



Conduction thermique

BLAISE PASCAL
PT 2023-2024

- **Modes de transfert thermique** : conduction + convection + rayonnement.
↪ en pratique, la convection l'emporte largement dès qu'elle est possible.

I - Transferts thermiques à l'échelle mésoscopique

- **Équilibre thermodynamique local** : éq thermo atteint à l'échelle mésoscopique mais pas à l'échelle macroscopique.
↪ les grandeurs intensives sont des champs qui dépendent de l'espace (et du temps).
- **Flux thermique échangé au travers d'une surface** = puissance thermique (ϕ est algébrique)

$$\mathcal{P}_{th} = \phi = \iint_S \vec{j}_{th} \cdot \vec{dS} \quad \vec{j}_{th} = \begin{cases} \text{vecteur densité de flux thermique} \\ \text{vecteur densité de courant thermique} \end{cases}$$

- **Loi de Fourier** : λ = conductivité thermique en $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$.

$$\boxed{\vec{j}_{th} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T} \quad (\text{conduction uniquement})$$

- **À une interface** : il y a toujours continuité du flux thermique, mais la température n'est continue que dans le cas du contact thermique parfait.
- **Loi de Newton** : à une interface entre un solide et un fluide,

$$\mathcal{P}_{flu \rightarrow sol} = \phi_{flu \rightarrow sol} = hS(T_{flu} - T_{sol}) \quad \iff \quad \vec{j} = h(T_{flu} - T_{sol}) \vec{n}_{flu \rightarrow sol}.$$

h = coefficient conducto-convectif (phénoménologique).

II - Régime stationnaire : résistances thermiques

- **Conservation du flux** : en régime stationnaire et sans source thermique, le flux thermique entrant est égal au flux thermique sortant de n'importe quel système (démonstration par un bilan enthalpique).

↪ en pratique : même flux au travers de toutes les surfaces « analogues » adaptées à la géométrie du système (p.ex. plans en cartésiennes, cylindre en cylindriques ... et sphères en sphériques!)

- **Profil de température en régime stationnaire** :

- 1 Exprimer le flux thermique ϕ au travers d'une surface quelconque et le relier à la dérivée de la température grâce à la loi de Fourier ;
- 2 Intégrer la relation obtenue, souvent par séparation des variables ;
- 3 Remplacer la constante impliquant ϕ et λ à l'aide d'une condition aux limites.

- **Analogie entre conduction thermique et conduction électrique** :

$$\begin{aligned} \vec{j}_{elec} = -\gamma \overrightarrow{\text{grad}} V & \iff \vec{j}_{th} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T \\ U = \Delta V = RI & \iff \Delta T = R_{th} \phi \end{aligned}$$

- **Méthode de calcul d'une résistance thermique** :

- 1 Exprimer le flux thermique ϕ et le relier à la dérivée de la température grâce à la loi de Fourier ;
- 2 Intégrer la relation obtenue entre les deux extrémités du milieu, souvent par séparation des variables ;
- 3 Conclure en vérifiant la convention récepteur.

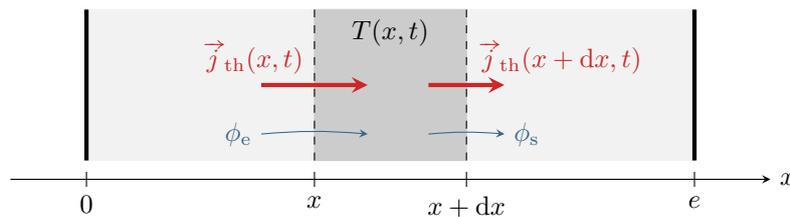
↪ Paroi plane (épaisseur e et section S) : $R_{th} = \frac{e}{\lambda S}$ (dépend de la géométrie et pas seulement du matériau)

- **Associations de résistances thermiques** :

- ▷ en série : matériaux superposés (p.ex. laine de verre sous un toit) ;
- ▷ en parallèle : matériaux juxtaposés, c'est-à-dire installés côte à côte (p.ex. fenêtre dans un mur).

III - Régime variable : diffusion thermique

- **Équation de diffusion de la chaleur** : raisonnement sur une tranche mésoscopique de cylindre



Bilan d'enthalpie :

$$\begin{aligned} dH &= \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er P}}}{\phi_e} dt - \phi_s dt = j_x(x,t) S dt - j_x(x+dx,t) S dt = -\frac{\partial j_x}{\partial x} dx S dt \\ &= \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Joule masse}}}{\rho S dx c} [T(x,t+dt) - T(x,t)] = \rho S dx c \frac{\partial T}{\partial t} dt \end{aligned}$$

Loi de Fourier et conclusion :

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{avec} \quad D = \frac{\lambda}{\rho c} \quad \text{diffusivité en } m^2 \cdot s^{-1}}$$

Généralisation en 3d :

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = D \Delta T} \quad (\Delta = \text{opérateur laplacien scalaire.})$$

- **Diffusivité vs. résistance thermique** :

- ▷ La résistance thermique quantifie la facilité des transferts thermiques au travers d'un système, et tient compte non seulement du matériau mais aussi de la géométrie.
- ▷ La diffusivité thermique compare les propriétés de conduction et de stockage thermique. Elle est intrinsèque à un matériau, et indépendante d'un système en particulier.

- **Résolution numérique à 1d** : méthode des différences finies adaptée du schéma d'Euler explicite.

- ▷ *Expression du laplacien* : se retrouve par développement limité puis somme de $T(x_j \pm \Delta x, t_i)$.
- ▷ *Évolution temporelle* : application du schéma d'Euler explicite à la dérivée temporelle pour obtenir la relation de récurrence, qui fait intervenir le laplacien.
- ▷ *Implémentation en Python* : utiliser une liste de listes dont le premier indice fait référence au temps, c'est-à-dire $T[i][j]$ est un flottant qui donne $T(x_j, t_i)$, $T[i]$ est une liste qui donne la température à l'instant t_i pour toutes les valeurs de x .

- **Temps de diffusion** : durée τ du régime transitoire.

- ▷ *Paramètres* : τ dépend de la diffusivité D et de la taille caractéristique ℓ du matériau (+ on pourrait aussi imaginer inclure l'écart de température ΔT ... qui en fait n'intervient pas).
- ▷ *Recherche par analyse dimensionnelle* : on cherche $\tau = D^\alpha \ell^\beta$ avec α et β deux exposants tels que la relation soit homogène, ce qui conduit à $\tau = \ell^2 / D$.

- **Longueur de diffusion** : distance ℓ sur laquelle avance le front de diffusion au bout d'une durée Δt .

- ▷ *Paramètres* : ℓ dépend de la diffusivité D et de la durée Δt (+ on pourrait aussi imaginer inclure l'écart de température ΔT ... qui en fait n'intervient pas).
- ▷ *Recherche par analyse dimensionnelle* : on cherche $\ell = D^{\alpha'} \Delta t^{\beta'}$ avec α' et β' deux exposants tels que la relation soit homogène, ce qui conduit à $\ell = \sqrt{D \Delta t}$.

🚫🚫🚫 **Attention !** Ne pas confondre phénomène diffusif et phénomène ondulatoire !

$$\triangleright \text{Équation de d'Alembert : } \vec{\Delta} \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

↪ dérivée temporelle seconde au lieu de dérivée première dans l'équation de diffusion.

- ▷ Avancée d'une onde pendant une durée Δt : $\ell = c \Delta t$

↪ une onde se propage à la célérité c , qui n'a pas de sens pour un phénomène diffusif : il faut plus longtemps pour diffuser sur « le deuxième centimètre » que sur « le premier ».