

Champ électrostatique

Théorème de Gauss

I - Distributions de charge

- **Descriptions mésoscopiques :**

- ▷ Volumique : $dQ = \rho(M) d\tau$ avec $d\tau$ volume méso centré en M
- ▷ Surfactive : $dQ = \sigma(M) dS$.
- ▷ Linéique : $dQ = \lambda(M) d\ell$.

- **Pertinence des modélisations surfacique et linéique :**

- ▷ valable si observation à grande distance ;
- ▷ donne des divergences non-physiques à faible distance.

- **Pertinence des modélisations infinies** \iff effets de bord négligeables

- ▷ valable à proximité du centre de la distribution ;
- ▷ valable à distance pas trop grande de la distribution, à grande distance l'angle sous lequel la distribution est vue diminue.

II - Symétries et invariances

- **Premières propriétés du champ E :** définition à partir de la force de Coulomb.

- ▷ champ créé par une charge ponctuelle q située en O : $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{e}_r$
- ▷ théorème de superposition : champ créé par plusieurs charges = somme des champs créés par chaque charge.

- **Énergie stockée** dans un volume mésoscopique $d\tau$ centré sur le point M :

$$dU_e = u_e(M) d\tau \quad \text{avec} \quad u_e(M) = \frac{1}{2} \epsilon_0 \|\vec{E}(M)\|^2.$$

- **Plan de symétrie de la distribution :**

- ▷ En un point M_s appartenant à un plan Π_s , $\vec{E}(M_s)$ est inclus dans le plan Π_s ;
- ▷ En deux points M et M' symétriques par rapport à un plan Π_s , $\vec{E}(M)$ et $\vec{E}(M')$ sont eux-mêmes symétriques
→ même composante parallèle au plan, composante perpendiculaire opposée.
- ▷ Si la distribution est plane, alors ce plan est un plan de symétrie.

- **Plan d'anti-symétrie de la distribution :** ne se rencontre presque jamais dans les exercices niveau PT.

- ▷ En un point M_a appartenant à un plan Π_a , $\vec{E}(M_a)$ est perpendiculaire au plan Π_a ;
- ▷ En deux points M et M' symétriques par rapport à un plan Π_a , $\vec{E}(M)$ et $\vec{E}(M')$ sont eux-mêmes anti-symétriques
→ même composante perpendiculaire au plan, composante parallèle opposée.

- **Invariances de la distribution :**

- ▷ invariance par translation = indépendance de $\|\vec{E}\|$ par rapport aux variables cartésiennes ;
- ▷ invariance par rotation = indépendance de $\|\vec{E}\|$ par rapport aux variables angulaires.

III - Théorème de Gauss

- **Équation de Maxwell-Gauss et théorème de Gauss :**

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \xleftrightarrow{\text{Green-Ostrogradski}} \quad \oiint_{SG} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}.$$

• **Calculer un champ avec le théorème de Gauss :**

- ❶ Schéma + choix des **coordonnées** ;
- ❷ **Symétries** de la distribution :
 - ▷ donne les composantes non-nulles de \vec{E} (mais pas les variables dont il dépend !)
 - ▷ seuls les plans de symétrie passant par le point M sont intéressants.
- ❸ **Invariances** de la distribution :
 - ▷ donne les variables dont dépend le champ (mais pas ses composantes non nulles !)
- ❹ Construction de la **surface de Gauss** :
 - ▷ surface sur laquelle le champ est uniforme (p.ex. à $r = \text{cte}$ si \vec{E} ne dépend que de r) ;
 - ▷ éventuellement à compléter par des morceaux sur lesquels le flux est nul car $\vec{E} \perp \vec{n}$ ou en utilisant astucieusement les symétries (géométrie plane).
- ❺ Calcul du **flux** :
 - ▷ disjonction des cas éventuelle selon le signe de l'abscisse de M (géométrie plane).
- ❻ Calcul de la **charge intérieure** :
 - ▷ disjonction des cas éventuelle selon que M est à l'intérieur ou à l'extérieur de la distribution.
- ❼ **Conclusion**, sans oublier que \vec{E} est un vecteur.

• **Exemple de la sphère chargée** : à l'extérieur de toute distribution à symétrie sphérique de charge totale Q_{tot} , le champ électrostatique est identique à celui qui serait créé par une charge ponctuelle Q_{tot} qui serait placée au centre. Résultat analogue pour la gravitation.

• **Exemple du plan chargé** : important et pas évident !!

- ▷ Surface de Gauss symétrique par rapport au plan de la distribution :

$$E_z(z' = -z) = -E_z(z) ;$$

- ▷ Hypothèse sur le signe de z pour pouvoir exprimer le flux ;
- ▷ Utiliser la symétrie pour conclure sur le cas $z < 0$;
- ▷ Résultat final : à connaître !

$$\vec{E}(z) = \text{sgn}(z) \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z .$$

• **Relation de passage** :

- ▷ le champ électrostatique est partout continu dans le cas d'une distribution volumique ;
- ▷ mais sa composante normale est discontinue de part et d'autre d'une distribution surfacique.

• **Pertinence des modélisations infinies** : p.ex. un cylindre chargé peut être modélisé par un cylindre infini

- ▷ si hauteur $h \gg$ rayon R (\rightsquigarrow condition sur la distribution elle-même) ;
- ▷ à proximité de la distribution, à distance $r \ll h$ (\rightsquigarrow condition sur le point d'observation) ;
- ▷ suffisamment loin des bords de la distribution $z \ll h$ (\rightsquigarrow condition sur le point d'observation).

IV - Analogie gravitationnelle

Se retrouve en identifiant les expressions des forces.

$\vec{F}_{C,P \rightarrow M} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q}{r^2} \vec{e}_r = q \vec{E}(M)$	$\vec{F}_{g,P \rightarrow M} = -\mathcal{G} \frac{m_0 m}{r^2} \vec{e}_r = m \vec{G}(M)$
Charge électrique q	Masse m
Densité volumique de charge ρ	Masse volumique μ
$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad \epsilon_0$	$-\mathcal{G} \quad -\frac{1}{4\pi\mathcal{G}}$
$\oiint_{SG} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$	$\oiint_{SG} \vec{G} \cdot d\vec{S} = -4\pi \mathcal{G} M_{\text{int}}$