


# Thermodynamique des installations industrielles

## Composants thermodynamiques

### Exercice 1 : Turbine à gaz

oral banque PT | 💡 2 | ✂️ 1

- 
 ▷ Étude d'un composant thermodynamique ;  
 ▷ Modèle du gaz parfait ;  
 ▷ Bilan d'entropie.

1 Considérons un système ouvert. Notons e les grandeurs en entrée et s celles en sortie. Le premier principe s'écrit

$$D[(h_s + e_{c,s} + e_{p,s}) - (h_e + e_{c,e} + e_{p,e})] = \mathcal{P}_u + \mathcal{P}_{th}$$

avec  $h$  l'enthalpie massique,  $e_c$  l'énergie cinétique massique et  $e_p$  l'énergie potentielle massique du fluide ;  $\mathcal{P}_u$  la puissance mécanique utile qu'il reçoit et  $\mathcal{P}_{th}$  la puissance thermique reçue. Le second principe s'écrit

$$D(s_s - s_e) = \frac{\mathcal{P}_{th}}{T_0} + \sigma_{créée}$$

avec  $s$  l'entropie massique,  $T_0$  la température du thermostat fournissant la puissance thermique  $\mathcal{P}_{th}$ , et  $\sigma_{créée}$  le taux de création d'entropie, c'est-à-dire l'entropie créée par unité de temps.

2 Le but d'une turbine est de récupérer une puissance mécanique, les pertes thermiques sont donc a priori faibles. La turbine est horizontale, il n'y a donc pas de variation d'énergie potentielle. En négligeant de plus les variations d'énergie cinétique, le premier principe appliqué à la turbine devient

$$D(h_s - h_e) = \mathcal{P}_u + \mathcal{P}_{th}$$

soit d'après la loi de Joule (gaz parfait)

$$D_{CP}(T_2 - T_1) = \mathcal{P}_u + \mathcal{P}_{th}$$

Comme les températures sont connues et fixées, alors la somme  $\mathcal{P}_u + \mathcal{P}_{th}$  l'est aussi. Les deux puissances étant négatives (le fluide cède de la puissance mécanique, et le gaz dans la turbine est plus chaud que l'air extérieur), il est clair que la puissance cédée à la turbine  $|\mathcal{P}_u|$  est maximale lorsque  $\mathcal{P}_{th}$  est nulle, c'est-à-dire **lorsque l'écoulement est adiabatique**.

3 En posant  $r = R/M$ , la variation d'entropie massique entre l'entrée et la sortie de la turbine vaut

$$s_s - s_e = \frac{\gamma r}{\gamma - 1} \ln \frac{T_2}{T_1} - r \ln \frac{P_2}{P_1} = -3,5 \cdot 10^2 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$$

Ce résultat est **contradictoire avec l'hypothèse d'un écoulement adiabatique** : si tel était le cas, l'écoulement devrait évacuer l'entropie créée dans la turbine, si bien que l'entropie de sortie serait nécessairement supérieure à l'entropie d'entrée (égale à la limite réversible).

4 Pour pouvoir faire le calcul, il faut supposer la transformation réversible dans la turbine. Alors, d'après le second principe,

$$\mathcal{P}_{th} = T_0 D(s_s - s_e) = T_0 D M (S_{m,s} - S_{m,e}) = -107 \text{ kW}$$

Le signe est cohérent : la vapeur d'eau cède du transfert thermique à l'extérieur.

On déduit du premier principe

$$\mathcal{P}_u = D(h_s - h_e) - \mathcal{P}_{th}$$

qui donne d'après la loi de Joule pour un gaz parfait

$$\mathcal{P}_u = Dc_P(T_2 - T_1) - \mathcal{P}_{th} = D \frac{\gamma R}{M(\gamma - 1)} (T_2 - T_1) - \mathcal{P}_{th}.$$

Finalement,

$$\mathcal{P}_u = -493 \text{ kW}.$$

Ainsi, **une puissance de 600 kW est cédée à la turbine.**

▮ *Bien que non nulle, la puissance perdue par transfert thermique demeure très faible.*

**5** Le débit massique est relié la vitesse (débitante)  $v$  de l'écoulement par

$$D = \rho v \Sigma$$

avec  $\rho$  la masse volumique du gaz et  $\Sigma$  la section de la canalisation. Or pour un gaz parfait, d'après l'équation d'état,

$$P \frac{V}{m} = \frac{n}{m} RT \quad \text{soit} \quad \frac{P}{\rho} = \frac{RT}{M} \quad \text{d'où} \quad \rho = \frac{MP}{RT}.$$

On en déduit

$$v = \frac{D}{\rho \Sigma} \quad \text{soit} \quad v = \frac{DRT}{MP\Sigma}.$$

Numériquement, on trouve

$$v_e = 0,52 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{et} \quad v_s = 1,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

La variation d'énergie cinétique massique vaut donc

$$e_{c,s} - e_{c,e} = \frac{v_s^2}{2} - \frac{v_e^2}{2} = 1,3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

Compte tenu du débit  $D = 1 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ , cela correspond à une puissance de 1,3 W, largement négligeable devant les 600 kW fournis à la turbine. La variation d'enthalpie de la vapeur est donc très supérieure à sa variation d'énergie cinétique.

▮ *C'est d'ailleurs ce qui explique que la variation de vitesse entre l'entrée et la sortie de la turbine, qui n'est pas dans le sens « intuitif » (on s'attendrait à  $v_s < v_e$ ), n'est pas choquante pour autant car elle demeure très faible.*

## Exercice 2 : Tuyère calorifugée

oral banque PT | 💡 2 | ✂ 2



- ▷ Étude d'un composant thermodynamique ;
- ▷ Modèle du gaz parfait.

**1** Appliquons le premier principe à un volume de contrôle délimité par les sections d'abscisse  $x = 0$  et d'abscisse  $x$ . Le fluide ne reçoit dans la tuyère ni travail indiqué (pas de pièces mobiles), ni transfert thermique. Ainsi,

$$h(x) + \frac{1}{2}v(x)^2 = h_0 + \frac{1}{2}v_0^2 = \text{cte}.$$

**2** On suppose  $v_0 = 0$ . Comme le fluide est un gaz parfait alors d'après la loi de Joule

$$h(x) - h_0 = c_P [T(x) - T_0] \quad \text{donc} \quad v(x)^2 = 2c_P [T_0 - T(x)]$$

Or d'une part

$$c_P = \frac{1}{m} \times \frac{\gamma n R}{\gamma - 1} = \frac{\gamma R}{M(\gamma - 1)}$$

et d'autre part l'équation d'état s'écrit

$$\frac{PV}{m} = \frac{nRT}{m} \quad \text{soit} \quad \frac{P}{\rho} = \frac{RT}{M} \quad \text{d'où} \quad T = \frac{MP}{R\rho}$$

d'où finalement

$$v(x)^2 = \frac{2\gamma R}{M(\gamma - 1)} \times \frac{M}{R} \left[ \frac{P_0}{\rho_0} - \frac{P(x)}{\rho(x)} \right]$$

et ainsi

$$v(x) = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma - 1} \left( \frac{P_0}{\rho_0} - \frac{P(x)}{\rho(x)} \right)}$$

**3** Récrivons

$$v(x) = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma - 1} \frac{P_0}{\rho_0} \left( 1 - \frac{P(x)\rho_0}{\rho(x)P_0} \right)}$$

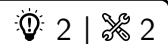
La transformation est adiabatique réversible et concerne un gaz parfait, on applique donc la loi de Laplace :  $PV^\gamma = \text{cte}$  donne en fonction de  $\rho$

$$\frac{P}{\rho^\gamma} = \text{cte}' \quad \text{soit} \quad \frac{P^{1/\gamma}}{\rho} = \text{cte}'' \quad \text{d'où} \quad \frac{\rho_0}{\rho(x)} = \left( \frac{P_0}{P(x)} \right)^{1/\gamma}$$

Finalement, on arrive au résultat cherché :

$$v(x) = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma - 1} \frac{P_0}{\rho_0} \left[ 1 - \left( \frac{P(x)}{P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]}$$

### Exercice 3 : Compresseur étagé



- ▷ Étude d'un composant thermodynamique ;
- ▷ Modèle du gaz parfait.

**1** La compression est adiabatique réversible : on applique donc la loi de Laplace, sous la forme  $P^{1-\gamma} T^\gamma = \text{cte}$ . Ainsi,

$$T_2 = T_0 \beta^{1-1/\gamma} = 685 \text{ K}.$$

**2** La compression est adiabatique, réversible et on néglige les variations d'énergie cinétique et potentielle. D'après le premier principe entre la sortie et l'entrée du compresseur,

$$\Delta h = w + 0$$

Comme le fluide est un gaz parfait, on a d'après la loi de Joule  $\Delta h = c_P \Delta T$  d'où

$$w = \frac{\gamma r}{\gamma - 1} (T_2 - T_0),$$

et en reprenant la question précédente on obtient le résultat voulu,

$$w = \frac{\gamma r}{\gamma - 1} T_0 \left( \beta^{(\gamma-1)/\gamma} - 1 \right) = 412 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

**3** Comme un échangeur ne contient pas de parties mobiles, le travail  $w'$  est la somme des travaux reçus dans les étages basse et haute pression.

$$w' = w_{\text{BP}} + 0 + w_{\text{HP}} = \frac{\gamma r}{\gamma - 1} (T_1 - T_0) + \frac{\gamma r}{\gamma - 1} (T'_2 - T_0) \quad \text{d'où} \quad w' = \frac{\gamma r}{\gamma - 1} (T_1 + T'_2 - 2T_0).$$

D'après la loi de Laplace appliqué aux isentropiques qui partent de la même température  $T_0$ ,

$$T_1 = T_0 \beta_1^{(\gamma-1)/\gamma} \quad \text{et} \quad T'_2 = T_0 \beta_2^{(\gamma-1)/\gamma}$$

ce qui donne bien

$$w' = \frac{\gamma r}{\gamma - 1} T_0 \left( \beta_1^{(\gamma-1)/\gamma} + \beta_2^{(\gamma-1)/\gamma} - 2 \right).$$

4 Lorsque  $P_1 = \sqrt{P_0 P_2}$ ,

$$\beta_1 = \frac{\sqrt{P_0 P_2}}{P_0} = \sqrt{\frac{P_2}{P_0}} = 5 \quad \text{et} \quad \beta_2 = \frac{P_2}{\sqrt{P_0 P_2}} = \sqrt{\frac{P_2}{P_0}} = 5.$$

5 En repartant de la loi de Laplace,

$$T'_2 = T_1 = \beta^{(\gamma-1)/\gamma} T_0 = 432 \text{ K}.$$

Cette température est donc nettement moins élevée (250 °C de différence!) que la température  $T_2$  obtenue en sortie du compresseur mono-étagé.

6 On déduit de ce qui précède

$$w' = \frac{2\gamma r}{\gamma - 1} (T'_2 - T_0) = 319 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1},$$

ce qui représente un gain d'environ 25 % par rapport au compresseur mono-étagé. En plus de permettre des températures moins élevées, l'utilisation de compresseurs étagés est également plus économique.

**Culture industrielle :** Le choix d'un compresseur simple ou étagé relève bien sûr de la complexité de l'installation ... mais aussi du rôle dévolu au compresseur. Par exemple, dans une pompe à chaleur ou un réfrigérateur, le compresseur a pour rôle d'augmenter la température du fluide bien plus que d'augmenter sa pression. Ainsi, dans ces installations, remplacer un compresseur simple par un compresseur étagé est évidemment une mauvaise idée !

## Machines dithermes

### Exercice 4 : Utiliser le CO2 comme fluide frigorigène inspiré oral banque PT | 💡 1 | ✂ 1 | Ⓜ



- ▷ Cycle frigorifique ;
- ▷ Exploitation d'un diagramme des frigoristes.

1 Le cycle est représenté figure 1.

- **État (1)** : on part de vapeur saturante sèche, ce qui signifie que l'état (1) est sur la courbe de saturation, à droite du domaine diphasé.
- **Étape (1)→(2)** : la compression est isentropique, donc suit une isentrope (courbe bleue). L'état (2) est atteint au croisement de l'isobare (horizontale)  $P = P_2 = 90 \text{ bar}$ .
- **Étape (2)→(3)** : les isobares sont horizontales. Le point (3) est atteint au croisement avec l'isotherme  $T = T_3 = 40 \text{ °C}$ .
- **Étape (3)→(4)** : aucun travail n'est échangé dans un détendeur. Comme la détente est de plus adiabatique, alors d'après le premier principe elle est isenthalpique, et se représente donc par une verticale. L'état (4) est atteint au croisement avec l'isobare  $P = P_1 = 35 \text{ bar}$ .
- **Étape (4)→(1)** : c'est une isobare, donc une horizontale jusqu'à retrouver l'état (1).

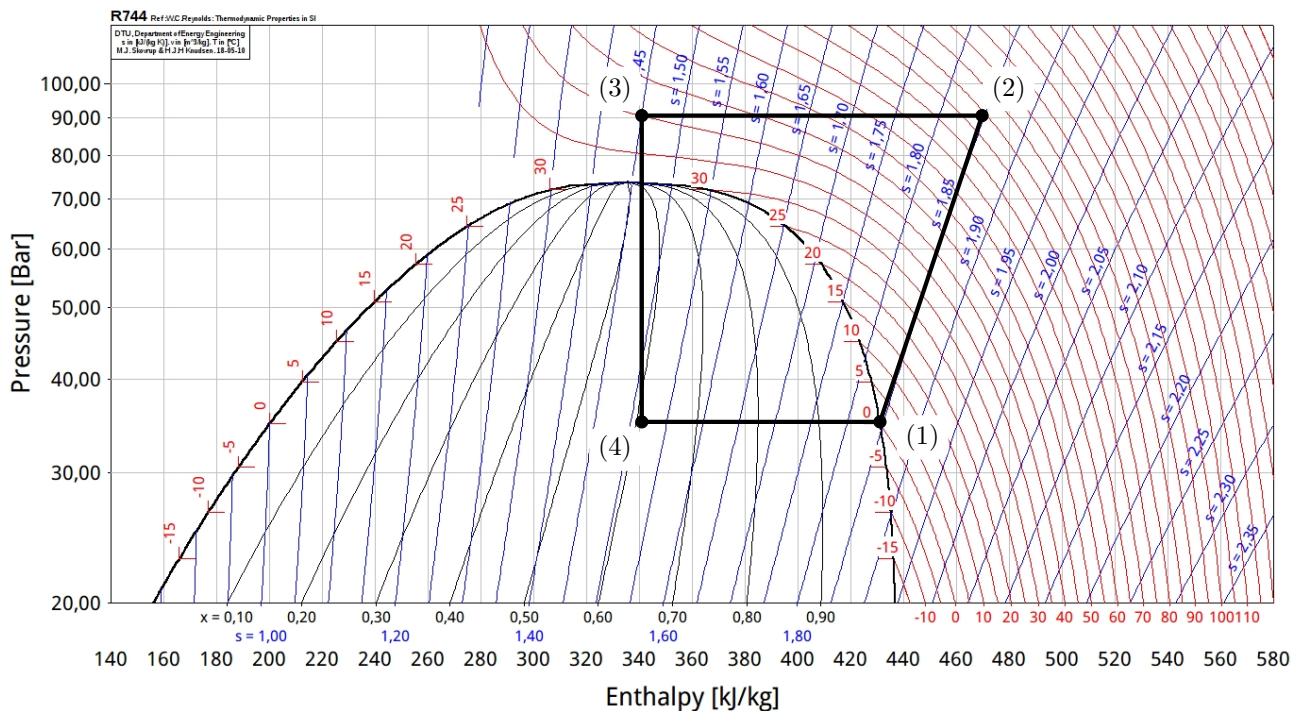
2 Quel que soit le diagramme, un cycle frigorifique est toujours parcouru **en sens trigonométrique**, ce qui correspond bien à l'ordre dans lequel les étapes sont décrites.

3 L'échange avec la source froide a lieu lors de l'étape (4)→(1). Si elle se fait dans un évaporateur sans échange de travail mais seulement un transfert thermique massique  $q_f$ , alors d'après le premier principe

$$h_1 - h_4 = 0 + q_f \quad \text{soit} \quad q_f = 90 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

4 Dans un cycle frigorifique, c'est le travail de compression  $w_{\text{compr}}$  au cours de l'étape (1)→(2) qui est coûteux. On peut supposer ici la source chaude gratuite puisque l'étape de refroidissement (2)→(3) se fait intégralement à des températures supérieures à la température ambiante. La compression étant adiabatique, d'après le premier principe,

$$h_2 - h_1 = w_{\text{compr}} + 0 \quad \text{soit} \quad w_{\text{compr}} = 40 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

Figure 1 – Diagramme des frigoristes du  $\text{CO}_2$ .

L'efficacité vaut donc

$$e = \frac{q_f}{w_{\text{compr}}} = 2,2.$$

Cette valeur d'efficacité est typique des machines frigorifiques. Dans le cas présent, elle pourrait probablement être améliorée en laissant l'étape (2)→(3) se poursuivre jusqu'à une température plus faible, typiquement la température ambiante.

### Exercice 5 : Cycle de Hirn d'une centrale thermique



- ▷ Cycle moteur ;
- ▷ Exploitation d'un diagramme entropique.

1 Le diagramme entropique est représenté figure 2.

- ▷ La transformation 1 → 2 est une adiabatique réversible, donc isentropique, donc une verticale dans le diagramme entropique ;
- ▷ La transformation 2 → 3 suit l'isobare  $P = 10$  bar ;
- ▷ L'énoncé ne précise rien sur l'étape 3 → 4, mais on peut considérer que la seconde turbine vérifie les mêmes hypothèses que la première : il s'agit donc d'une détente adiabatique réversible ;
- ▷ La transformation 4 → 5 est par hypothèse isobare, donc isotherme car elle concerne un fluide diphasé ;
- ▷ La compression 5 → 6 est une adiabatique réversible jusqu'à atteindre 100 bar, mais dans le diagramme entropique les isobares du domaine liquide sont toutes regroupées sur la courbe d'ébullition, si bien que le passage par la pompe n'est pas visible sur le diagramme ;
- ▷ La transformation 6 → 1 suit l'isobare  $P = 100$  bar en subissant successivement un échauffement de l'eau liquide le long de la courbe d'ébullition (en diagramme entropique, toutes les isobares du liquide pur collent à la courbe de saturation), puis un changement d'état, et enfin un échauffement de la vapeur sèche.

Le cycle est parcouru en sens horaire, ce qui est normal car on étudie une installation motrice.

2 On lit graphiquement  $T_2 = 210^\circ\text{C}$ . Dans l'état 4 l'eau est diphasée, et le titre en vapeur vaut  $x_4 = 0,93$ .

3 Le diagramme manque d'enthalpes pour permettre une lecture précise ... On peut approximativement considérer

$$h_1 = 3500 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \quad h_2 = 2850 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \quad h_3 = 3580 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

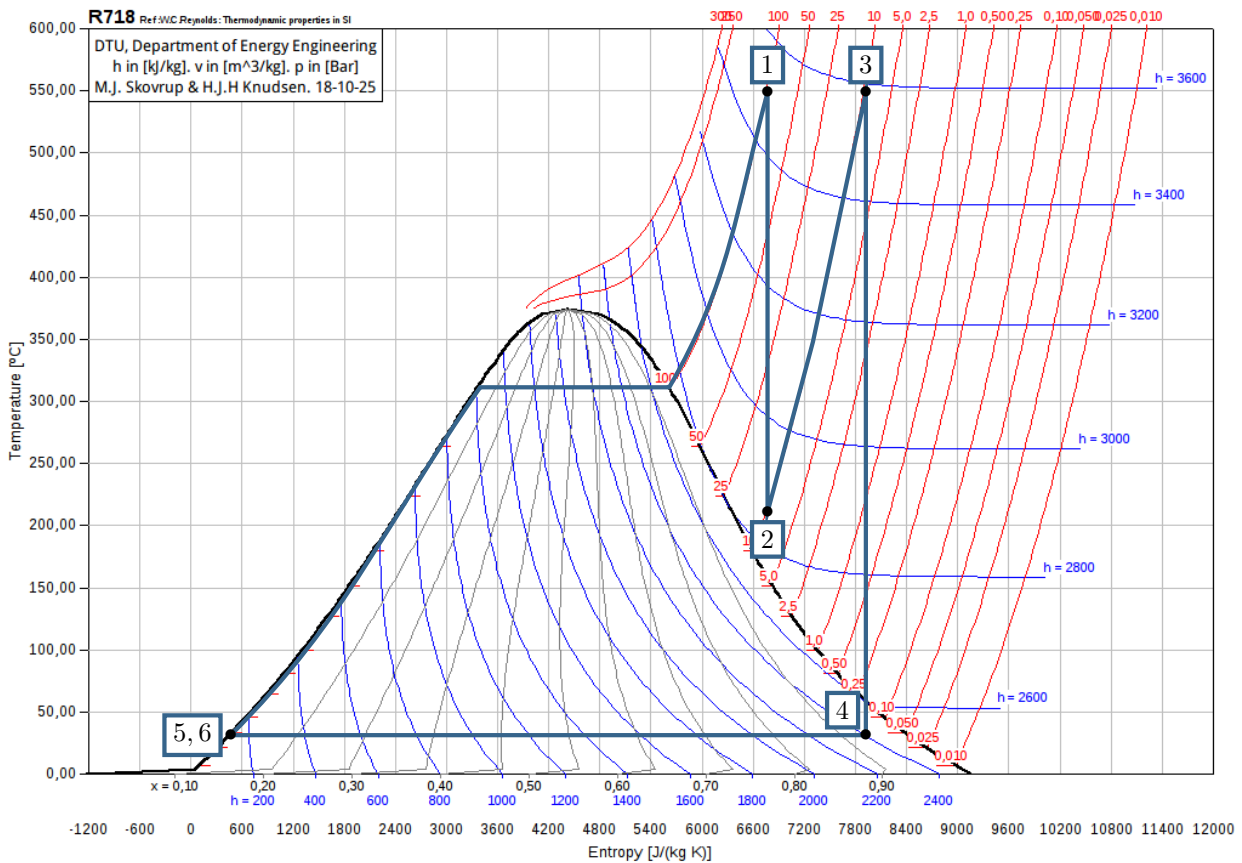


Figure 2 – Diagramme entropique complété.

$$h_4 = 2400 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \quad h_5 = h_6 = 100 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} .$$

D'après le premier principe, avoir  $h_5 = h_6$  signifie que le travail fourni par la pompe au liquide est négligeable devant les autres échanges énergétiques, ce qui s'interprète par le fait que comprimer un liquide incompressible est une opération relativement facile et donc peu coûteuse en énergie.

4 Le travail total disponible sur les turbines est l'opposé du travail indiqué reçu par le fluide. D'après le premier principe, appliqué à la turbine haute pression,

$$\Delta h + \underbrace{\Delta e_c + \Delta e_{pp}}_{\ll \Delta h} = w_{12} + \underbrace{q_{12}}_{=0 \text{ adiab}}$$

soit

$$w_{12} = h_2 - h_1 .$$

De même pour la turbine basse pression,

$$w_{34} = h_4 - h_3$$

et finalement

$$w_{\text{tot}} = -w_{12} - w_{34} \quad \text{donc} \quad w_{\text{tot}} = (h_1 - h_2) + (h_3 - h_4) = 1830 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} .$$

5 La puissance mécanique disponible sur la turbine s'écrit  $\mathcal{P}_{\text{méca}} = D_m w_{\text{tot}}$ , et comme  $\mathcal{P}_{\text{élec}} = 0,9 \mathcal{P}_{\text{méca}}$  on en déduit

$$D_m = \frac{\mathcal{P}_{\text{élec}}}{0,9 w} = 240 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1} .$$

6 Par application du premier principe au surchauffeur, qui ne contient aucune pièce mobile (c'est un échangeur),

$$\Delta h = \underbrace{w_{23}}_{=0} + q_{23} \quad \text{d'où} \quad q_{23} = h_3 - h_2 = 730 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} .$$

7 D'après le premier principe appliqué au générateur de vapeur, qui ne contient aucune pièce mobile (c'est également un échangeur),

$$\Delta h = \underbrace{w_{61}}_{=0} + q_{61} \quad \text{d'où} \quad q_{61} = h_1 - h_6 = 3400 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

En supposant que le transfert thermique dans le condenseur se fait avec le milieu extérieur et est donc gratuit, on en déduit le rendement de l'installation sous la forme

$$\eta = \frac{w_{\text{tot}}}{q_{23} + q_{61}} = 0,44.$$

Attention à ne pas oublier dans le rendement le transfert thermique fourni par le surchauffeur ! En pratique, ou bien le fluide repasse dans les fumées d'échappement de la chaudière, ou bien de la vapeur est déviée avant ou pendant son passage dans la turbine haute pression (on parle de soutirage de vapeur) et elle joue le rôle de fluide chaud dans le surchauffeur, le fluide froid étant la vapeur détendue dans la turbine. On parle alors de soutirage.

### Exercice 6 : Cycle de Rankine d'une centrale nucléaire



- ▷ Cycle moteur ;
- ▷ Exploitation d'une table thermodynamique ;
- ▷ Tracé qualitatif d'un diagramme des frigoristes.

1 Voir figure 3.

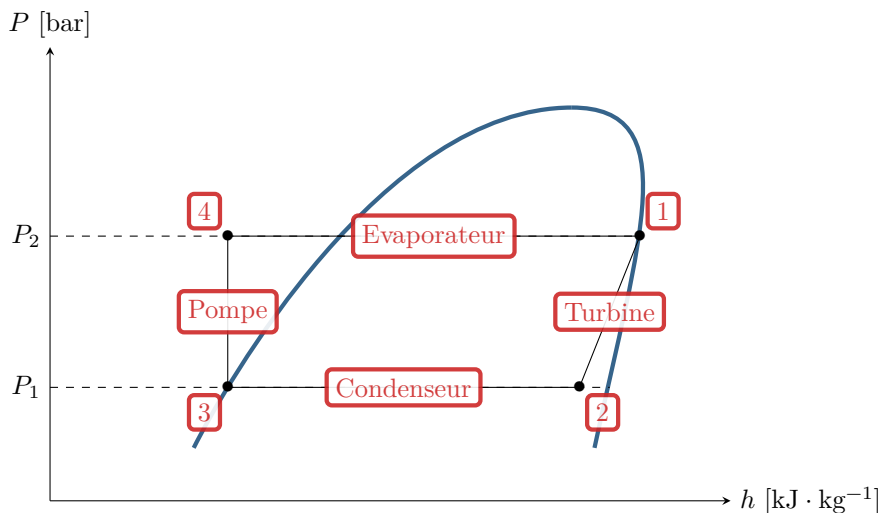


Figure 3 – Allure du cycle dans le diagramme des frigoristes.

L'étape 1-2 du cycle est assez peu crédible : normalement, les changements d'état doivent absolument être évités dans une turbine pour éviter une dégradation rapide des ailettes de la turbine sous l'impact des goutelettes d'eau formées (érosion).

2 Par additivité de l'entropie, dans un système diphasé,

$$S = S_V + S_L \quad \text{soit} \quad ms = m_V s_V + m_L s_L.$$

En introduisant le titre massique en vapeur  $x = m_V/m$  et la conservation de la masse  $m = m_V + m_L$ , il vient

$$ms = xm s_V + (1-x)m s_L \quad \text{d'où} \quad s = x s_V + (1-x)s_L.$$

3 La transformation 1 → 2 est adiabatique réversible, donc isentropique. Ainsi,  $s_2 = s_1$  et on déduit du théorème des moments

$$x_2 = \frac{s_2 - s_{L,2}}{s_{V,2} - s_{L,2}} = \frac{5,8162 - 0,4763}{8,3960 - 0,4763} \simeq 0,674.$$

Le théorème des moments appliqué à l'enthalpie massique donne de façon analogue

$$h_2 = x_2 h_{V,2} + (1 - x_2) h_{L,2} = x_2 \times 2561,6 + (1 - x_2) \times 137,8 \simeq 1772,2 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

La turbine étant calorifugée, le premier principe appliqué à la transformation 1 → 2 donne

$$w_{iT} = h_2 - h_1 = -1001,3 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

4 D'après l'identité thermodynamique en enthalpie,

$$dh = T ds + v dP.$$

Or la transformation 3 → 4 est adiabatique réversible, donc  $ds = 0$  tout au long de cette transformation. De plus, elle concerne un liquide incompressible, donc  $v = \text{cte}$ . Par intégration entre les états 3 et 4, on obtient

$$h_4 - h_3 = v(P_4 - P_3).$$

D'après le premier principe en supposant la pompe calorifugée, on en déduit

$$w_{iP} = v(P_4 - P_3) = 7 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

Cette valeur est négligeable devant le travail prélevé par la turbine.

5 Partant du mélange diphasique 2, l'état 3 est le liquide juste saturant correspondant. Ainsi,

$$T_3 = T_2 = 306 \text{ K} \quad \text{et} \quad x_3 = 0$$

Un condenseur ne comporte pas de pièces mobiles, donc

$$q_{eC} = h_3 - h_2 = 137,8 - 1772,2 = -1634,4 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

6 Un GV est un échangeur, sans pièce mobile, d'où

$$q_{eGV} = h_1 - h_4 = 2773,5 - 137,8 = 2635,7 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

7 En négligeant le travail fourni par la pompe, il vient


$$\eta = \frac{w_{iT}}{w_{iP} + q_{eGV}} \simeq \frac{w_{iT}}{q_{eGV}} = 0,38$$

Le rendement de Carnot associé à un cycle ayant les mêmes températures « chaude et froide » donnerait

$$\eta_{\text{Carnot}} = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 0,453.$$

## Exercice 7 : Cycle de Rankine d'une centrale à vapeur

oral banque PT | 💡 2 | ✂ 2

-  ▷ Cycle moteur ;  
 ▷ Exploitation d'une table thermodynamique ;  
 ▷ Tracé qualitatif d'un diagramme de Mollier.

1 La sortie du bouilleur correspond à un état de vapeur saturante : l'état 1 correspond donc au point D. La détente dans la turbine est adiabatique réversible, donc isentropique, donc verticale dans le diagramme de Mollier : l'état 2 correspond donc au point F. L'état 3 est un état de liquide saturant à même pression que 2, il s'agit donc du point A. Enfin, la compression est adiabatique réversible dans la pompe, donc verticale dans le diagramme de Mollier : l'état 4 correspond donc forcément au point B.



Le point C représente un état interne au bouilleur, le début de l'ébullition, alors que le point E correspondrait à l'état 2 si la détente était irréversible.

Dans la limite du gaz parfait et du liquide incompressible, la loi de Joule indique que  $dh = c_p dT$  : les isothermes sont donc confondues avec les isenthalpes, c'est-à-dire des horizontales sur le diagramme de Mollier. Par élimination, on en déduit que les isobares sont donc les courbes en pointillés les plus fins.

Comme dans tous les diagrammes, les isothermes et les isobares sont confondues dans le domaine diphasé, sous la courbe de saturation.

2 La détente dans la turbine étant isentropique,

$$s_2 = s_1 = s_L(p_1) \quad \text{donc} \quad s_2 = 5849 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

Avec le théorème des moments, on en déduit

$$x_2 = \frac{s_2 - s_L(p_2)}{s_V(p_2) - s_L(p_2)} = 0,68.$$

Enfin, on a

$$h_2 = x_2 h_V(p_2) + (1 - x_2) h_L(p_2) = 1782 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

3 Au cours de l'étape 3-4, l'eau est à l'état liquide et vérifie la loi de Joule

$$\Delta h = c \Delta T = 0$$

si l'on suppose que  $\Delta T = 0$ . Appliquons le premier principe industriel à la pompe, en supposant qu'il n'y a pas de variation d'énergie mécanique,

$$\underbrace{\Delta h}_{\text{isotherme}} = w_{34} + \underbrace{q_{34}}_{\text{adiab}} \quad \text{soit} \quad w_{34} = 0.$$

4 Calculons le travail cédé à la turbine, calorifugée, encore avec le premier principe en négligeant les variations d'énergie mécanique :

$$\Delta h = w_{12} + q_{12} \quad \text{d'où} \quad w_{12} = h_2 - h_1 = h_2 - h_V(p_1) = -995 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

Calculons maintenant le transfert thermique reçu au bouilleur, sans travail :

$$\Delta h = w_{41} + q_{41} \quad \text{d'où} \quad q_{41} = h_1 - h_4 = h_V(p_1) - h_L(p_2) = 2640 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

On en déduit enfin le rendement,

$$\eta = -\frac{w_{12}}{q_{41}} = 0,38$$

## Exercice 8 : Conditionnement d'air d'un avion



- ▷ Cycle récepteur ;
- ▷ Modèle du gaz parfait.

1 Le fluide frigorigène d'un climatiseur domestique suit un **cycle fermé** : après la détente, il passe au travers d'un deuxième échangeur au contact avec la source chaude avant d'être ramené en entrée du compresseur. Ainsi, il n'y a pas d'étape de mélange comme ici. En outre, la détente y est généralement réalisée dans un **détendeur** au lieu d'une turbine.

2 Voir figure 4. Il s'agit d'un « cycle » frigorifique, il n'est donc pas surprenant que le diagramme soit parcouru en sens trigonométrique.

3 Avec la loi de Laplace appliquée entre l'entrée et la sortie du compresseur,

$$P_1^{1-\gamma} T_1^\gamma = P_2^{1-\gamma} T_2^\gamma \quad \text{d'où} \quad P_2 = \left( \frac{T_1}{T_2} \right)^{\gamma/(1-\gamma)} P_1$$

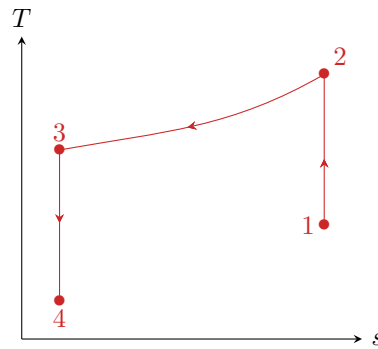


Figure 4 – Cycle de Joule inverse.

d'où on déduit

$$P_2 = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^k P_1 = 4,5 \text{ bar.}$$

4 De même, en appliquant la loi de Laplace entre l'entrée et la sortie de la turbine,

$$P_3^{1-\gamma} T_3^\gamma = P_4^{1-\gamma} T_4^\gamma \quad \text{d'où} \quad T_4 = \left(\frac{P_3}{P_4}\right)^{(1-\gamma)/\gamma} T_3 = \left(\frac{P_3}{P_4}\right)^{-1/k} T_3 = \left(\frac{P_4}{P_3}\right)^{1/k} T_3$$

d'où déduit finalement

$$T_4 = \left(\frac{P_0}{P_2}\right)^{1/k} T_3 = 269 \text{ K} = -3 \text{ °C.}$$

5 La vanne d'équilibrage est par hypothèse isenthalpique. D'après la loi de Joule,

$$h_5 - h_1 = c_p(T_5 - T_1) = 0 \quad \text{d'où} \quad T_5 = T_1.$$

6 Un mélangeur isobare est un système à deux entrées et une sortie, sans pièce mobile et globalement calorifugé. En négligeant les variations d'énergie cinétique et potentielle, le premier principe s'écrit

$$D_0 h_6 - (D h_4 + D' h_5) = \mathcal{P}_i + \mathcal{P}_{th} = 0,$$

et avec la conservation du débit  $D_0 = D + D'$  on en déduit

$$D(h_6 - h_4) + D'(h_6 - h_5) = 0$$

et avec la loi de Joule

$$D c_p (T_6 - T_4) + D' c_p (T_6 - T_1) = 0$$

On en déduit alors

$$D(T_6 - T_4) + (D_0 - D)(T_6 - T_1) = 0 \quad \text{soit} \quad (T_1 - T_4)D = (T_1 - T_6)D_0$$

et ainsi

$$D = \frac{T_1 - T_6}{T_1 - T_4} D_0 = 13 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{et} \quad D' = D_0 - D = \frac{T_6 - T_4}{T_1 - T_4} D_0 = 2 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}.$$

7 Appliquons le premier principe au compresseur, traversé par un débit  $D$  d'air,

$$D(\Delta h + \underbrace{\Delta e_c + \Delta e_{pp}}_{\ll \Delta h}) = \mathcal{P}_{\text{compr}} + \underbrace{\mathcal{P}_{th,12}}_{\text{adiab}}$$

et en appliquant la loi de Joule on obtient

$$\mathcal{P}_{\text{compr}} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Joule}}}{D c_p} (T_2 - T_1) = 26 \text{ kW.}$$

De même, et avec les mêmes hypothèses, la puissance indiquée algébriquement reçue par l'air dans la turbine vaut

$$\mathcal{P}_{\text{turb}} = D c_p (T_4 - T_3) = -46 \text{ kW}.$$

La puissance fournie par le moteur est la différence entre les deux, en faisant attention aux signes :

$$\mathcal{P}_M = \mathcal{P}_{\text{compr}} - |\mathcal{P}_{\text{turb}}| = c_p (T_2 - T_1 + T_4 - T_3) = -20 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

Ainsi, à en croire nos calculs, le moteur n'aurait pas de puissance mais on pourrait au contraire en récupérer ! Ce résultat pour le moins étonnant vient du fait que la turbine et le compresseur ont été supposés réversibles, ce qui est très idéalisé. En tenant compte d'un rendement isentropique inférieur de 1, on pourrait retrouver que le moteur doit en réalité apporter une puissance non nulle pour entraîner le compresseur, bien que la turbine apporte en pratique à elle seule la majorité de la puissance nécessaire.

8 Une fois soufflé dans la cabine, l'air conditionné se réchauffe de la température  $T_6$  à la température  $T_0$ . Pendant une durée  $dt$ , c'est une masse  $dm = D_0 dt$  qui est soufflée dans la cabine et se réchauffe de la sorte. En procédant à un bilan d'enthalpie pour cette masse  $dm$ ,

$$dH \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er P}}}{=} \mathcal{P}_{\text{cab}} dt = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Joule}}}{dm} c_p (T_0 - T_6) \quad \text{d'où} \quad \mathcal{P}_{\text{cab}} = D_0 c_p (T_0 - T_6) = 35 \text{ kW}.$$

## Autres installations

### Exercice 9 : Puits canadien

inspiré exemple officiel oral CCINP PSI | 💡 2 | ✂ 2 | ⚙

- ▷ Système ouvert mésoscopique ;
- ▷ Modèle du gaz parfait ;
- ▷ Analyse de résultats expérimentaux.

1 La constante  $\alpha$  s'exprime en  $\text{W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ . En dimensions fondamentales,

$$[\alpha] = M L^2 T^{-3} \times \Theta^{-1} \times L^{-1} \quad \text{soit} \quad [\alpha] = M L \Theta^{-1} T^{-3}.$$

2 Appliquons le premier principe à un tronçon de tuyau de longueur  $dx$ . On néglige les variations d'énergie cinétique et potentielle, et ce tuyau ne contient pas de pièce mobile, donc

$$D_m [h(x+dx) - h(x)] = d\Phi \quad \text{soit} \quad D_m \frac{dh}{dx} dx = \alpha dx [T_{\text{sol}} - T(x)]$$

En utilisant la loi de Joule et en simplifiant par  $dx$ , il vient

$$D_m c_p \frac{dT}{dx} + \alpha [T(x) - T_{\text{sol}}] = 0$$

et ainsi

$$\frac{dT}{dx} + \frac{\alpha}{D_m c_p} T(x) = \frac{\alpha}{D_m c_p} T_{\text{sol}} = 0$$

ce qui est bien la forme demandée avec  $\ell_0 = D_m c_p / \alpha$ .

3 Les solutions de cette équation s'écrivent

$$T(x) = T_{\text{sol}} + A e^{-x/\ell_0}.$$

À l'entrée du tuyau,

$$T(x=0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CL}}}{=} T_{\text{ext}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sol}}}{=} T_{\text{sol}} + A$$

d'où on conclut

$$T(x) = T_{\text{sol}} + (T_{\text{ext}} - T_{\text{sol}}) e^{-x/\ell_0}.$$

Au maximum, l'air au sein du tuyau atteint la température  $T_{\text{sol}}$ . On comprend ainsi qu'un puits canadien est **intéressant en hiver** (l'air qui entre est plus chaud que l'air extérieur, ce qui permet de gagner en chauffage) **et**

en été (l'air qui entre permet de rafraîchir l'intérieur, ce qui permet par exemple de se passer de climatisation). En revanche, il est **inutile voire gênant au printemps et en automne** (mieux vaut faire rentrer de l'air extérieur à 14 °C plutôt de l'air à 11 °C pour un gain en confort, voire en chauffage).

4 La question consiste à calculer la puissance reçue par l'air de la part du sol, qui est autant de puissance que le système de chauffage de la maison n'a pas à fournir. Cette puissance s'écrit

$$\Phi = \int_0^L d\Phi = \int_0^L \alpha(T_{\text{sol}} - T(x))dx$$

D'après la question précédente,

$$\Phi = \alpha(T_{\text{ext}} - T_{\text{sol}}) \int_0^L e^{-x/\ell_0} dx = \alpha(T_{\text{ext}} - T_{\text{sol}}) \left[ -\ell_0 e^{-x/\ell_0} \right]_0^L$$

ce qui donne finalement

$$\Phi = \alpha(T_{\text{ext}} - T_{\text{sol}}) \ell_0 \left( 1 - e^{-L/\ell_0} \right) = D_m c_P (T_{\text{ext}} - T_{\text{sol}}) \left( 1 - e^{-L/\ell_0} \right).$$

Le résultat peut également s'obtenir en appliquant le premier principe industriel directement entre l'entrée ( $x = 0$ ) et la sortie ( $x = L$ ) de la conduite :

$$D_m(h_s - h_e) = D_m c_P [T(x=L) - T(x=0)] = \Phi + \cancel{P_m}$$

ce qui donne

$$\Phi = D_m c_P \left[ T_{\text{sol}} + (T_{\text{ext}} - T_{\text{sol}}) e^{-L/\ell_0} - T_{\text{ext}} \right]$$

et on retrouve exactement la même expression après factorisation.

5 Au bout d'une longueur  $L$  suffisamment élevée,

$$\Phi \simeq D_m c_P (T_{\text{ext}} - T_{\text{sol}}).$$

La température extérieure étant uniforme,  $\Phi$  ne dépend plus que de  $D_m$ , qui est directement proportionnel au débit volumique  $Q$  car l'écoulement d'air est incompressible.

La longueur caractéristique  $\ell_0$  peut par exemple se déterminer graphiquement en raisonnant sur l'intersection de la tangente à l'origine et de l'asymptote. En ordre de grandeur, on trouve  $\ell_0 \simeq 20$  m.

Le réseau de courbe diffère par la longueur caractéristique d'augmentation de  $\Phi$ , c'est-à-dire  $\ell_0$ . Le diamètre intervient dans le coefficient  $\alpha$  : l'échange est de type conducto-convectif, directement proportionnel à la surface d'échange, elle-même proportionnelle au carré du diamètre.

## Exercice 10 : Échangeur à contre-courant

💡 3 | ✂ 2



- ▷ Système ouvert mésoscopique ;
- ▷ Échange conducto-convectif.

1 La température la plus froide est forcément celle du fluide froid, et réciproquement pour la plus chaude. On en déduit que le fluide froid est représenté en bas et le chaud en haut. Dans l'échangeur, le fluide froid se réchauffe et le chaud se refroidit, d'où on déduit que le fluide froid s'écoule dans le sens des  $x$  décroissants et le chaud dans le sens des  $x$  croissants. Ces résultats sont récapitulés figure 5.

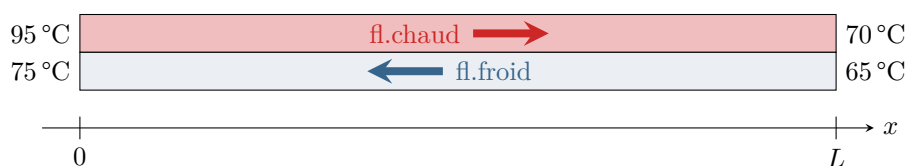


Figure 5 – Schéma des écoulements dans l'échangeur.

2 Pour que l'échange thermique ait lieu, il faut avoir  $T_C(x) > T_F(x)$ . Ainsi, en supposant les températures du fluide chaud inchangées, un échangeur à co-courant ne permettrait pas au fluide froid de dépasser les 70 °C, ce

qui est possible ici car les gradients thermiques sont dans le même sens dans les deux fluides. Ainsi, l'échangeur à contre-courant permet de **fournir davantage d'énergie au fluide froid** qu'un échangeur à co-courant.

**3** Appliquons le premier principe industriel au fluide froid, qui reçoit la puissance thermique totale  $\Phi$ . Les variations d'énergie mécanique sont nulles, et il n'y a pas de pièce mobile donc pas de travail échangé. Ainsi,

$$D_F(h_F(x=0) - h_F(x=L)) = \Phi \quad \text{d'où} \quad \Phi = D_F c (T_F(x=0) - T_F(x=L))$$

**4** Appliquons le premier principe industriel à une tranche infinitésimale d'échangeur comprise entre  $x$  et  $x + dx$ , et de largeur  $a$ . La surface de contact entre les deux fluides vaut donc  $a dx$ . Le fluide chaud s'écoule dans le sens des  $x$  croissants, cède la puissance  $\varphi(x) a dx$ , et le premier principe s'écrit donc

$$\begin{aligned} D_C (h_C(x + dx) - h_C(x)) &\stackrel{\uparrow \text{1er P}}{=} -\varphi(x) a dx = -h \Delta T(x) a dx \\ &\stackrel{\uparrow \text{Joule}}{=} D_C c (T_C(x + dx) - T_C(x)) \stackrel{\uparrow \text{DL}}{=} c D_C \frac{dT_C}{dx} dx \end{aligned}$$

d'où on déduit l'équation voulue

$$\boxed{\frac{dT_C}{dx} = -\frac{ha}{c D_C} \Delta T(x).}$$

On procède de même pour le fluide froid, qui cette fois s'écoule dans le sens des  $x$  décroissants et reçoit la puissance  $\varphi(x) a dx$ , ce qui conduit à

$$\begin{aligned} D_F (h_F(x + dx) - h_F(x)) &\stackrel{\uparrow \text{1er P}}{=} +\varphi(x) a dx = +h \Delta T(x) a dx \\ &\stackrel{\uparrow \text{Joule}}{=} D_F c (T_F(x + dx) - T_F(x)) \stackrel{\uparrow \text{DL}}{=} c D_F \frac{dT_F}{dx} dx \end{aligned}$$

d'où on déduit l'équation voulue

$$\boxed{\frac{dT_F}{dx} = -\frac{ha}{c D_F} \Delta T(x).}$$

*La variation d'enthalpie dans le premier principe industriel s'écrit sous la forme  $h_{\text{sortie}} - h_{\text{entrée}}$ , ce qui permet de retrouver l'endroit auquel écrire  $x$  et  $x + dx$  en fonction du sens d'écoulement. En revanche, les signes qui apparaissent devant le flux viennent de la convention d'algébrisation des échanges : il est cédé par le fluide chaud, d'où le signe  $\ominus$ , et reçu par le fluide froid, d'où le signe  $\oplus$ .*

**5** Par soustraction des deux équations précédentes, il vient

$$\frac{dT_C}{dx} - \frac{dT_F}{dx} = \frac{d\Delta T}{dx} = -\frac{ha}{c} \left( \frac{1}{D_C} - \frac{1}{D_F} \right) \Delta T$$

ce l'on réécrit pour alléger les écritures sous la forme

$$\frac{d\Delta T}{dx} + \alpha \Delta T = 0 \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{ha}{c} \left( \frac{1}{D_C} - \frac{1}{D_F} \right).$$

Cette équation se résout directement en

$$\boxed{\Delta T(x) = \Delta T_0 e^{-\alpha x}.} \quad \text{avec} \quad \Delta T_0 = T_C(x=0) - T_F(x=0).$$

*Remarquons que  $\alpha$  peut s'annuler si les deux débits sont égaux, ce qui veut dire que la différence de température entre les deux fluides est indépendante de  $x$  ... mais attention à ne pas faire de confusion, cela n'est pas contradictoire avec le fait que le fluide froid se réchauffe. Avec les valeurs données dans l'énoncé, on constate que  $\Delta T$  diminue lorsque  $x$  augmente, donc sa dérivée est négative, donc  $\alpha > 0$  ce qui veut dire que  $D_F > D_C$ .*

**6** On constate avec les valeurs données que l'on a

$$\Delta T(x=L) = \frac{1}{4} \Delta T_0 \quad \text{donc} \quad \Delta T_0 e^{-\alpha L} = \frac{1}{4} \Delta T_0 \quad \text{soit} \quad \alpha L = \ln 4.$$

En reprenant l'expression de  $\alpha$ , on en déduit

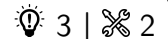
$$\frac{haL}{c} \left( \frac{1}{D_C} - \frac{1}{D_F} \right) = \ln 4 \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{D_C} = \frac{1}{D_F} + \frac{c}{haL} \ln 4$$

et ainsi

$$D_C = \frac{D_F}{1 + \frac{c}{haL} D_F \ln 4}.$$

On vérifie bien que  $D_C < D_F$  comme prévu par l'analyse précédente. On peut également remarquer qu'il n'y a pas de proportionnalité entre les débits, contrairement au cas d'un échangeur à co-courant.

## Exercice 11 : Chauffe-eau solaire



- ▷ Autre cycle thermodynamique ;
- ▷ Transitoire thermique ;
- ▷ Modèle du liquide indilatable et incompressible.

Dans tout l'exercice, on néglige les variations d'énergie cinétique et potentielle de l'eau devant ses variations d'enthalpie.

**1** Appliquons le premier principe entre l'entrée et la sortie du panneau solaire. Celui-ci ne contient pas de pièce mobile, donc

$$D(h_1 - h_4) = \mathcal{P}_{\text{th}} \quad \text{d'où} \quad \mathcal{P}_{\text{th}} = Dc(T_1 - T_4) = 2,3 \text{ kW},$$

d'après la loi de Joule. La puissance totale reçue par les panneaux solaires est de  $6 \times 600 = 3,6 \text{ kW}$ , ce qui donne un rendement de 64 %.

**2** La chute de température observée entre les points 1 et 2 puis entre les points 3 et 4 est directement imputable à ces pertes. Par application du premier principe entre ces points (pompe exclue), où le fluide ne reçoit aucun travail, on en déduit

$$\mathcal{P}_{\text{fuite}} = |Dc(T_2 - T_1) + Dc(T_4 - T_3)| = 780 \text{ W},$$

ce qui représente presque un tiers de la puissance thermique captée par le fluide ! Pour les limiter, il faut entourer les conduites par un isolant thermique.

**3** Appliquons le premier principe au fluide caloporteur entre l'entrée et la sortie du ballon (système ouvert), en notant  $\mathcal{P}_0$  la puissance thermique cédée par le fluide au ballon :

$$D(h_3 - h_2) = -\mathcal{P}_0 \quad \text{d'où} \quad \mathcal{P}_0 = Dc(T_2 - T(t))$$

car lors de la phase de chauffe  $T_3 = T(t)$ .

Procédons maintenant à un bilan d'enthalpie pour l'eau contenue dans le ballon (système **fermé**) au cours d'une transformation infinitésimale de durée  $dt$ . Les pertes thermiques étant négligées, elle ne reçoit que la puissance thermique  $\mathcal{P}_0$ . Ainsi,

$$dH = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er P}}}{\mathcal{P}_0} dt = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Joule}}}{\rho' V c'} dT$$

On en déduit

$$\rho' V c' dT = Dc(T_2 - T(t)) dt \quad \text{soit} \quad \rho' V c' \frac{dT}{dt} + DcT = DcT_2$$

ce qui s'écrit sous la forme

$$\frac{dT}{dt} + \frac{1}{\tau} T = \frac{1}{\tau} T_2 \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{\rho' V c'}{Dc} = 4,3 \cdot 10^3 \text{ s} \simeq 1 \text{ h} 12.$$

**4** La température dans le ballon évolue donc au cours du temps selon

$$T(t) = T_2 + A e^{-t/\tau} \quad \text{avec} \quad A = \text{cte}.$$

À l'instant initial,

$$T(t=0) = \underset{\uparrow \text{CI}}{T_i} = \underset{\uparrow \text{expr}}{T_2 + A} \quad \text{donc} \quad A = T_i - T_2$$

et ainsi

$$T(t) = T_2 + (T_i - T_2) e^{-t/\tau}.$$

Cherchons maintenant l'instant  $t_0$  auquel la température du ballon atteint sa valeur de consigne,

$$T(t=t_0) = T_b \quad \text{soit} \quad T_2 + (T_i - T_2) e^{-t_0/\tau} = T_b \quad \text{donc} \quad e^{-t_0/\tau} = \frac{T_b - T_2}{T_i - T_2}$$

d'où on déduit

$$t_0 = \tau \ln \frac{T_i - T_2}{T_b - T_2} = 4,6 \cdot 10^3 \text{ s} \simeq 1\text{h}18.$$

**5** La question est plus subtile! Désormais, il faut considérer le ballon comme un système ouvert. Pour la valeur maximale du débit d'eau chaude  $D'_{\max}$ , la pompe fonctionne en continu avec le débit  $D$ . On applique donc le premier principe entre l'entrée et la sortie du ballon, sachant que l'eau y reçoit en continu la puissance  $\mathcal{P}_0 = Dc(T_2 - T_3)$  en régime permanent. Ainsi,

$$D'_{\max} c' (T_{\text{ch}} - T_{\text{fr}}) = Dc(T_2 - T_3) \quad \text{d'où} \quad D'_{\max} = \frac{Dc(T_2 - T_3)}{c'(T_{\text{ch}} - T_{\text{fr}})} = 26 \text{ kg} \cdot \text{h}^{-1},$$

ce qui correspond à un débit de 440 litres par minute, largement suffisant pour prendre sa douche tranquillement.

*Le système constitué du ballon et de la conduite de fluide caloporteur se comporte en fait en fait en échangeur double flux. L'application du premier principe à ce système donne directement le résultat ci-dessus.*

**6** Un chauffe-eau solaire est évidemment très dépendant de la météo! Il est inefficace les jours gris et pluvieux, d'où la nécessité d'une résistance chauffante, utile également en cas de grosse consommation. Il peut également conduire à une surchauffe les jours trop ensoleillés lorsque l'eau chaude n'est pas suffisamment utilisée, d'où le circuit de refroidissement. Les soupapes de sécurité permettent d'éviter les surpressions dues à la dilatation thermique de l'eau glycolée, voire à sa vaporisation en cas de surchauffe excessive.