



BLAISE PASCAL
PT 2024-2025

TD 9 – Mécanique des fluides

Correction

Statique des fluides

Analyse de corrigés

Exercice 1 : Champ de pression dans l'atmosphère

💡 1 | ✂ 2 | Ⓜ



- ▷ Relation de la statique des fluides dans un gaz ;
- ▷ Intégration par séparation de variables.

Correction des questions d'analyse du corrigé

Question d'analyse 1 - L'axe z est dirigé vers le haut.

Question d'analyse 2 - Avec l'équation d'état des gaz parfaits divisée par la masse,

$$P \frac{V}{m} = \frac{n}{m} RT \quad \text{d'où} \quad \frac{P}{\rho} = \frac{RT}{M}.$$

Question d'analyse 3 - La température dépendant de z , l'équation différentielle n'est pas à coefficients constants, ce qui rend impossible toute identification à une forme canonique connue. Autre façon de voir les choses, la longueur caractéristique δ dépendrait de z ce qui n'a aucun sens : imagineriez-vous un temps caractéristique τ dépendre lui-même du temps ?

Question d'analyse 4 - La réécriture permet de faire apparaître dans l'intégrale une forme en u'/u , et donc d'identifier facilement la primitive.

Question d'analyse 5 - Il vient du calcul de primitive :

$$\int_0^z \frac{-k dz}{T_0 - kz} = [\ln(T_0 - kz)]_0^z = \ln(T_0 - kz) - \ln T_0 = \ln \frac{T_0 - kz}{T_0}.$$

Question d'analyse 6 - Propriété basique du logarithme : $\alpha \ln x = \ln x^\alpha$!

Exercice 2 : Force de pression sur un tube à essais

oral banque PT | 💡 2 | ✂ 2 | Ⓜ



- ▷ Relation de l'hydrostatique ;
- ▷ Résultante des forces de pression.

Relation de l'hydrostatique

Exercice 3 : Baromètre de Torricelli

💡 1 | ✂ 1



- ▷ Relation de l'hydrostatique.

1 D'après la relation de l'hydrostatique,

$$P_B - P_A = \mu g h \quad \text{soit} \quad h = \frac{P_{\text{atm}}}{\mu g} = 0,76 \text{ m}.$$

- 2 Le volume de mercure dans le tube se conserve. Si la pression atmosphérique est plus élevée, le point B va descendre et le point A va monter d'autant. Inversement, si elle est plus faible alors le point B remonte et le point A descend d'autant. Finalement, il suffit de mesurer la hauteur h entre les deux surfaces du mercure pour en déduire la pression atmosphérique.
- 3 Cela n'a rien d'étonnant ! Le facteur de conversion est simplement la hauteur h lue en mm.

Exercice 4 : Deux liquides dans un tube en U

💡 2 | ✂ 1



▷ Relation de l'hydrostatique.

Il y a trois inconnues, les hauteurs z_e (surface libre côté eau), z_h (côté huile) et z_i (interface), donc trois relations à trouver.

- (1) Le volume d'huile V est connu donc la hauteur d'huile h aussi. Ainsi, $h = z_h - z_i = V/S = 3$ cm.
- (2) La relation d'hydrostatique de chaque côté et la continuité de la pression à l'interface donnent en $z = z_i$: $P_{\text{atm}} + \rho_h g (z_h - z_i) = P_{\text{atm}} + \rho_e g (z_e - z_i)$ d'où $z_e - z_i = \frac{\rho_h}{\rho_e} (z_h - z_i)$.
- (3) La conservation du volume d'eau indique que si le niveau descend de x d'un côté il monte d'autant de l'autre : $z_i = z_0 - x$ et $z_e = z_0 + x$. Attention, c'est bien z_i qui intervient.

On utilise ensuite l'équation d'hydrostatique en remplaçant systématiquement z_e , z_i et z_h par ce qui convient en termes de z_0 , h et x . Cela conduit à

$$x = \frac{h}{2} \frac{\rho_h}{\rho_e} = 1,4 \text{ cm}$$

et donc à

$$z_e = 11,4 \text{ cm} \quad z_i = 8,6 \text{ cm} \quad z_h = 11,6 \text{ cm}$$

Exercice 5 : Ressort et tube en U

oral banque PT | 💡 2 | ✂ 2



- ▷ Lien entre mécanique des fluides et des solides ;
 ▷ Relation de l'hydrostatique ;
 ▷ Force exercée par un ressort.

Introduisons un axe z vertical ascendant dont l'origine est située à la position initiale du bouchon, représentée en pointillés sur la figure de l'énoncé.

- 1 Dans la situation initiale, les forces de pression exercées sur et sous le bouchon se compensent. Le bouchon n'est donc soumis qu'à son poids et à la force de rappel du ressort, qui se compensent à l'équilibre,

$$m\vec{g} - k \Delta\ell_0 (-\vec{u}_z) = \vec{0} \quad \text{d'où} \quad \Delta\ell_0 = \frac{mg}{k}.$$

La force de rappel d'un ressort s'écrit de façon tout à fait générale

$$\vec{F}_r = -k \Delta\ell \vec{u}_{\text{sortant}}$$

où \vec{u}_{sortant} est le vecteur sortant du ressort, c'est-à-dire dirigé du ressort vers le bouchon au niveau du point d'attache : ici, le bouchon est sous le ressort et l'axe z orienté vers le haut, donc $\vec{u}_{\text{sortant}} = -\vec{u}_z$.

Cette expression est à connaître et à utiliser telle quelle, avant de d'exprimer $\Delta\ell$ et \vec{u}_{sortant} en fonction du système de coordonnées choisi et de l'orientation des axes. Surtout, **surtout**, **SURTOUT** on n'essaie pas d'avoir l'air intelligent en devinant les signes à partir d'un schéma : le sens de la force change si le ressort est comprimé ou étiré, et il est quasiment impossible de s'en tirer sans erreur.

- 2 Les forces de pression ne se compensent plus : le bouchon subit sur la face supérieure une force $P_{\text{atm}} S(-\vec{u}_z)$ orientée vers le bas, et sur la face inférieure une force $PS\vec{u}_z$ orientée vers le haut. Par ailleurs, l'allongement du ressort est plus faible que précédemment et vaut désormais $\Delta\ell = \Delta\ell_0 - \Delta z$.

On ne connaît donc pas le signe de l'allongement, si bien qu'on ne connaît pas le sens de la force exercée par le ressort ... mais heureusement cela ne nous empêche pas de connaître parfaitement son

| expression !

L'équation d'équilibre devient donc en projetant

$$-mg + k\Delta\ell - P_{\text{atm}}S + PS = 0.$$

3 La seule inconnue dans l'équation précédente est la pression P , que l'on va relier à ρ par la loi de l'hydrostatique. Pour ce faire, le plus simple est d'exprimer la pression P_0 en $z = 0$ (c'est-à-dire au niveau de la ligne pointillée) en raisonnant sur les deux branches,

$$P_0 = P_{\text{atm}} + \rho gh = P + \rho g \Delta z,$$

ce qui conduit à

$$P = P_{\text{atm}} + \rho g(h - \Delta z).$$

De la question précédente on déduit alors

$$-mg + k(\Delta\ell_0 - \Delta z) - P_{\text{atm}}S + (P_{\text{atm}} + \rho g(h - \Delta z))S = 0$$

soit

$$-mg + k(\Delta\ell_0 - \Delta z) + \rho g(h - \Delta z)S = 0$$

et ainsi

$$\rho g(h - \Delta z)S = mg - k(\Delta\ell_0 - \Delta z).$$

En remplaçant $\Delta\ell_0$ par son expression, il vient

$$\rho g(h - \Delta z)S = k \Delta z$$

et finalement

$$\rho = \frac{k \Delta z}{g(h - \Delta z)S}.$$

4 La section vaut $S = \pi d^2/4$. Numériquement,


$$\rho = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3},$$

c'est donc de l'eau qui a été ajoutée dans le tube.

Forces pressantes

Exercice 6 : Tunnel de l'aquarium Nausicaa



 ▷ Résultante des forces de pression ;
▷ Intégration en coordonnées cylindriques.

1 L'eau étant un fluide incompressible, la relation de la statique des fluides s'intègre directement :

$$\frac{dP}{dy} = -\rho g \quad \text{soit} \quad \int_{P_0}^{P(y)} dP = -\rho g \int_H^y dy$$

ce qui donne

$$P(y) = P_0 - \rho g(y - H).$$

2 Voir figure 1. Le plan $\Pi_s = (O, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est un plan de symétrie du système, de même que le plan passant par le milieu du tunnel et de vecteurs directeurs (\vec{e}_x, \vec{e}_y) . Ainsi, la résultante des forces pressantes doit appartenir à ces deux plans simultanément, elle est donc nécessairement portée par $\pm \vec{e}_y$. La pression dans l'eau étant supérieure à celle dans l'air, on en déduit que la résultante des forces qu'il subit est portée par $-\vec{e}_y$.

Pour bien comprendre la symétrie, on peut tracer les deux forces subies par le tunnel en deux points M et M' symétriques par rapport au plan Π_s , voir figure 1. Leurs composantes se compensent selon \vec{e}_x mais s'ajoutent selon $-\vec{e}_y$. Ce raisonnement pouvant être mené pour n'importe quel point de la surface du tunnel, la force résultante est donc portée par $-\vec{e}_y$.

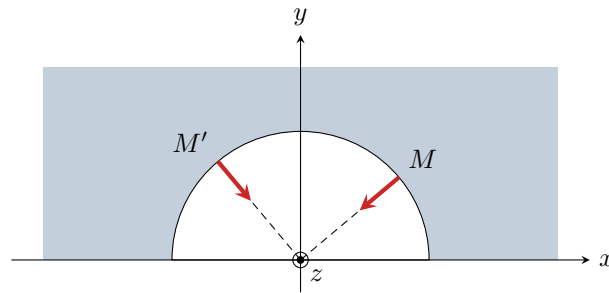


Figure 1 – Forces pressantes en deux points symétriques.

3 Exprimons $P(M)$ en fonction de l'angle θ : on constate géométriquement que

$$y = a \cos \theta \quad \text{donc} \quad P(M) = P_0 - \rho g(a \cos \theta - H).$$

Considérons un élément de surface du tunnel, qui est donc de normale \vec{e}_r et tel que $r = a$. Ainsi,

$$d\vec{S} = a d\theta \times dz \times \vec{e}_r.$$

En prenant en compte la force exercée par l'air sur la vitre,

$$d\vec{F}_p = d\vec{F}_{p,\text{air}} + d\vec{F}_{p,\text{eau}} = P_0 d\vec{S} - (P_0 - \rho g(a \cos \theta - H)) d\vec{S}$$

soit

$$d\vec{F}_p = \rho g(a \cos \theta - H) a d\theta dz \vec{e}_r$$

En projetant sur \vec{e}_y , comme $\vec{e}_r \cdot \vec{e}_y = \cos \theta$, il vient

$$\begin{aligned} dF_{p,y} &= \rho g(a \cos \theta - H) a \cos \theta d\theta dz \\ &= (-\rho g H a \cos \theta + \rho g a^2 \cos^2 \theta) d\theta dz \\ &= \left(-\rho g H a \cos \theta + \rho g a^2 \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \right) d\theta dz \end{aligned}$$

$$dF_{p,y} = \left(\frac{1}{2} \rho g a^2 - \rho g H a \cos \theta + \frac{1}{2} \rho g a^2 \cos(2\theta) \right) d\theta dz.$$

4 Il reste alors à procéder au calcul de l'intégrale. L'intégrale sur dz donne directement L , et il reste l'intégrale sur $d\theta$, que l'on décompose

$$\begin{aligned} F_{p,y} &= \frac{1}{2} \rho g a^2 L \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta - \rho g H a L \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta + \frac{1}{2} \rho g a^2 L \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(2\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \rho g a^2 L \times \pi - \rho g H a L [\sin \theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{1}{2} \rho g a^2 L \left[\frac{1}{2} \sin(2\theta) \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= \frac{\pi}{2} \rho g a^2 L - 2 \rho g H a L + 0 \end{aligned}$$

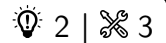
$$F_{p,y} = \rho g a L \left(\frac{\pi a}{2} - 2H \right)$$


On vérifie que $F_{p,y} < 0$, conformément à ce que prévoyait l'analyse qualitative. Numériquement, on trouve

$$F_p = 3 \cdot 10^6 \text{ N}$$

soit une masse équivalente de 300 tonnes.

Exercice 7 : Entonnoir retourné



- 
 ▷ Résultante des forces de pression.
 ▷ Intégration en coordonnées sphériques.

1 L'entonnoir est soumis à quatre forces : son poids, la force de réaction de la table (qui s'annule à la limite du soulèvement), la force de pression exercée par l'air et celle exercée par l'eau. L'entonnoir se soulève lorsque la force de pression exercée par l'eau devient suffisante pour compenser le poids et la force exercée par l'air. Or si on suppose la pression partout égale à P_0 dans l'eau, les deux forces pressantes de l'air et de l'eau sont égales et le poids ne peut jamais être compensé. Il faut donc traduire le fait que la pression est supérieure dans l'eau que dans l'air.

Le champ de pression est donné par la loi de l'hydrostatique. L'axe z étant vers le haut,

$$\frac{dP}{dz} = -\mu_0 g \quad \text{soit} \quad \int_{P_0}^{P(z)} dP = -\mu_0 g \int_h^z dz$$

si bien que

$$P(z) = P_0 - \mu_0 g(z - h) = P_0 + \mu_0 g(h - z).$$

2 On raisonne en coordonnées sphériques de centre O au fond de l'entonnoir. Tout plan contenant l'axe (Oz) est plan de symétrie du système, la résultante des forces pressantes se trouve donc dans l'intersection de tout ces plans, c'est-à-dire qu'elle est portée par \vec{e}_z .

Pour bien le comprendre, on peut tracer les forces pressantes en deux points M et M' de l'entonnoir symétriques, voir figure 2. On constate les composantes z de la force de pression élémentaire en ces deux points s'ajoutent alors que les autres composantes se compensent. La force pressante exercée par l'eau sur l'entonnoir est donc dirigée selon \vec{e}_z .

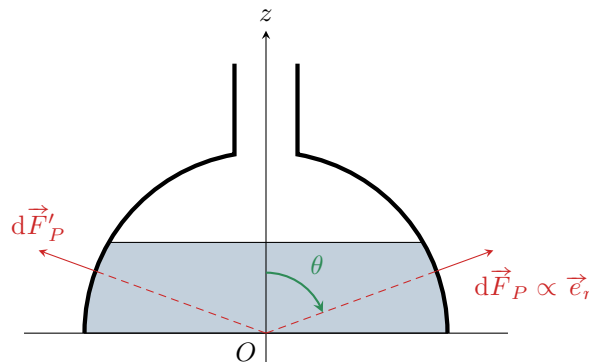


Figure 2 – Direction de la force subie par l'entonnoir.

Attention dans le calcul aux très nombreux pièges qui viennent de la définition de l'angle θ en sphériques. Dès que vous utilisez ces coordonnées dans un calcul un peu compliqué, je vous recommande de refaire au brouillon le schéma « de base » des coordonnées et de la base locale, à retrouver dans la fiche outils d'analyse vectorielle.

Autour du point M , l'élément mésoscopique qui subit la force pressante est de normale \vec{e}_r et donc de surface $dS = R d\theta \times R \sin \theta d\varphi$. En tenant compte de l'eau à la pression $P(z)$ et de l'air à la pression P_0 , la composante utile de la force infinitésimale qu'il subit est donc

$$\begin{aligned}
 dF_{P,z} &= (P(z)d\vec{S} - P_0d\vec{S}) \cdot \vec{e}_z \\
 &= (P(z) - P_0) \times R^2 \sin \theta d\theta d\varphi \times \vec{e}_r \cdot \vec{e}_z \\
 &= \mu_0 g(h - z) \times R^2 \sin \theta d\theta d\varphi \times \cos \theta
 \end{aligned}$$

L'angle θ est compris entre θ_h tel que $\cos \theta_h = h/R$ et $\pi/2$. La résultante s'écrit donc

$$\begin{aligned}
 F_z &= \mu_0 g R^2 \iint (h - z) \sin \theta \cos \theta d\theta d\varphi \\
 &= \mu_0 g R^2 \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} d\varphi \int_{\theta=\theta_h}^{\theta=\pi/2} (h - z) \sin \theta \cos \theta d\theta
 \end{aligned}$$

Une difficulté pour le calcul de l'intégrale vient du fait que z et θ ne sont pas deux variables indépendantes, il est donc nécessaire d'en choisir une des deux. Ici, il est probablement plus simple de privilégier z ... mais il faut exprimer $d\theta$ en fonction de dz . Puisque $z = R \cos \theta$, on a alors

$$\frac{dz}{d\theta} = -R \sin \theta \quad \text{donc} \quad dz = -R \sin \theta d\theta$$

Ainsi, en prenant garde à conserver l'ordre des bornes comme sur l'intégrale en θ ,

$$F_z = \mu_0 g R^2 \times 2\pi \times \int_h^0 0 - (h - z) \frac{z}{R} \frac{dz}{R}$$

Le signe $-$ permet ensuite d'inverser les bornes, d'où

$$F_z = 2\pi \mu_0 g \int_0^h h(h - z) z dz$$

Le calcul de l'intégrale conduit alors à

$$F_z = 2\pi \mu_0 g \left[\frac{hz^2}{2} - \frac{z^3}{3} \right]_0^h = 2\pi \mu_0 g \left(\frac{h^3}{2} - \frac{h^3}{3} \right)$$

et finalement

$$\vec{F} = \pi \mu_0 g \frac{h^3}{3} \vec{e}_z.$$

3 Lorsque l'entonnoir est posé au fond, il subit son poids, la force pressante et la force de réaction du fond \vec{N} . À l'équilibre,

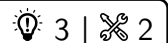
$$m \vec{g} + \vec{F} + \vec{N} = \vec{0} \quad \text{d'où} \quad \vec{N} = \left(-mg + \pi \mu_0 g \frac{h^3}{3} \right) \vec{e}_z$$

La hauteur critique pour laquelle l'entonnoir décolle est celle où \vec{N} s'annule, soit

$$\pi \mu_0 g \frac{h_c^3}{3} = mg \quad \text{d'où} \quad h_c = \left(\frac{3m}{\pi \mu_0} \right)^{1/3}$$

Pour un entonnoir de 100 g, on obtient $h_c \simeq 5$ cm : l'expérience est parfaitement réalisable !

Exercice 8 : Hublot d'aquarium



- ▷ Relation de l'hydrostatique.
- ▷ Résultante des forces de pression.
- ▷ Intégration par découpage mésoscopique.

1 L'axe (Oz) est ascendant et l'eau est un liquide incompressible de masse volumique ρ , donc le champ de pression est donné par

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g \quad \text{soit} \quad \int_{P_0}^{P(z)} dP = -\rho g \int_H^z dz$$

si bien que

$$P(z) = P_0 - \rho g(z - H) = P_0 + \rho g(H - z).$$

2 De la trigonométrie élémentaire donne

$$z = R \sin \alpha.$$

On a donc

$$\frac{dz}{d\alpha} = R \cos \alpha \quad \text{d'où} \quad dz = R \cos \alpha d\alpha.$$

Pour procéder à un changement de variable dans les différentielles (c'est-à-dire dans les éléments infinitésimaux), il est en général plus naturel de commencer par calculer la dérivée puis de la traiter comme une fraction de différentielle.

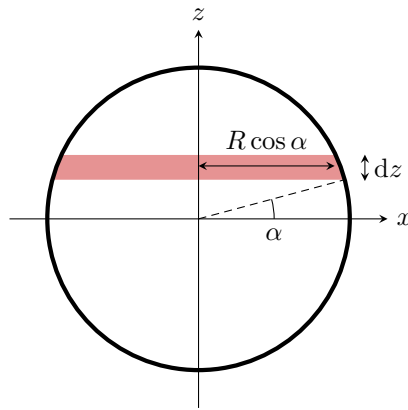


Figure 3 – Découpage mésoscopique du hublot.

3 On assimile la portion de hublot à un rectangle de côtés $2R \cos \alpha$ et dz , voir figure 3. Sa surface vaut donc

$$dS = 2R \cos \alpha \times dz = 2R \cos \alpha \times R \cos \alpha d\alpha \quad \text{soit} \quad \boxed{dS = 2R^2 \cos^2 \alpha d\alpha .}$$

4 Supposons le vecteur \vec{e}_y dirigé de l'eau vers l'air. La bande de hublot comprise entre les ordonnées z et $z + dz$ subit côté air une force $-P_0 dx dz \vec{e}_y$ et côté eau une force $+P(z) dx dz \vec{e}_y$. La résultante de ces forces s'écrit

$$\overrightarrow{dF}(z) = (P(z) - P_0) dx dz \vec{e}_y = \rho g(H - z) dx dz \vec{e}_y .$$

En privilégiant la variable α , on en déduit

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \int_{-R}^R \overrightarrow{dF}(z) \\ &= \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \rho g(H - R \sin \alpha) \times 2R^2 \cos^2 \alpha d\alpha \vec{e}_y \\ &= 2\rho g H R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \alpha d\alpha \vec{e}_y - 2\rho g R^3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin \alpha \cos^2 \alpha d\alpha \vec{e}_y \\ &= 2\rho g H R^2 \times \frac{\pi}{2} \vec{e}_y + \vec{0} \\ &\boxed{\vec{F} = \pi \rho g H R^2 \vec{e}_y} \end{aligned}$$

5 L'expression de la force s'avère être identique à celle qu'on aurait obtenue si le hublot était soumis à une pression uniforme, égale à la pression au centre. Cela peut se comprendre par symétrie : une bande mésoscopique de hublot située à $z > 0$ subit un écart de pression $-\rho g z$ par rapport à la bande centrale ... mais la bande située en $z' = -z$ subit un écart de pression opposé. Ces deux écarts se compensent donc lorsque l'on calcule la résultante.

Exercice 9 : Plaque pivotante

oral banque PT | 💡 3 | ✂️ 2



- ▷ Lien entre mécanique des fluides et des solides.
- ▷ Résultante des forces de pression.
- ▷ Moment cinétique.

1 La pression est donnée par la loi de l'hydrostatique. Comme l'axe (Oy) est ascendant, elle s'écrit

$$\frac{dP}{dy} = -\rho g \quad \text{soit} \quad \int_{P_0}^{P(y)} dP = -\rho g \int_h^y dy$$

si bien que

$$\boxed{P(y) = P_0 - \rho g(y - h) = P_0 + \rho g(h - y) .}$$

2 La pression dans l'eau sur la plaque horizontale est uniforme et vaut

$$P_h = P(y=0) = P_0 + \rho gh.$$

Elle vaut simplement P_0 côté air. La résultante des forces de pression s'en déduit directement

$$\vec{F}_h = -P_h ab \vec{e}_y + P_0 ab \vec{e}_y \quad \text{soit} \quad \vec{F}_h = -\rho gh ab \vec{e}_y.$$

Pour calculer le moment, décomposons la plaque horizontale en bandes mésoscopiques de largeur dx et de longueur b dans la direction z . La force pressante sur chacune de ces bandes vaut

$$d\vec{F}_h = -\rho gh b dx \vec{e}_y$$

et son bras de levier autour de l'axe (Oz) est simplement égal à l'abscisse x de la bande. Sachant que la force $d\vec{F}_h$ tend à faire tourner la plaque en sens négatif autour de l'axe (Oz), on en déduit le moment élémentaire

$$d\mathcal{M}_h = -x \times \rho gh b dx.$$

Le moment résultant s'obtient par sommation,

$$\mathcal{M}_h = \int_0^a -x \rho gh b dx = -\rho gh b \int_0^a x dx = -\rho gh b \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^a$$

et ainsi

$$\mathcal{M}_h = -\rho gh \frac{ba^2}{2}.$$

De manière alternative, on peut calculer ce moment en constatant que la pression est uniforme sur la plaque, d'où on déduit par symétrie que la force \vec{F}_h est appliquée au centre de la plaque. Ce faisant, son bras de levier est égal à $a/2$, ce qui conduit au résultat.

3 La pression sur la plaque verticale est toujours uniformément égale à P_0 côté air, mais elle n'est plus uniforme côté eau. Un élément de surface dS de la plaque verticale situé à l'ordonnée y subit donc

$$-[P_0 + \rho g(h - y)] dy dz \vec{e}_x + P_0 dy dz \vec{e}_x = \rho g(y - h) dy dz \vec{e}_x,$$

donc par intégration

$$\vec{F}_v = \iint \rho g(y - h) dy dz \vec{e}_x = \rho gb \left[\frac{y^2}{2} - hy \right]_0^h \vec{e}_x = \rho gb \left(\frac{h^2}{2} - h^2 \right) \vec{e}_x$$

soit

$$\vec{F}_v = -\rho gb \frac{h^2}{2} \vec{e}_x.$$

On peut de nouveau raisonner sur une bande mésoscopique : une bande horizontale de la plaque verticale comprise entre y et $y + dy$ subit une force pressante égale à

$$d\vec{F}_v = -[P_0 + \rho g(h - y)] b dy \vec{e}_x + P_0 b dy \vec{e}_x = \rho g(y - h) b dy \vec{e}_x.$$

Il n'y a bien sûr dans ce cas que l'intégrale sur y à calculer.

Le bras de levier de la force élémentaire $d\vec{F}_v$ par rapport à l'axe (Oz) est égal à y , et comme cette force tend à faire tourner la plaque dans le sens trigonométrique alors son moment vaut

$$d\mathcal{M}_v = +y \times \rho g(h - y) dx dy.$$

Attention aux signes : dans le calcul du moment avec le bras de levier, c'est la norme de la force qui intervient, et ici $h > y$.

Le moment résultant vaut

$$\mathcal{M}_v = \iint y \rho g(h - y) dy dz = \rho gb \int_0^h y(h - y) dy = \rho gb \left[\frac{hy^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_0^h = \rho gb \left(\frac{h^3}{2} - \frac{h^3}{3} \right)$$

ce qui donne finalement

$$\mathcal{M}_v = \rho g b \frac{h^3}{6}.$$

4 Outre les deux forces pressantes, les deux parois sont également soumises à une force de liaison $\vec{N} = N \vec{e}_y$ au point d'appui sur le bâti, donc de moment $+aN$ par rapport à l'axe (Oz) . La condition d'équilibre en termes de moment cinétique s'écrit

$$\mathcal{M}_h + \mathcal{M}_v + aN = 0.$$

Le système reste en contact avec le bâti tant que $N > 0$, donc tant que $\mathcal{M}_h + \mathcal{M}_v < 0$. Ainsi, il y a basculement de la plaque dès lors que le moment total des forces de pression autour de (Oz) s'annule, c'est-à-dire

$$-\rho g h \frac{ba^2}{2} + \rho g b \frac{h^3}{6} = 0 \quad \text{soit} \quad -\frac{a^2}{2} + \frac{h^2}{6} = 0.$$

La hauteur limite de basculement est donc

$$h_0 = a\sqrt{3}.$$

Poussée d'Archimède

Exercice 10 : Oscillations d'un flotteur

oral ATS | 💡 1 | ✂ 2



- ▷ Lien entre mécanique des fluides et des solides.
- ▷ Résultante des forces de pression.
- ▷ Oscillateur harmonique.

Dans tout l'exercice, on étudie le mouvement du cylindre (section S , hauteur H) dans le référentiel terrestre, supposé galiléen. Deux approches sont possibles dans le bilan des forces :

- ▷ ou bien prise en compte explicite des forces de pression sur la face supérieure et inférieure du cylindre (il y a compensation par symétrie sur les faces latérales) ;
- ▷ ou bien prise en compte de la poussée d'Archimède.

⚠️ ⚠️ ⚠️ **Attention !** Ces deux approches sont incompatibles : la poussée d'Archimède, par définition, **EST** la résultante des forces de pression.

La pression dans l'eau est donnée par la loi de l'hydrostatique,

$$P(z) = P_{\text{atm}} + \rho_0 g z.$$

1 Première approche : forces de pression.

Bilan des forces :

- ▷ Force de pression sur la face supérieure, supposée émergée : $+P_{\text{atm}} S \vec{e}_z$;
- ▷ Force de pression sur la face inférieure, supposée immergée : $-(P_{\text{atm}} + \rho_0 g z) S \vec{e}_z$;
- ▷ Poids du flotteur : $\rho S H g \vec{e}_z$.

Le cylindre étant à l'équilibre ($z = z_0 = \text{cte}$), d'après le théorème de la résultante cinétique projeté sur l'axe vertical,

$$0 = P_{\text{atm}} S - (P_{\text{atm}} + \rho_0 g z_0) S + \rho S H g \quad \text{soit} \quad 0 = -\rho_0 g z_0 S + \rho S H g \quad \text{d'où} \quad z_0 = \frac{\rho}{\rho_0} H.$$

Deuxième approche : poussée d'Archimède.

Bilan des forces :

- ▷ Poussée d'Archimède : le volume de cylindre immergé dans l'eau vaut Sz , donc en négligeant l'effet de l'air la poussée d'Archimède s'écrit $-\rho_0 S z g \vec{e}_z$
- ▷ Poids du flotteur : $\rho S H g \vec{e}_z$.

Le TRC donne cette fois

$$0 = -\rho_0 S z_0 g + \rho S H g$$

ce qui est bien sûr la même équation que précédemment.

2 On impose cette fois $z = H$ car le cylindre est totalement immergé, mais il faut prendre en compte la force F exercée sur le flotteur dans le bilan des forces. Le TRC, toujours à l'équilibre, donne désormais

$$0 = -\rho_0 SHg + \rho SHg + F \quad \text{d'où} \quad \boxed{F = (\rho_0 - \rho)HSg.}$$

3 Le TRC (cette fois hors équilibre) s'écrit

$$\rho HS \frac{d^2z}{dt^2} = -\rho_0 Szg + \rho SHg. \quad \text{soit} \quad \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\rho_0 g}{\rho H} z = g.$$

On identifie l'équation du mouvement d'un oscillateur harmonique de pulsation propre

$$\omega_0^2 = \frac{\rho_0 g}{\rho H}$$

d'où on déduit la période

$$\boxed{T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\rho H}{\rho_0 g}}.}$$

Champ de pression

Exercice 11 : Ballon sonde

inspiré oral banque PT | 💡 2 | ✂ 2 | ☒



- ▷ Relation de la statique des fluides dans un gaz ;
- ▷ Intégration par séparation de variables ;
- ▷ Poussée d'Archimède.

1 Relation de la statique des fluides (z vers le haut) :

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g$$

Avec l'équation d'état des gaz parfaits,

$$PV = \frac{m}{M_a} RT \quad \text{d'où} \quad \rho = \frac{M_a P}{RT}$$

En séparant les variables,

$$\frac{dP}{P} = -\frac{M_a P}{RT} g \quad \text{soit} \quad \frac{dP}{P} = -\frac{M_a g}{RT_0} \frac{dz}{1 - \alpha z} = \frac{M_a g}{\alpha RT_0} \left(\frac{-\alpha dz}{1 - \alpha z} \right).$$

On intègre ensuite entre l'altitude 0 et l'altitude z , ce qui donne

$$\ln \frac{P(z)}{P_0} = \frac{M_a g}{\alpha RT_0} \ln \frac{1 - \alpha z}{1}$$

et on trouve enfin en prenant l'exponentielle

$$\boxed{P(z) = P_0 (1 - \alpha z)^\beta \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{M_a g}{\alpha RT_0}.}$$

2 D'après la question précédente, il vient directement

$$\boxed{\rho(z) = \frac{M_a P(z)}{RT(z)} = \frac{M_a P_0}{RT_0} (1 - \alpha z)^{\beta-1}}$$

3 L'hélium est en équilibre thermique et mécanique avec l'atmosphère, c'est-à-dire à même pression et température, donc la loi des gaz parfaits donne

$$n_{\text{He}} = \frac{P(z)V_0}{RT(z)} = \frac{P_0(1 - \alpha z)^\beta V_0}{RT_0(1 - \alpha z)} \quad \text{d'où} \quad \boxed{n_{\text{He}} = \frac{P_0 V_0 M_{\text{He}}}{RT_0} (1 - \alpha z)^{\beta-1}.}$$

- 4 Le ballon subit son poids $m_0 \vec{g}$, celui de la charge $m \vec{g}$, celui de l'hélium $m_{\text{He}} \vec{g}$ et la poussée d'Archimède

$$\vec{\Pi}_A(z) = -\rho(z)V_0 \vec{g}.$$

La masse maximale qu'il peut emporter à l'altitude z se traduit par une condition d'équilibre : le ballon est immobile car trop lourd pour monter davantage. Ainsi, en projection sur \vec{e}_z ,

$$m_0 g + m_{\text{max}}(z)g + \frac{P_0 V_0 M_{\text{He}}}{RT_0} (1 - \alpha z)^{\beta-1} g - \frac{M_a P_0}{RT_0} (1 - \alpha z)^{\beta-1} V_0 g = 0$$

soit

$$m_0 + m_{\text{max}}(z) + \frac{P_0 V_0}{RT_0} (M_{\text{He}} - M_a) (1 - \alpha z)^{\beta-1} = 0$$

ou encore

$$m_{\text{max}}(z) = \frac{P_0 V_0}{RT_0} (M_a - M_{\text{He}}) (1 - \alpha z)^{\beta-1} - m_0.$$

- 5 Numériquement, pour $T_0 = 15^\circ\text{C}$, je trouve

$$m_{\text{max}}(z=0) = 34 \text{ kg} \quad \text{et} \quad m_{\text{max}}(z=10 \text{ km}) = 11 \text{ kg}.$$

Exercice 12 : Modèle de Janssen d'un milieu granulaire

oral Centrale PSI | 💡 3 | ✂ 2



▷ Obtention d'une équation différentielle par découpage mésoscopique.

- 1 La définition de m_{app} peut se réécrire comme

$$m_{\text{app}} g = S(P(z=h) - P_{\text{atm}})$$

où $S = \pi D^2/4$ est la surface du fond du cylindre. $SP(h=0)$ est la force exercée au fond du cylindre, et SP_{atm} celle qui existe en l'absence de sable : la masse apparente m_{app} correspond donc à la masse équivalente qui exercerait la même force que le sable si elle y était posée. Si le sable se comportait exactement comme un solide, m_{app} correspondrait à la masse de sable déposée.

- 2 Raisonnons à hauteur h fixée. Dans un modèle de fluide en équilibre hydrostatique, la pression dépend de z descendant par

$$\frac{dP}{dz} = +\mu g \quad \text{soit} \quad \int_{P_{\text{atm}}}^{P(h)} dP = \mu g \int_0^h dz$$

ce qui donne

$$P(h) = P_{\text{atm}} + \mu g h,$$

d'où on déduit la masse apparente

$$m_{\text{app}} = \frac{\pi D^2}{4} \mu h.$$

Dans ce modèle, la masse apparente est donc proportionnelle à h : ce modèle n'est donc clairement **pas compatible avec les résultats expérimentaux**.

- 3 Raisonnons sur une tranche mésoscopique de sable, c'est-à-dire un cylindre de rayon R égal à celui du récipient et compris entre les hauteurs z et $z + dz$, représenté figure 4.

Il est soumis à

- ▷ son poids $+\mu g S dz \vec{e}_z$
- ▷ la force de pression exercée par le sable situé au dessous $-P(z + dz)S \vec{e}_z$;
- ▷ la force de pression exercée par le sable situé au dessus $+P(z)S \vec{e}_z$;
- ▷ la force exercée par les parois, qui ne s'applique que sur la surface extérieure du cylindre, $-k(P(z) - P_{\text{atm}}) \times 2\pi R dz \vec{e}_z$.

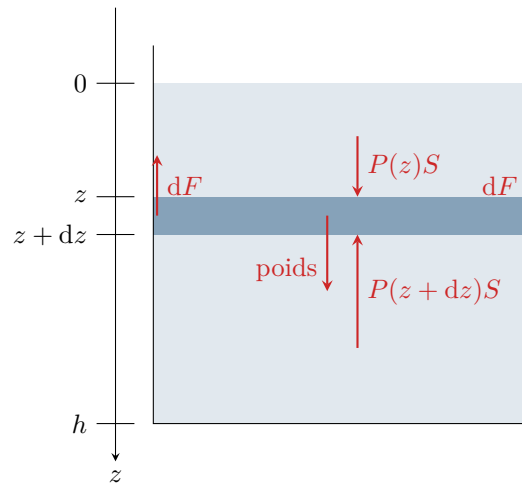


Figure 4 – Tranche mésoscopique de sable étudiée.

L'application du théorème de la résultante cinétique à cette tranche immobile donne en projection

$$\begin{aligned} 0 &= \mu g S dz - P(z+dz)S + P(z)S - k(P(z) - P_{\text{atm}}) \times 2\pi R dz \\ 0 &= \mu g \pi R^2 dz - \frac{dP}{dz} \pi R^2 dz - k(P(z) - P_{\text{atm}}) \times 2\pi R dz \\ 0 &= \mu g R - R \frac{dP}{dz} - 2k(P - P_{\text{atm}}) \end{aligned}$$

ce qui s'écrit finalement comme une équation différentielle

$$\frac{dP}{dz} + \frac{2k}{R}P = \mu g + \frac{2k}{R}P_{\text{atm}}.$$

On reconnaît une équation différentielle du premier ordre faisant intervenir une longueur caractéristique $\lambda = R/2k$. La solution générale s'écrit donc

$$P(z) = A e^{-z/\lambda} + \frac{R}{2k} \mu g + P_{\text{atm}}.$$

En $z = 0$,

$$P(0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sol}}}{=} A + \frac{R}{2k} \mu g + P_{\text{atm}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CL}}}{=} P_{\text{atm}} \quad \text{d'où} \quad A = -\frac{R}{2k} \mu g.$$

Ainsi,

$$P(z) = \frac{R}{2k} \mu g (1 - e^{-z/\lambda}) + P_{\text{atm}}.$$

On en déduit la masse apparente via le calcul de $P(h)$,

$$m_{\text{app}} = \frac{\pi D^2}{4} \frac{R}{2k} \mu (1 - e^{-h/\lambda}).$$

Ce modèle prédit bien une masse apparente qui part de 0 si $h = 0$, puis qui sature lorsque h devient suffisamment grand. L'allure de la courbe expérimentale peut tout à fait être celle d'une exponentielle.

En traçant la tangente à l'origine, on peut estimer $\lambda = 4$ cm, ce qui permet de remonter à la valeur de k ,

$$k = \frac{R}{2\lambda} = 0,3.$$

4 Le débit du sablier ou de la clepsydre est proportionnel à la différence de pression au niveau de l'orifice d'écoulement, et donc directement proportionnel à la masse apparente. Dans le cas de la clepsydre il diminue linéairement au cours de l'écoulement d'eau, ce qui rend la lecture du temps écoulé peu visible. Au contraire, dans le cas du sablier, il demeure constant lorsque la hauteur de la colonne est suffisamment grande, ce qui est préférable.