence :

$P \simeq \text{cte}$ d'après Bernoulli et par continuité de la pression à l'interface air-eau on en conclut qu'elle est égale à la pression atmosphérique.

Espace 11

Ce raisonnement étant valable dans n'importe quelle section du jet d'eau, on conclut :



La pression dans un jet d'eau à l'air libre est partout égale à la pression atmosphérique.

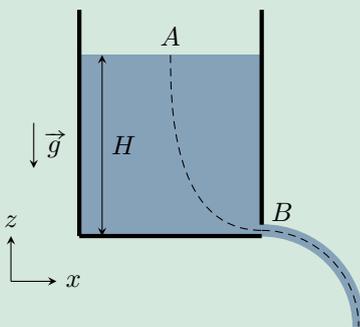


Remarque 1 : La vitesse de l'écoulement est uniforme sur une section, mais pas dans l'ensemble du jet car les particules fluides accélèrent sous l'effet de leur poids et sont freinées par les frottements de l'air. D'après la conservation du débit, cela signifie que le diamètre du jet varie également.

Remarque 2 : C'est très différent pour un écoulement en conduite, où les parois de la conduite n'imposent pas de condition aux limites sur la pression : cf. paragraphe suivant.

• Application : vitesse de vidange d'un réservoir

Application 1 : Relation de Torricelli



La relation de Torricelli donne la vitesse à laquelle se vidange un réservoir de section S rempli d'une hauteur d'eau H et percé au fond d'un petit orifice de section $S' \ll S$. Elle a été établie en 1643 par Evangelista Torricelli, probablement expérimentalement, avant d'être « justifiée » par des raisonnements qui se sont avérés erronés par la suite. La démonstration rigoureuse est due à Daniel Bernoulli en 1738. On raisonne sur la ligne de courant AB .

- 1 - Exprimer la conservation du débit entre la surface libre du réservoir et sa section de sortie. Quelle approximation peut-on faire sur les vitesses v_A et v_B ?
- 2 - Exprimer et simplifier le théorème de Bernoulli entre A et B .
- 3 - Conclure sur l'expression de v_B en fonction de H .



1 En interprétant v_A et v_B comme les vitesses débitantes, la conservation du débit donne

$$v_A S = v_B S' \quad \text{donc} \quad v_A = \frac{S'}{S} v_B \ll v_B.$$

On pourra donc négliger v_A devant v_B , ou encore la supposer quasi-nulle.

2 Supposons que le réservoir ne se vide pas trop vite : l'écoulement est quasi-stationnaire, qui permet d'exprimer le théorème de Bernoulli :

$$\frac{P_A}{\rho} + \frac{v_A^2}{2} + gz_A = \frac{P_B}{\rho} + \frac{v_B^2}{2} + gz_B$$

Les termes en pression se simplifient car $P_A = P_B = P_{\text{atm}}$.

3 Il suffit d'isoler v_B dans l'expression précédente,

$$v_B = \sqrt{2g(z_A - z_B)} = \sqrt{2gH}$$

Espace 12



Plus l'orifice est bas, plus la hauteur d'eau qui le surmonte est élevée, plus le jet semble puissant et aller loin, signe que la vitesse à laquelle le fluide s'écoule est d'autant plus élevée.

- Application : portance d'une aile d'avion

Application 2 : Origine de la force de portance



Cette vidéo montre l'écoulement d'air autour d'une aile d'avion. Elle est réalisée dans un tunnel à fumée : des bouffées de fumée sont envoyées à intervalle régulier dans un écoulement imposé par une soufflerie, ce qui permet de visualiser les lignes de courant. Le film observé au ralenti (entre 15 et 50 secondes sur la vidéo) montre que l'écoulement est plus rapide au dessus de l'aile qu'en dessous.

Utiliser le théorème de Bernoulli pour justifier que l'aile subit une force vers le haut : la portance.

Vidéo tunnel à fumée (à partir de 15 secondes) : on constate expérimentalement que la vitesse est supérieure au dessus de l'aile par rapport à en dessous. Attention, c'est un constat expérimental et pas une justification vaiseuse comme on en lit parfois.

Interprétation simple : $z \simeq \text{cte}$ et écoulement irrotationnel, donc la conservation de la charge hydraulique entre le dessus et le dessous de l'aile indique que

$$\frac{P_{\text{haut}}}{\rho} + \frac{v_{\text{haut}}^2}{2} = \frac{P_{\text{bas}}}{\rho} + \frac{v_{\text{bas}}^2}{2} \quad \text{donc} \quad \frac{P_{\text{bas}} - P_{\text{haut}}}{\rho} = \frac{v_{\text{haut}}^2 - v_{\text{bas}}^2}{2} < 0$$

Comme $v_{\text{bas}} < v_{\text{haut}}$, alors $P_{\text{bas}} > P_{\text{haut}}$ donc l'aile subit une force vers le haut : c'est la portance.

Espace 13

II.C - Pression et vitesse dans un écoulement parfait en conduite

• Conduite de section constante

Application 3 : Pression dans une conduite de section constante

On considère une conduite horizontale de section S constante, dans laquelle l'écoulement est stationnaire, parfait, incompressible, et irrotationnel de débit volumique D_V .

- 1 - Comment varie la vitesse dans la conduite ?
- 2 - Comment varie la pression au sein de l'écoulement ?

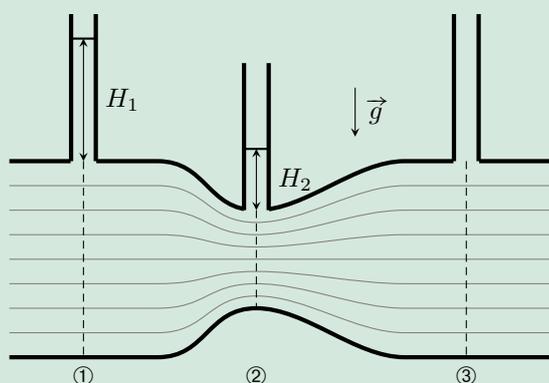
Conservation du débit Sv implique v identique en tout point de la conduite.

Par le th de Bernoulli, on en déduit que la pression est également constante en tout point de la conduite.

Espace 14

• Conduite de section variable : effet Venturi

Application 4 : Effet Venturi



On étudie un écoulement stationnaire d'un fluide incompressible de masse volumique ρ dans une conduite horizontale de section variable. On suppose l'écoulement parfait : le profil de vitesse dans toute section perpendiculaire à l'axe de la conduite est uniforme, de sorte que la pression est également uniforme sur chaque section. Trois tubes piézométriques, aussi appelés prises de pression, sont placés sur trois sections de la conduite pour mesurer la pression au sein du fluide.

Cette expérience permet de comprendre l'effet d'un resserrement de section sur la vitesse et la pression au sein de l'écoulement.

- 1 - Exprimer la vitesse V_2 en fonction de V_1 et des sections S_1 et S_2 . Est-ce cohérent avec les lignes de courant tracées ?
- 2 - Relier la hauteur H du fluide dans un tube piézométrique à la pression P qui règne dans l'écoulement en dessous de ce tube. D'après la figure, comment évolue la pression lors du resserrement de section ?
- 3 - Interpréter ce résultat en utilisant le théorème de Bernoulli.
- 4 - Quelle devrait être la hauteur H_3 ?

M!

1 Resserrement des LDC donc augmentation de la vitesse. L'écoulement est permanent et incompressible, donc conservation du débit volumique :

$$D_V = S_1 V_1 = S_2 V_2 \quad \text{soit} \quad V_2 = \frac{S_1}{S_2} V_1 > V_1,$$

ce qui est cohérent avec le resserrement des lignes de courant.

2 Il n'y a pas de mouvement du fluide dans les tubes piézométriques, on peut donc leur appliquer la relation de l'hydrostatique,

$$P_i = P_{\text{atm}} + \rho g H_i$$

Comme $H_2 < H_1$ on en déduit que $P_2 < P_1$ (constat expérimental).

3 Conservation de la charge hydraulique :

$$\frac{P_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{P_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2$$

et comme la conduite est horizontale on en déduit

$$\frac{P_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} = \frac{P_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2}$$

Comme $V_2 > V_1$, on a nécessairement $P_2 < P_1$ (justification théorique ☺).

4 Normalement $H_3 = H_1$, mais ce n'est pas le cas : perte de charge due à la viscosité du fluide.

Espace 15

Remarque : On peut aller plus loin dans l'exploitation quantitative de l'expérience : en mesurant $\Delta H = H_1 - H_2$ et en connaissant les sections, on peut déterminer le débit de fluide dans la conduite. C'est le principe du débitmètre à effet Venturi.

Généralisation :



Dans un écoulement parfait incompressible en conduite, un resserrement de section se traduit par une hausse de vitesse et une chute de pression.

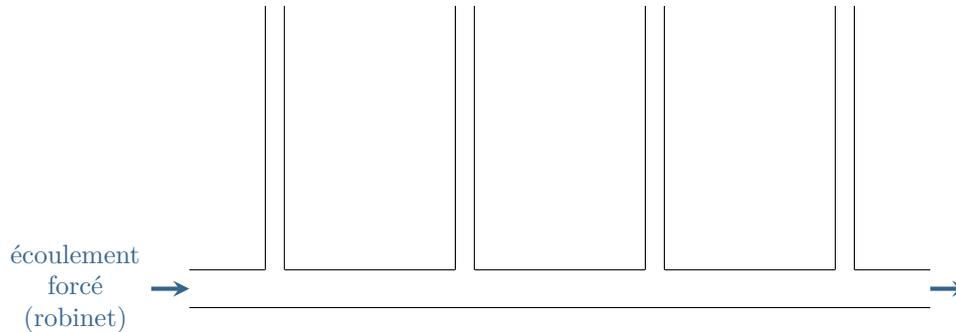
C'est donc différent d'un écoulement dans un jet à l'air libre où la pression est uniformément égale à la pression atmosphérique, indépendamment de la vitesse locale de l'écoulement.

III - Pertes de charge

III.A - Définition

- **Mise en évidence expérimentale**

Dispositif : conduite de faible diamètre, alimentée au robinet, avec quatre tubes piézométriques régulièrement répartis.



Ce que l'on attend :

conduite horizontale de section constante, donc on s'attend à une pression identique tout le long de la conduite, donc à une hauteur d'eau égale dans tous les tubes piézométriques.

Espace 16

Ce que l'on observe :

la hauteur d'eau diminue régulièrement

Espace 17

Interprétation : l'expérience est contraire à ce que prévoient le théorème de Bernoulli et la conservation du débit, c'est donc que l'une des hypothèses n'est pas vérifiée dans l'expérience.

▷ Incompressible? pas de problème pour l'eau

Espace 18

▷ Stationnaire? approximation, mais raisonnable sur des durées pas trop longues

Espace 19

↪ il y a bien conservation du débit volumique dans l'expérience.

▷ Parfait?

C'est cette hypothèse qu'il faut remettre en cause, la puissance dissipée par viscosité n'est pas négligeable.

Espace 20

$$D_m \left[\left(\frac{P_s}{\rho} + \frac{1}{2} v_s^2 + g z_s \right) - \left(\frac{P_e}{\rho} + \frac{1}{2} v_e^2 + g z_e \right) \right] = \mathcal{P}_{\text{visc}} < 0.$$



Les pertes d'énergie par viscosité diminuent la charge hydraulique :
ce phénomène est nommé **perte de charge**.

• Bilan d'énergie en présence de pertes de charge

Bien qu'elle décrive les pertes d'énergie par viscosité, une perte de charge n'est jamais exprimée sous forme d'un travail (massique) w_{visc} ou d'une puissance $\mathcal{P}_{\text{visc}}$. Usuellement, elle s'exprime ou bien comme une pression, notée par exemple Δp^* , ou bien comme une hauteur, notée Δh^* , choisies positives par convention.

↪ lien entre ces écritures :

$$w_{\text{visc}} = -\frac{\Delta p^*}{\rho} = -g \Delta h^* \quad \text{ou bien} \quad \mathcal{P}_{\text{visc}} = -D_m \frac{\Delta p^*}{\rho} = -D_m g \Delta h^*$$

Espace 21

Théorème de Bernoulli généralisé en présence de pertes de charge :

Dans un écoulement en conduite visqueux, stationnaire et incompressible, la charge hydraulique diminue le long de l'écoulement.

Entre les sections d'entrée et de sortie d'un volume de contrôle,

$$\left(\frac{P_s}{\rho} + \frac{v_s^2}{2} + gz_s \right) - \left(\frac{P_e}{\rho} + \frac{v_e^2}{2} + gz_e \right) = -\frac{\Delta p^*}{\rho} = -g \Delta h^*$$

🚫🚫🚫 **Attention !** Ne pas oublier le signe \ominus devant les pertes de charge, ni les préfacteurs ρ ou g nécessaires !

Dans cette écriture, P , v et z sont les valeurs moyennes sur les sections d'entrée et de sortie du volume de contrôle, c'est en particulier la vitesse débitante qui intervient. Toutefois, un écoulement industriel en conduite est généralement turbulent et le profil de vitesse peut être assimilé à celui d'un écoulement parfait (cf. chapitre précédent), si bien que P , v et z sont (en moyenne temporelle) quasiment uniformes sur toute section de la conduite.

↪ même si l'effet de la viscosité est faible sur le profil de vitesse, il est bien présent dans le bilan d'énergie.

• Interprétation de Δp^* et Δh^*

Écriture en pression :

$$\left(P_s + \frac{1}{2} \rho v_s^2 + \rho g z_s \right) - \left(P_e + \frac{1}{2} \rho v_e^2 + \rho g z_e \right) = -\Delta p^*$$

ce que l'on peut réécrire sous la forme

$$\begin{aligned} \left(P_s + \frac{1}{2} \rho v_s^2 + \rho g z_s \right) - \left(P_e - \Delta p^* + \frac{1}{2} \rho v_e^2 + \rho g z_e \right) &= 0 \\ \iff \left(P_s + \Delta p^* + \frac{1}{2} \rho v_s^2 + \rho g z_s \right) - \left(P_e + \frac{1}{2} \rho v_e^2 + \rho g z_e \right) &= 0 \end{aligned}$$

Interprétation de Δp^* :

tout se passe comme si l'écoulement était parfait mais la pression entrée de l'écoulement était abaissée de Δp^* (ou la pression de sortie augmentée d'autant).

Espace 22

Écriture en hauteur :

$$\left(\frac{P_s}{\rho g} + \frac{v_s^2}{2g} + z_s \right) - \left(\frac{P_e}{\rho g} + \frac{v_e^2}{2g} + z_e \right) = -\Delta h^*$$

ce que l'on peut réécrire sous la forme

$$\left(\frac{P_s}{\rho g} + \frac{v_s^2}{2g} + z_s + \Delta h^* \right) - \left(\frac{P_e}{\rho g} + \frac{v_e^2}{2g} + z_e \right) = 0 \quad \iff \quad \left(\frac{P_s}{\rho g} + \frac{v_s^2}{2g} + z_s \right) - \left(\frac{P_e}{\rho g} + \frac{v_e^2}{2g} + z_e - \Delta h^* \right) = 0$$

Interprétation de Δh^* :

tout se passe comme si l'écoulement était parfait mais que le fluide devait gravir une hauteur Δh^* supplémentaire (ou partait d'une hauteur inférieure d'autant).

Espace 23

Lien à la hauteur d'eau dans un tube piézométrique : La hauteur d'eau h dans un tube piézométrique est reliée à la pression P au sein de l'écoulement par la relation de l'hydrostatique, $P = P_{atm} + \rho gh$ soit $h = \frac{P - P_{atm}}{\rho g}$.

Espace 24

Si la pression est diminuée de Δp^* sous l'effet des pertes de charge, $h' = h - \frac{\Delta p^*}{\rho g} = h - \Delta h^*$.

Espace 25

Conclusion : la perte de charge Δh^* peut aussi s'interpréter comme la différence de hauteur que l'on observerait dans un tube piézométrique avec et sans perte de charge.



III.B - Pertes de charge régulières

On appelle **pertes de charge régulières** les pertes de charge dans une conduite de « géométrie uniforme ». Elles sont proportionnelles à la distance parcourue dans la conduite.

↪ on les exprime souvent par unité de longueur sous forme d'une **perte de charge linéique**.

- **Relation de Darcy-Weisbach, coefficient de friction**

Des études expérimentales ont permis d'établir certaines dépendances vis-à-vis des paramètres de la conduite ou de l'écoulement, récapitulées par la **relation de Darcy-Weisbach** (normalement toujours rappelée dans un énoncé). Entre l'entrée et la sortie d'une conduite de longueur L , cette perte de charge s'écrit sous la forme

$$\Delta p^* = \xi \frac{L}{D} \frac{\rho V^2}{2} \iff \Delta h^* = \xi \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$$

avec D le diamètre de la conduite et V la vitesse débitante. Le coefficient ξ est appelé **coefficient de friction**. Il s'agit d'un coefficient empirique qui dépend de nombreux paramètres, principalement de la rugosité de la conduite et du nombre de Reynolds de l'écoulement. Les valeurs prises par ξ sont répertoriées dans des bases de données, ou représentées graphiquement sous forme d'**abaques** dont la principale est le **diagramme de Moody**, voir figure 3.

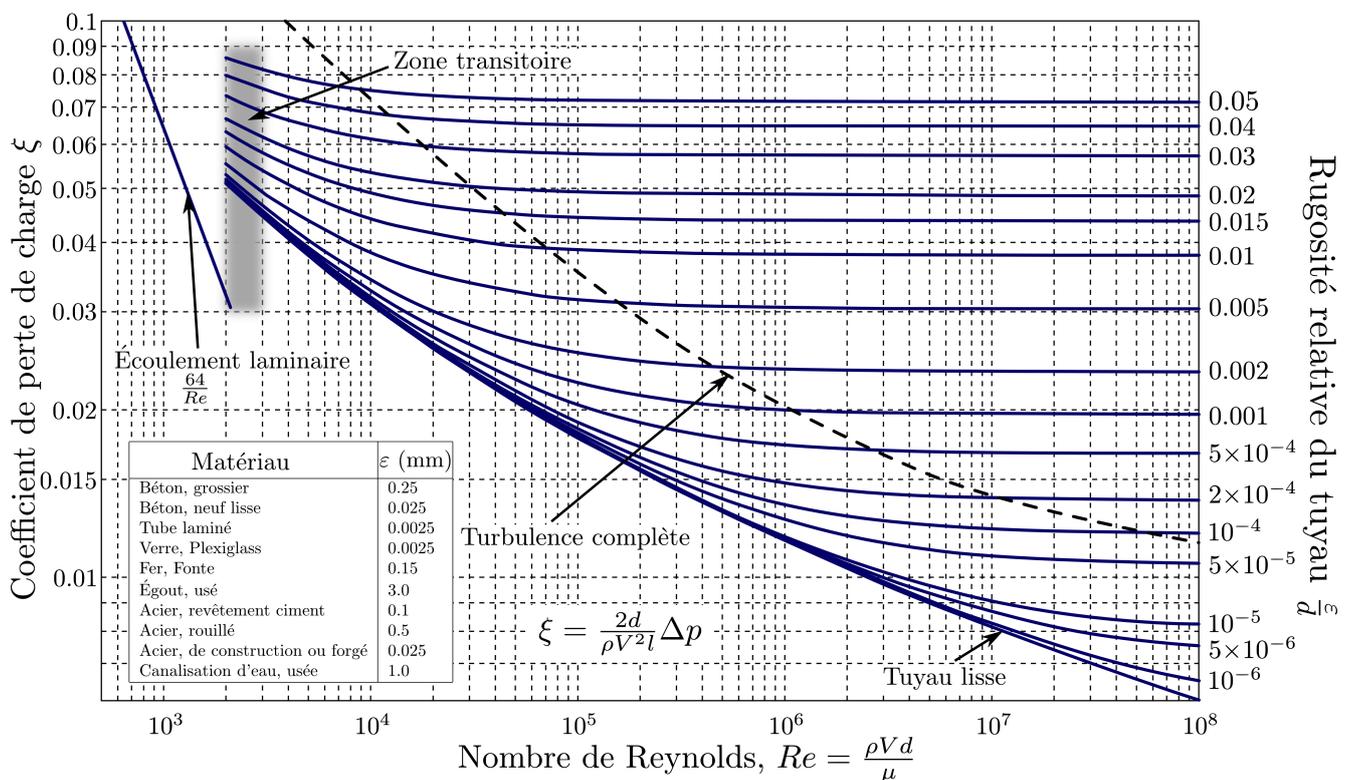


Figure 3 – Diagramme de Moody. Attention : en abscisse de ce diagramme, la viscosité est notée μ plutôt que η . Extrait de Wikipédia.

M!

Application 5 : Pertes de charge dans une conduite d'eau chaude

Dans une habitation, l'eau chaude produite par le chauffe-eau est amenée jusqu'aux robinets par des conduites en cuivre de diamètre $d = 10 \text{ mm}$ avec un débit $Q = 15 \text{ L} \cdot \text{min}^{-1}$. L'eau quitte le chauffe-eau sous une pression $P_c = 4 \text{ bar}$. Les rugosités du cuivre ont une hauteur typique de l'ordre de $2 \text{ }\mu\text{m}$.

Donnée : viscosité de l'eau $\eta = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$.

- 1 - Quelle est la nature de l'écoulement ?
- 2 - Déterminer le coefficient de perte de charge en exploitant le diagramme de Moody.
- 3 - Quelle est la pression P_r au niveau d'un robinet situé à 10 m du chauffe-eau ?

$$\boxed{1} \text{ Vitesse débitante : } V = Q \times \frac{4}{\pi d^2} = 0,25 \cdot 10^{-3} \times \frac{4}{\pi \times 1 \cdot 10^{-4}} = 3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1};$$

$$\text{Nombre de Reynolds : } Re = \frac{Vd\rho}{\eta} = 3 \cdot 10^4$$

L'écoulement est donc turbulent

$$\boxed{2} \text{ Rugosité relative } \frac{\varepsilon}{d} = 1 \cdot 10^{-4} \text{ donc } \xi = 0,025.$$

$$\boxed{3} \Delta p^* = 0,025 \times \frac{10}{10^{-2}} \times \frac{10^3 \times 9}{2} = 1 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 1 \text{ bar}$$

donc la pression au niveau du robinet est de 3 bar.

Espace 26

- **Chute de pression dans une conduite de section constante**

Pression à une distance x de l'entrée de la conduite :

$$\Delta p^*(x) = \xi \frac{\rho V^2}{2D} x \text{ donc } P(x) = P_e - \xi \frac{\rho V^2}{2D} x$$

Espace 27

Q



Sous l'effet des pertes de charge régulières, la pression diminue linéairement le long d'une conduite rectiligne.

↪ on explique ainsi la diminution régulière de la hauteur d'eau dans les tubes piézométriques.

III.C - Pertes de charge singulières

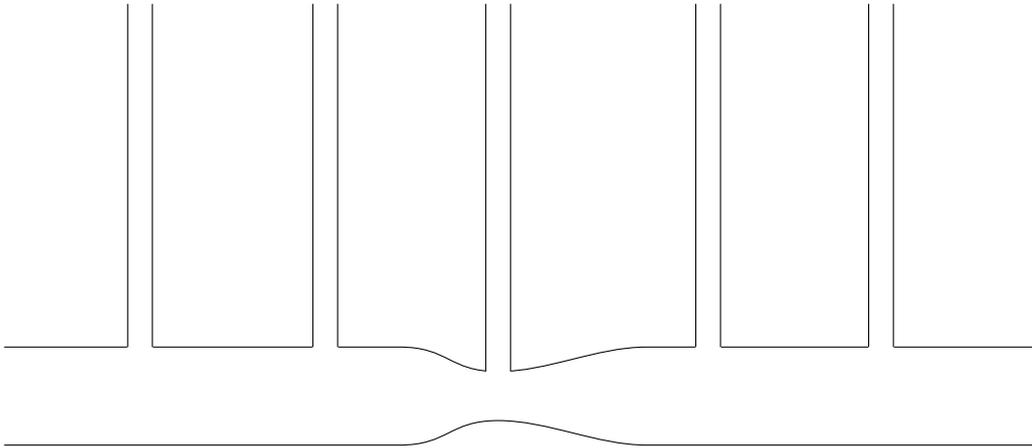
La présence d'un obstacle au sein de l'écoulement ou d'une variation de géométrie de la conduite (coude, resserrement de section, etc.) génère une zone de turbulence juste derrière cet obstacle, dans laquelle la dissipation visqueuse est élevée.



On appelle **pertes de charge singulières** les pertes de charge localisées au voisinage d'une singularité (brusque variation de géométrie) de la conduite.

Encore plus que les pertes de charges régulières, l'estimation des pertes de charge singulières est empirique : utilisation de tables, d'abaques, etc.

Retour sur l'expérience de Venturi :



III.D - Effets des pertes de charge sur l'écoulement ... ou pourquoi il faut se méfier de son intuition

La viscosité traduit le frottement des particules fluides les unes avec les autres et avec les parois de la conduite dans laquelle le fluide s'écoule. Une analogie un peu rapide avec la mécanique des solides peut donc facilement laisser croire que les pertes de charge ont pour effet de ralentir l'écoulement, c'est-à-dire de diminuer le débit. Or il n'en est rien ! En effet, un paramètre supplémentaire intervient en mécanique des fluides : la pression, qui n'a pas d'analogue en mécanique des solides.

En mécanique des solides : théorème de l'énergie mécanique le long d'une trajectoire \widehat{AB}

$$\left(\underbrace{\frac{1}{2}mv_B^2}_{=E_{c,B}} + \underbrace{mgz_B}_{=E_{pp,B}} \right) - \left(\frac{1}{2}mv_A^2 + mgz_A \right) = \underbrace{W_{fr}}_{<0}$$

Hypothèse : les valeurs initiales (z_A et v_A) et la position d'arrivée (z_B) sont connues.

↪

les frottements ont forcément pour effet de diminuer v_B

Espace 28.

En mécanique des fluides : théorème de Bernoulli entre l'entrée et la sortie d'une conduite.

$$\left(\underbrace{\frac{1}{2}\rho v_s^2}_{=e_{c,s}} + \underbrace{\rho g z_s}_{=e_{pp,s}} + P_s \right) - \left(\frac{1}{2}\rho v_e^2 + \rho g z_e + P_e \right) = \underbrace{-\Delta p^*}_{<0}$$

Hypothèse : les valeurs en entrée (z_e, v_e et P_e) et la position de la sortie (z_s) sont connues.

↪

les frottements peuvent avoir pour effet de diminuer ou bien v_s ou bien P_s .

Espace 29

Ainsi, la mécanique des fluides implique une variable supplémentaire, la pression ... mais aussi une équation supplémentaire, la conservation du débit. Il n'y a donc bien qu'un unique couple (P_s, v_s) qui soit compatible avec le théorème de Bernoulli et la conservation du débit.



En fonction des conditions aux limites, les pertes de charge ne modifient pas forcément le débit mais peuvent aussi modifier la pression dans un écoulement.



IV - Élément actif

• Puissance indiquée

On appelle **élément actif** tout composant du circuit hydraulique ou pneumatique dont le but est d'échanger de l'énergie mécanique avec le fluide : pompe, turbine, hélice, etc. La puissance et le travail algébriques qu'il fournit au fluide sont appelés **puissance indiquée** et **travail indiqué** (défini par unité de masse traversant). Ainsi, la puissance indiquée est positive si le fluide reçoit effectivement de l'énergie dans l'élément actif, négative sinon.

Exemples : pompe >0 et turbine <0

Espace 30

Remarque culturelle : la puissance est appelée « indiquée » car elle est renseignée sur la plaque signalétique de l'élément actif en question, dont les informations sont normalisées.

La question intéressante est comment savoir a priori si un élément d'une installation hydraulique fournit ou non une puissance indiquée au fluide ?



Il y a échange de puissance indiquée au sein d'un élément actif si et seulement si il comporte des pièces mobiles.

• Bilan d'énergie en présence d'un élément actif

Théorème de Bernoulli généralisé en présence d'un élément actif :

Dans un écoulement visqueux ou parfait, stationnaire et incompressible, la charge hydraulique est modifiée au passage d'un élément actif.

Entre les sections d'entrée et de sortie d'un volume de contrôle contenant l'élément actif,

$$D_m \left[\left(\frac{P_s}{\rho} + \frac{1}{2} v_s^2 + g z_s \right) - \left(\frac{P_e}{\rho} + \frac{1}{2} v_e^2 + g z_e \right) \right] = \mathcal{P}_i$$

Dans cette écriture, P , v et z sont les valeurs moyennes sur les sections d'entrée et de sortie du volume de contrôle ... mais dans un écoulement industriel turbulent elles sont quasiment uniformes en moyenne temporelle.

Remarque : Il n'est pas nécessaire de comptabiliser une perte de charge singulière au sein de l'élément actif : les forces visqueuses ne font que diminuer la puissance indiquée fournie par l'élément actif à l'écoulement.

• Application : puissance d'une centrale hydraulique



Application 6 : Centrale hydroélectrique de Romanche Gavet



Mise en service en octobre 2020, la centrale de Romanche Gavet est l'ouvrage hydroélectrique français le plus récent, destiné à remplacer cinq petites installations perturbant le cours de la rivière Romanche. Un débit maximal $D_V = 40 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ est dévié de la rivière, sans grand barrage, ce qui est préférable pour la continuité écologique du cours d'eau. Une conduite d'amenée souterraine longue de plus de 9 km permet d'emmener l'eau sur une hauteur de chute $h = 280 \text{ m}$ jusqu'à une installation souterraine où plusieurs turbines sont montées en parallèle. Enfin, l'eau passée par les turbines est renvoyée dans la rivière. La puissance électrique installée est $\mathcal{P} = 97 \text{ MW}$: l'objectif de l'exercice est de retrouver cet ordre de grandeur.

- 1 - Écrire et simplifier la relation de Bernoulli entre l'entrée et la sortie de la conduite d'amenée.
- 2 - En déduire la puissance indiquée disponible sur les turbines en négligeant toute perte de charge.
- 3 - Le rendement d'une turbine du type de celles utilisées dans la centrale est de l'ordre de 90 %. Retrouve-t-on l'ordre de grandeur de la puissance installée ?

1 Théorème de Bernoulli entre l'entrée dans la conduite d'amenée et la sortie après passage au travers de la turbine.

Hypothèses : $P_s = P_e = P_{\text{atm}}$ et $v_s \simeq v_e$ car l'eau est ralentie par la turbine. Ainsi,

$$D_m \left[\left(\frac{P_s}{\rho} + \frac{1}{2} v_s^2 + g z_s \right) - \left(\frac{P_e}{\rho} + \frac{1}{2} v_e^2 + g z_e \right) \right] = \mathcal{P}_i - D_m g \Delta h^*$$

2 On en déduit

$$\mathcal{P}_i = -\rho D_V g h = 110 \text{ MW}$$

3 Oui on retrouve le bon ordre de grandeur, et on peut constater que les pertes de charge ne jouent pas un rôle si important que ça dans le cas de cette centrale.