

Potentiel électrostatique

Condensateur

I - Une autre formulation de l'électrostatique

- **Définition du potentiel** : avec l'équation de Maxwell-Faraday,

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0} \quad \implies \quad \boxed{\vec{E} = -\text{grad } V.}$$

- ▷ V est défini à une constante près \iff on peut imposer sa valeur en un point ;
- ▷ V est partout continu \rightsquigarrow conditions de raccordement si \vec{E} défini par morceaux.

- **Circulation du champ électrostatique** :

$$\int_{\widehat{AB}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = V(A) - V(B)$$

- **Interprétation énergétique** : la force de Lorentz électrostatique dérive d'une énergie potentielle $E_{p,e} = qV$.
- **Équation de Poisson** : laplacien du potentiel.

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{avec} \quad \Delta V = \text{div}(\text{grad } V) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

II - Lignes de champ et surfaces équipotentielles

- **Propriétés générales** :

- ▷ Les lignes de champ électrostatique sont orthogonales aux surfaces équipotentielles ;
- ▷ Le champ électrostatique est dirigé dans le sens des potentiels décroissants (\rightsquigarrow utile pour des tests de vraisemblance sur le sens du champ) ;
- ▷ Une ligne de champ électrostatique ne peut pas être fermée, elle part d'une charge positive et se termine sur une charge négative (\rightsquigarrow utile pour des tests de vraisemblance sur le sens du champ).
- ▷ Le potentiel est maximum au niveau des charges positives et minimum au niveau des charges négatives (\rightsquigarrow utile pour des tests de vraisemblance).
- ▷ Un resserrement des lignes de champ OU des équipotentielles indique une zone de champ intense.

- **Tracé numérique** : la logique est à retenir, mais la syntaxe des fonctions doit être rappelée par un énoncé.

- ▷ construction d'une grille (`np.meshgrid`) ;
- ▷ calcul du potentiel en chaque point de cette grille (double boucle `for`) ;
- ▷ calcul du champ à partir du potentiel (schéma d'Euler en espace, ou utilisation de `np.gradient`) ;
- ▷ tracé des équipotentielles (`plt.contour`) et des lignes de champ (`plt.streamplot`).

III - Modélisation électrostatique d'un condensateur

- **Condensateur plan infini** : deux plans conducteurs infinis, séparés par un isolant, et chargés en surface avec une densité $\pm\sigma$.

- **Champ électrique créé par le condensateur** : raisonnement par superposition à partir du champ créé par un plan infini.

$$\|\vec{E}\| = \begin{cases} 0 & \text{à l'extérieur} \\ \sigma/\epsilon_0 & \text{à l'intérieur} \end{cases} \quad \text{dirigé de l'armature positive vers l'armature négative.}$$

• Calcul de la capacité : démonstration « par la charge »

$$Q = CU$$

Plan de la démonstration :

- ▷ Calcul du champ électrique par superposition ;
- ▷ Calcul du potentiel par séparation des variables ;
- ▷ Expression de la tension entre les armatures en fonction de $Q = \sigma S$;
- ▷ Identification à la définition.

• Calcul de la capacité : démonstration « par l'énergie »

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}CU^2$$

Plan de la démonstration :

- ▷ Équation de Poisson pour montrer que $E_z = \text{cte}$;
- ▷ Séparation de variables pour relier le champ E_z à la tension U connue ;
- ▷ Calcul de l'énergie électrostatique totale stockée dans le condensateur par intégration sur tout le volume ;
- ▷ Identification à la définition.

• Capacité d'un condensateur plan :

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{e}$$