



BLAISE PASCAL
PT 2024-2025

TD 19 – Thermodynamique

Correction

Conduction thermique

Analyses de corrigé

Exercice 1 : Double vitrage

💡 1 | ✂ 1 | ☒



- ▷ Association de résistances thermiques ;
- ▷ Loi de Newton.

Exercice 2 : Température dans un réacteur piston

💡 2 | ✂ 2 | ☒



- ▷ Bilan thermique mésoscopique ;
- ▷ Terme source ;
- ▷ Transfert thermique conducto-convectif.

Refaire le cours

Exercice 3 : Barre connectée à deux thermostats

💡 1 | ✂ 1 | ☒



- ▷ Équation de la chaleur ;
- ▷ Résistance thermique ;
- ▷ Bilan d'entropie.

1 Cf. cours,

$$D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{avec} \quad D = \frac{\kappa}{\rho c}.$$

2 La durée τ du régime transitoire dépend de la diffusivité D et de la longueur L de la barre. Par analyse dimensionnelle (cf. cours là encore),

$$\tau \sim \frac{L^2}{D}$$

Les températures T_1 et T_2 n'interviennent pas, seuls les paramètres caractéristiques de la barre (et pas de son environnement) interviennent.

3 En régime permanent, l'équation devient

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \quad \text{donc} \quad \frac{dT}{dx} = a \quad \text{et} \quad T = ax + b$$

en intégrant deux fois. En tenant compte des conditions aux limites (cf. cours toujours),

$$T(x) = \frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1.$$

4 Le flux thermique orienté selon \vec{u}_x vaut

$$\phi(x) = \iint \vec{j}(x) \cdot dS \vec{u}_x = j_{\text{th}}(x) S = -\kappa S \frac{dT}{dx} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\phi(x) = \frac{\kappa S}{L} (T_1 - T_2),}$$

qui ne dépend pas de x . Par définition de la résistance thermique, $T_1 - T_2 = R_{\text{th}} \phi$ donc par identification

$$R_{\text{th}} = \frac{L}{\kappa S}$$

5 Appliquons le second principe à la barre toute entière entre t et $t + dt$,

$$dS = \delta S_e + \delta S_c$$

L'entropie échangée est fournie par les thermostats,

$$\delta S_e = \frac{\delta Q_1}{T_1} + \frac{\delta Q_2}{T_2} = \frac{+\phi dt}{T_1} + \frac{-\phi dt}{T_2}$$

En régime permanent, l'entropie de la barre est constante d'où

$$dS = 0 = \delta S_c + \phi \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right)$$

et d'après la question précédente


$$\frac{\delta S_c}{dt} = \frac{T_1 - T_2}{R_{\text{th}}} \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right) \quad \text{soit} \quad \frac{\delta S_c}{dt} = \frac{1}{R_{\text{th}}} \frac{(T_1 - T_2)^2}{T_1 T_2}$$

Le taux de production d'entropie est toujours strictement positif si $T_1 \neq T_2$, ce qui confirme que la diffusion thermique est un **phénomène irréversible**. Comme l'entropie créée est forcément positive, ce résultat permet également de conclure que la résistance thermique R_{th} est nécessairement positive.

Résistances thermiques

Exercice 4 : Isolation d'un pignon



-  ▷ Association de résistances thermiques;
▷ Applications numériques sans calculatrice.

1 Voir cours,

$$R_{\text{th}} = \frac{e}{\lambda S}$$

On a alors

$$R_m = R_f = 2 \cdot 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}.$$

2 Les résistances thermiques du mur et des fenêtres sont montées en parallèle, donc

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_m} + \frac{5}{R_f} = 3000 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \quad \text{donc} \quad R = \frac{1}{\frac{1}{R_m} + \frac{5}{R_f}} = 3,3 \cdot 10^{-4} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}.$$

3 Le béton et la laine de verre sont superposées, leurs résistances thermiques sont donc montées en série, ainsi

$$R'_m = R_m + \frac{e_{\text{lv}}}{\lambda_{\text{lv}} S} = 52 \cdot 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}.$$

La résistance thermique du mur est donc améliorée d'un facteur 6. Ainsi,

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R'_m} + \frac{5}{R_f} = 2580 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \quad \text{donc} \quad R' = \frac{1}{\frac{1}{R'_m} + \frac{5}{R_f}} = 3,87 \cdot 10^{-4} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}.$$

Une fois les fenêtres prises en compte, les travaux n'améliorent la résistance thermique que d'environ 15 %.

La résistance thermique du mur est tellement supérieure à celle des fenêtres que, finalement, tout se passe presque comme si seules les fenêtres étaient des conducteurs thermiques. On peut faire l'analogie avec l'électronique : quand deux résistances très différentes sont montées en parallèle, la plus élevée équivaut à un interrupteur ouvert ... et l'association devient équivalente à la plus faible des deux résistances.

- 4 Les deux lames de verre et la couche d'air sont montées en série, donc

$$R'_f = \frac{2e}{\lambda_v S_f} + \frac{e'}{\lambda_{\text{air}} S_f} = 2,4 \cdot 10^{-1} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1} \simeq 0,25 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}.$$

- 5 Finalement,

$$R'' = \frac{1}{\frac{1}{R_m} + \frac{1}{R'_f}} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}.$$

- 6 Pas beaucoup de doute à avoir : il vaut mieux changer les fenêtres car la résistance thermique est bien plus grande !

Cette conclusion est largement vérifiée en pratique ... même s'il ne faut pas oublier le toit, qui joue également un rôle crucial dans l'isolation d'une maison.

Exercice 5 : Plancher chauffant



- ▷ Loi de Newton ;
- ▷ Association de résistances thermiques.

- 1 Le flux thermique conducto-convectif cédé à l'air à la surface du carrelage vaut

$$\Phi_{cc} = \iint \vec{j}_{cc} \cdot d\vec{S} = hS(T_s - T_{\text{air}}),$$

ce qui permet d'identifier la résistance thermique d'interface

$$R_i = \frac{T_s - T_{\text{air}}}{\Phi_{cc}} \quad \text{soit} \quad R_i = \frac{1}{hS}.$$

- 2 L'hypothèse de contact thermique parfait consiste à supposer qu'il y a **continuité de la température** à l'interface entre deux matériaux, ce qui revient à dire que la résistance thermique d'interface est nulle. On en déduit le schéma électrique équivalent de la figure 1. Le circuit d'eau n'est pas modélisé par une résistance thermique, en revanche il impose la température T_{eau} entre l'isolant et la chape de mortier. Comme la température joue un rôle analogue au potentiel électrique, imposer une température en un point revient à placer un générateur entre ce point et la masse.

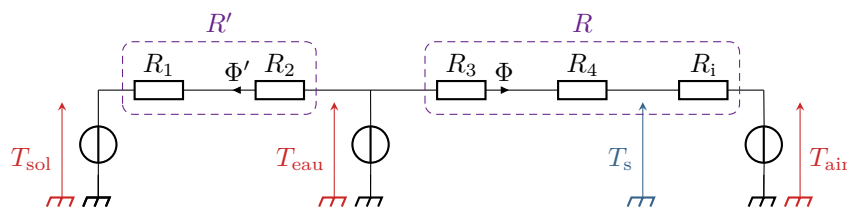


Figure 1 – Schéma électrique équivalent à l'installation. On note R_p l'indice du matériau numéroté p .

Ainsi, les résistances R_3 de la chape de mortier, R_4 du carrelage et R_i d'interface sont toutes traversées par le même flux, donc montées en série. On en déduit la résistance totale

$$R = R_3 + R_4 + R_i$$

En utilisant l'expression de la résistance thermique d'une plaque plane $R_p = e_p/\lambda_p S$, on en déduit

$$R = \frac{e_3}{\lambda_3 S} + \frac{e_4}{\lambda_4 S} + \frac{1}{hS} = 3,3 \cdot 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}.$$

3 La puissance thermique Φ fournie par le plancher chauffant à l'air de la pièce est reliée aux températures par

$$\Phi = \frac{T_{\text{eau}} - T_{\text{air}}}{R} \quad \text{soit} \quad T_{\text{eau}} = T_{\text{air}} + R\Phi = 22,4^\circ\text{C}.$$

La température est nettement plus faible que celle d'un radiateur traditionnel, ce qui s'explique par la grande surface du plancher chauffant.

4 La résistance R_i est également traversée par le flux Φ , donc avec le même raisonnement que précédemment,

$$\Phi = \frac{T_s - T_{\text{air}}}{R_i}$$

Pour $T_i = T_{\text{max}}$, on a alors

$$\Phi_{\text{max}} = \frac{T_{\text{max}} - T_{\text{air}}}{R_i} = 3,6 \text{ kW}.$$

Ainsi, un plancher chauffant ne suffira pas à chauffer une pièce mal isolée ... ce qui n'est en pratique pas gênant, car un plancher chauffant ne peut pas être installé en rénovation mais uniquement en construction neuve.

En outre, une puissance limitée peut aussi poser des difficultés au démarrage du chauffage dans une pièce froide, car cela augmente évidemment le temps nécessaire pour atteindre la température souhaitée.

5 Le rendement du plancher chauffant peut être défini comme le rapport entre la puissance Φ réellement fournie à l'habitation et la puissance totale $\Phi + \Phi'$ fournie par l'eau chaude,

$$\eta = \frac{\Phi}{\Phi + \Phi'}.$$

En utilisant les températures et les résistances thermiques,

$$\eta = \frac{\frac{T_{\text{eau}} - T_{\text{air}}}{R}}{\frac{T_{\text{eau}} - T_{\text{air}}}{R} + \frac{T_{\text{eau}} - T_{\text{sol}}}{R'}} = \frac{T_{\text{eau}} - T_{\text{air}}}{T_{\text{eau}} - T_{\text{air}} + \frac{R}{R'}(T_{\text{eau}} - T_{\text{sol}})} \quad \text{d'où} \quad \eta = \frac{1}{1 + \frac{R}{R'} \frac{T_{\text{eau}} - T_{\text{sol}}}{T_{\text{eau}} - T_{\text{air}}}}.$$

Numériquement,

$$R' = \frac{e_1}{\lambda_1 S} + \frac{e_2}{\lambda_2 S} = 2,7 \cdot 10^{-2} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1} \quad \text{d'où} \quad \eta = 64\%.$$

6 Le bois est un conducteur thermique nettement moins bon que le carrelage. C'est un avantage en isolation, mais pas ici. Qualitativement pour une même puissance de chauffe Φ , si la résistance thermique R augmente, alors il faudra augmenter la température T_{eau} de l'eau pour fournir la même puissance thermique à la pièce à chauffer ... mais comme la résistance R' n'est pas modifiée, alors la puissance thermique cédée au sol augmente nécessairement, ce qui a pour effet de **diminuer le rendement** de l'installation. Autrement dit, en mettant du parquet à la place du carrelage, il faut chauffer l'eau davantage, ce qui est plus coûteux en énergie, et ce surplus d'énergie apporté se retrouve entièrement perdu dans le sol.

Exercice 6 : Survie d'un cosmonaute en Sibérie

CCINP MP 2022 | 💡 2 | ✂️ 2



- ▷ Association de résistances thermiques ;
- ▷ Bilan thermique.

a Notons Φ le flux thermique traversant le derme. La température intérieure du corps humain est $T_{\text{éq}}$, et la température à la surface de la peau T_h . Par définition,

$$R_{\text{diff}} = \frac{T_{\text{éq}} - T_h}{\Phi}.$$

Pour une paroi plane d'épaisseur e et surface S , modèle adopté ici pour la peau, on a montré dans le cours que

$$R_{\text{diff}} = \frac{e}{\lambda S} = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}.$$

b La puissance totale cédée par convection et rayonnement s'écrit

$$P_{\text{cr}} = \alpha(T_h - T_{\text{ext}})S \quad \text{d'où} \quad R_{\text{cr}} = \frac{T_h - T_{\text{ext}}}{P_{\text{cr}}} = \frac{1}{\alpha S} = 74 \cdot 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}.$$

Elle est échangée à la surface de la peau, et donc montée **en série** avec la résistance de conduction R_{diff} .

c Les deux résistances étant montées en série, la puissance thermique totale cédée par l'homme nu à l'air environnant vaut

$$P_{\text{ext}} = (R_{\text{diff}} + R_{\text{cr}})(T_{\text{éq}} - T_{\text{ext}}).$$

Un bilan d'enthalpie appliqué à l'homme (vivant ...) en régime stationnaire donne

$$\frac{dH}{dt} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{RP}}}{=} 0 = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er P}}}{P_m} - P_e - P_{\text{ext}} \quad \text{d'où} \quad P_m = P_e + P_{\text{ext}} = 630 \text{ W} \gg 150 \text{ W}.$$

Ainsi, un homme nu en Sibérie se refroidit progressivement jusqu'à tomber en hypothermie puis mourir ... ce qui ne surprendra personne !

d L'énoncé n'est pas très clair ... Les échanges entre le cosmonaute et son environnement sont modélisés de la façon suivante :

- ▷ sur 90 % de la surface, la peau est protégée par le scaphandre, et seule la résistance thermique du scaphandre est à prendre en compte (celle du derme est négligeable) :

$$R_{\text{scaph}} = \frac{e'}{0,9 S \lambda'} = 0,74 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$$

- ▷ sur les 10 % restants (visage, etc.), la peau est directement au contact de l'air, il faut alors considérer les deux phénomènes de diffusion et convection-rayonnement :

$$R_{\text{visage}} = \frac{e}{0,1 S \lambda} + \frac{1}{0,1 S \alpha} = 0,74 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$$

Les deux résistances thermiques sont montées en parallèle, d'où une résistance totale

$$\frac{1}{R_{\text{tot}}} = \frac{1}{R_{\text{scaph}}} + \frac{1}{R_{\text{visage}}} \quad \text{soit} \quad R_{\text{tot}} = 0,37 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}.$$

On en déduit finalement

$$P'_m = P_e + \frac{T_{\text{éq}} - T_{\text{ext}}}{R_{\text{tot}}} = 135 \text{ W} < 150 \text{ W}.$$

Ainsi, avec leur scaphandre, les cosmonautes peuvent survivre.

| L'égalité entre les deux valeurs numériques R_{scaph} et R_{visage} est une coïncidence malencontreuse !

Exercice 7 : Igloo

oral banque PT | 💡 2 | ✂️ 2



- ▷ Résistance thermique ;
- ▷ Coordonnées sphériques.

1 Entre t et $t + dt$, la demi-sphère considérée reçoit un transfert thermique

$$\delta Q_{\text{int}} = 4\mathcal{P} dt$$

produit par les quatre explorateurs ($\mathcal{P} = 50 \text{ W}$) et cède à l'extérieur un transfert thermique

$$\delta Q_{\text{ext}} = \Phi dt$$

avec Φ le flux thermique sortant de la surface considérée. En régime permanent, le bilan enthalpique s'écrit donc

$$dH = 0 = 4\mathcal{P} dt - \Phi dt \quad \text{d'où} \quad \boxed{\Phi = 4\mathcal{P}.}$$

Le flux thermique Φ est donc **indépendant du rayon r de la surface considérée.**

2 Dans la demi-sphère, le vecteur densité de courant thermique s'écrit

$$\vec{j} = j_r(r) \vec{u}_r.$$

Le flux sortant au travers d'une demi-sphère de rayon r s'exprime donc

$$\Phi = j_r(r) \times \frac{4\pi r^2}{2}.$$

Or d'après la loi de Fourier, avec ces symétries,

$$\vec{j} = -\lambda \frac{dT}{dr} \vec{u}_r,$$

d'où on déduit

$$\Phi = -\lambda \frac{dT}{dr} 2\pi r^2 \quad \text{soit} \quad \frac{dT}{dr} = -\frac{\Phi}{2\pi r^2 \lambda}.$$

On peut alors séparer les variables,

$$dT = -\frac{\Phi}{2\pi\lambda} \frac{dr}{r^2},$$

puis intégrer

$$\int_{T_{\text{int}}}^{T_{\text{ext}}} dT = -\frac{\Phi}{2\pi\lambda} \int_R^{R+e} \frac{dr}{r^2}$$

ce qui donne

$$T_{\text{ext}} - T_{\text{int}} = -\frac{\Phi}{2\pi\lambda} \left(-\frac{1}{R+e} + \frac{1}{R} \right).$$

Par définition de la résistance thermique, on identifie

$$\mathcal{R}_{\text{igloo}} = -\frac{1}{2\pi\lambda} \left(\frac{1}{R+e} - \frac{1}{R} \right) \quad \text{soit} \quad \boxed{\mathcal{R}_{\text{igloo}} = \frac{1}{2\pi\lambda} \frac{e}{R(R+e)} > 0.}$$

La démonstration utilise implicitement le fait que Φ est indépendant de r pour le sortir de l'intégrale dans la séparation de variable, ce qui a été établi dans la première question.

3 D'après la question précédente, la résistance thermique de l'igloo est d'autant plus grande que le rayon R est petit : **les explorateurs ont donc intérêt à construire un petit igloo.**

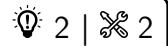
La dépendance en e à R fixée est moins évidente à constater (il faut ou bien tracer, ou bien dériver), mais comme on pouvait s'y attendre la résistance thermique augmente avec e même s'il n'y a pas proportionnalité comme dans le cas cartésien.

4 D'après la question 1, $\Phi = 4\mathcal{P}$. En utilisant la résistance thermique,

$$\boxed{T_{\text{int}} = T_{\text{ext}} + 4\mathcal{P}\mathcal{R}_{\text{igloo}} = 11 \text{ °C}.}$$

Bilans mésoscopiques

Exercice 8 : Géothermie



- ▷ Bilan mésoscopique ;
- ▷ Source thermique ;
- ▷ Coordonnées cartésiennes.

1) Considérons la tranche mésoscopique de hauteur dz et de section S schématisée figure 2.

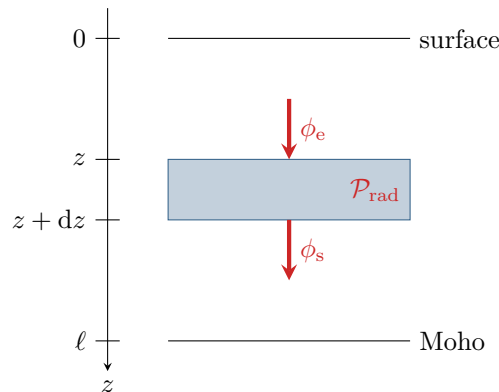


Figure 2 – Tranche infinitésimale de croûte terrestre.

- **Bilan des transferts thermiques** : pendant une durée dt , elle échange
 - ▷ un transfert thermique entrant par la face située en z

$$\delta Q_e = \phi_e dt = j_z(z) S dt$$

- ▷ un transfert thermique sortant par la face située en $z + dz$

$$\delta Q_s = \phi_s dt = j_z(z + dz) S dt$$

- ▷ un transfert thermique effectif fourni par les désintégrations radioactives

$$\delta Q_{\text{rad}} = \mathcal{P}_{\text{rad}} dt = p S dz dt.$$

Comme $T_M > T_0$, alors les transferts thermiques sont dirigés du Moho vers la surface ... donc dans le sens contraire à celui dans lequel j'ai orienté les flux ... et ce n'est pas grave!! Pour ne pas se tromper, mieux vaut orienter les flux dans le sens de l'axe plutôt que dans leur sens réel ... mais il ne faut **SURTOUT PAS** rajouter un signe \ominus « à la main », même si c'est peut être très tentant! La raison profonde à tout ceci est le caractère algébrique des flux : les conventions choisies ici imposent simplement $\phi_e, \phi_s < 0$ et $j_z < 0$.

- **Bilan d'enthalpie** : en régime permanent,

$$dH \underset{\substack{\uparrow \\ \text{RP}}}{=} 0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er P}}}{=} j_z(z) S dt - j_z(z + dz) S dt + p S dz dt.$$

Par un développement limité, on obtient

$$-\frac{dj_z}{dz} dz S dt + p S dz dt = 0,$$

et en utilisant la loi de Fourier,

$$j_z = -\lambda \frac{dT}{dz} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\lambda \frac{d^2 T}{dz^2} + p = 0.}$$

2) S'agissant d'une équation différentielle du second ordre, deux conditions aux limites sont nécessaires pour la résolution. La première est immédiate :

$$T(z=0) = T_0.$$

La deuxième est moins simple. En exploitant la courbe donnée, on peut estimer la dérivée au voisinage de la surface :

$$\gamma = \frac{dT}{dz}(z=0) \simeq \frac{53 - 33}{1000 - 400} = 0,03 \text{ K} \cdot \text{m}^{-1}.$$

Le gradient géothermique est variable en fonction du lieu où l'on se trouve à la surface terrestre, souvent compris entre 10 et $30 \text{ K} \cdot \text{km}^{-1}$, mais potentiellement beaucoup plus dans les régions volcaniques.

3 L'équation se réécrit

$$\frac{d^2T}{dz^2} = -\frac{p}{\lambda} \quad \text{donc} \quad \frac{dT}{dz} = -\frac{p}{\lambda}z + A,$$

et avec la première condition limite,

$$\frac{dT}{dz}(z=0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CL}}}{=} \gamma \underset{\substack{\uparrow \\ \text{expr}}}{=} A$$

Par une deuxième intégration,

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{p}{\lambda}z + \gamma \quad \text{d'où} \quad T(z) = -\frac{p}{2\lambda}z^2 + \gamma z + B.$$

et avec la seconde condition aux limites,

$$T(z=0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CL}}}{=} T_0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{expr}}}{=} B$$

ce qui donne finalement

$$T(z) = -\frac{p}{2\lambda}z^2 + \gamma z + T_0.$$

Le profil de température est donc parabolique. Comme il est physiquement évident que la température est forcément une fonction monotone dans la croûte terrestre, on en déduit l'allure de la figure 4 qui ne présente pas de maximum.

La concavité de la courbe est donnée par la dérivée seconde $-p/\lambda < 0$: la dérivée diminue avec z , donc la température est « de moins en moins croissante ».

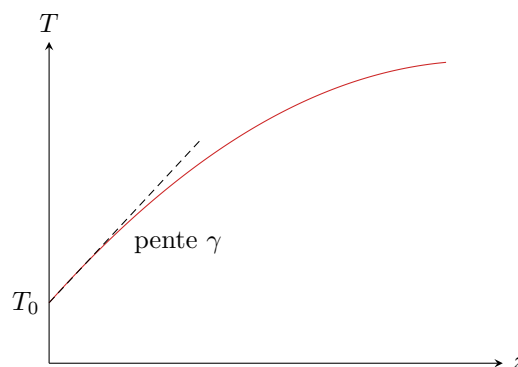


Figure 3 – Profil de température dans la croûte terrestre.

4 Par extrapolation du profil de température à une profondeur $h = 30 \text{ km}$,

$$T_M = -\frac{p}{2\lambda}h^2 + \gamma h + T_0 \quad \text{soit} \quad \frac{p}{2\lambda}h^2 = T_0 + \gamma h - T_M.$$

et ainsi

$$p = \frac{2\lambda}{h^2}(T_0 + \gamma h - T_M) = 17 \mu\text{W} \cdot \text{m}^{-3}.$$

Notre modèle très simple donne un résultat un peu supérieur à la valeur communément admise de $10 \mu\text{W} \cdot \text{K}^{-1}$. L'écart s'explique par le fait que la concentration en éléments radioactifs et donc la puissance qu'ils libèrent n'est pas uniforme avec la profondeur.

5 Par flux géothermique « surfacique », il faut comprendre qu'on se ramène à $S = 1 \text{ m}^2$... ou qu'on calcule directement $\|\vec{j}\|$. D'après la loi de Fourier,

$$\|\vec{j}(z=0)\| = \lambda \frac{dT}{dz}(z=0) = \lambda \gamma \simeq 0,1 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}.$$

En un an, cela donne une énergie potentiellement récupérable sur un an de l'ordre de

$$\mathcal{E} = 0,1 \times (365 \times 24 \times 3600) = 3,15 \cdot 10^6 \text{ J} \cdot \text{m}^{-2}.$$

Sachant que $1 \text{ kWh} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ J}$, on en déduit

$$\mathcal{E} = 0,9 \text{ kW} \cdot \text{h} \cdot \text{m}^{-2},$$

ce qui est très inférieur au potentiel solaire.

Contrairement aux apparences, l'Alsace est pourtant une région très adaptée à la géothermie et dans laquelle celle-ci est largement développée. Cela s'explique notamment par le très bon rendement des dispositifs permettant de récupérer la chaleur géothermique, nettement supérieur à celui des panneaux solaires, et qui peuvent couvrir une plus grande surface en exploitant par exemple des nappes phréatiques.

Exercice 9 : Ailette de refroidissement



- ▷ Bilan mésoscopique ;
- ▷ Transfert thermique conducto-convectif ;
- ▷ Coordonnées cartésiennes.

Compte tenu des hypothèses, la température ne dépend que de la variable x , $T = T(x)$, et donc $\vec{j} = j_x(x)\vec{e}_x$.

1 Raisonnons sur la tranche mésoscopique d'ailette située entre x et $x + dx$. Procédons à un bilan thermique entre t et $t + dt$:

- ▷ par la face située en x , elle reçoit $\delta Q_e = j_x(x) \times ab dt$;
- ▷ par la face située en $x + dx$, elle cède $\delta Q_s = j_x(x + dx) \times ab dt$;
- ▷ par les parois latérales, elle cède $\delta Q_{\text{lat}} = h(T(x) - T_0) \times (2a + 2b)dx dt$.

D'après le premier principe en régime stationnaire,

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er P}}}{dH} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{stat}}}{\delta Q_e} - \delta Q_s - \delta Q_{\text{lat}} = 0 \quad \text{d'où} \quad j_x(x) ab - j_x(x + dx) ab - 2h(T(x) - T_0)(a + b)dx = 0$$

et par un développement limité et en simplifiant par dx ,

$$0 = -\frac{dj_x}{dx} ab - h(T(x) - T_0)(2a + 2b).$$

D'après la loi de Fourier :

$$\lambda ab \frac{d^2 T}{dx^2} - 2h(a + b)T(x) = -2h(a + b)T_0$$

ce qui conduit au résultat

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{1}{\delta^2} T = -\frac{1}{\delta^2} T_0 \quad \text{avec} \quad \delta = \sqrt{\frac{\lambda ab}{2h(a + b)}}.$$

La grandeur δ s'interprète comme la longueur caractéristique de variation de la température dans l'ailette. Supposer l'ailette « infinie » signifie concrètement $L \gg \delta$.

2 Les racines du polynôme caractéristique sont $r_{\pm} = \pm 1/\delta$. On en déduit

$$T(x) = T_0 + A e^{-x/\delta} + B e^{x/\delta} \quad \text{avec} \quad A, B = \text{cte.}$$

Attention à ne pas confondre avec un oscillateur harmonique, qui a presque la même équation différentielle ... au signe près.

La température ne pouvant diverger lorsque $x \rightarrow \infty$, on a nécessairement $B = 0$. L'ailette et le composant étant en contact thermique parfait en $x = 0$,

$$T(x=0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CL}}}{=} T_c \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sol}}}{=} T_0 + A \quad \text{d'où} \quad A = T_c - T_0.$$

Finalement,

$$T(x) = T_0 + (T_c - T_0) e^{-x/\delta}.$$

3 Par définition, la puissance totale dissipée par l'ailette vaut

$$\mathcal{P} = \int_0^{+\infty} d\varphi(x) = \int_0^{+\infty} h(T_c - T_0) e^{-x/\delta} 2(a+b) dx.$$

Ainsi,

$$\mathcal{P} = 2h(a+b)(T_c - T_0) \int_0^{\infty} e^{-x/\delta} dx = 2h(a+b)(T_c - T_0) \left[-\delta e^{-x/\delta} \right]_0^{\infty} = 2h(a+b) \sqrt{\frac{\lambda ab}{2h(a+b)}} (T_c - T_0)$$

et finalement

$$\boxed{\mathcal{P} = \sqrt{2h(a+b)ab\lambda}(T_c - T_0).}$$

4 Les deux dispositions proposées par l'énoncé occupent environ la même surface de composant (en négligeant la surface vide entre les ailettes). Pour N^2 ailettes,

$$\mathcal{P}_{\text{tot}} = N^2 \mathcal{P} = N^2 \sqrt{2h(a+b)ab\lambda}(T_c - T_0).$$

Pour une seule grande ailette,

$$\mathcal{P}'_{\text{tot}} = \sqrt{2h(Na + Nb)NaNb\lambda}(T_c - T_0) = N\sqrt{N}\mathcal{P}.$$

Ainsi,

$$\frac{\mathcal{P}_{\text{tot}}}{\mathcal{P}'_{\text{tot}}} = \sqrt{N}.$$

La puissance dissipée par l'association de plusieurs ailettes est supérieure à celle dissipée par une unique ailette de grande section, car la surface de contact entre l'air et les ailettes est globalement plus importante.

Exercice 10 : Température dans une plaque conductrice

oral banque PT | 💡 3 | ✂ 2



- ▷ Bilan mésoscopique ;
- ▷ Effet Joule ;
- ▷ Transfert thermique conducto-convectif.

1 L'intensité est

$$I = \iint_{\text{section}} J_0 \vec{u}_z \cdot dS \vec{u}_z = J_0 l e.$$

La puissance volumique dissipée par effet Joule vaut

$$P_J = \vec{j} \cdot \vec{E} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Ohm}}}{=} \vec{j} \cdot \frac{\vec{j}}{\sigma} = \frac{J_0^2}{\sigma}.$$

2 Appliquons le premier principe en puissance à la plaque en régime permanent. Elle reçoit de la puissance Joule et en cède à l'air sous forme conducto-convective par les deux faces supérieure et inférieure (compte tenu de la faible épaisseur e , on néglige l'effet des pertes par les faces latérales). Ainsi,

$$\frac{dH}{dt} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er P}}}{=} P_J \times L l e - P_N \times 2 L l \underset{\substack{\uparrow \\ \text{RP}}}{=} 0,$$

soit en remplaçant

$$\frac{J_0^2}{\sigma} \times L l e - h(T_0 - T_{\text{air}}) \times 2 L l = 0$$

d'où on déduit

$$\boxed{T_0 = T_{\text{air}} + \frac{J_0^2 e}{2\sigma h}.$$

3 Raisonnons en régime permanent sur une tranche de plaque comprise entre x et $x + dx$ pendant une durée dt :

▷ par la face située en x , elle reçoit

$$\delta Q_e = j_x(x) L \ell dt,$$

▷ par la face située en $x + dx$, elle cède

$$\delta Q_s = j_x(x + dx) L \ell dt,$$

▷ en raison de l'effet Joule, elle reçoit

$$\delta Q_J = \frac{J_0^2}{\sigma} L \ell dx dt$$

D'après le premier principe,

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er P}}}{dH} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{RP}}}{\delta Q_e} - \delta Q_s + \delta Q_J = 0 \quad \text{soit} \quad j_x(x) L \ell dt - j_x(x + dx) L \ell dt + \frac{J_0^2}{\sigma} L \ell dx dt = 0$$

Par un développement limité,

$$-\frac{dj_x}{dx} dx + \frac{J_0^2}{\sigma} dx = 0$$

et en utilisant la loi de Fourier, il vient

$$\lambda \frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{J_0^2}{\sigma} = 0 \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{d^2 T}{dx^2} = -\frac{J_0^2}{\lambda \sigma}}.$$

4 Plusieurs observations qualitatives sont possibles, mais elles ne sont sûrement pas toutes attendues du candidat. Je pense que les deux premiers de la liste ci-dessous suffiraient :

- ▷ l'expression proposée est compatible avec la température T_0 déterminée précédemment : $T(x=0) = T(x=e) = T_0$;
- ▷ la température est maximale en $x = e/2$ (très facile à montrer avec la dérivée), et vaut

$$T_{\max} = T_{\text{air}} + \frac{J_0^2 e}{2h\sigma} + \frac{J_0^2 e^2}{2\lambda\sigma} = T_{\text{air}} + \frac{J_0^2 e}{2\sigma} \left(\frac{1}{h} + \frac{e}{2\lambda} \right).$$

et le profil de température est symétrique de part et d'autre, ce qui est cohérent avec le fait que le plan $x = e/2$ soit plan de symétrie ;

- ▷ si le courant J_0 augmente, alors T_{\max} augmente, ce qui est cohérent car il y a plus de puissance fournie à la plaque par effet Joule ;
- ▷ si λ et h augmentent, alors T_{\max} diminue, ce qui est cohérent ces deux grandeurs quantifient la capacité de la plaque à évacuer la chaleur ;
- ▷ si la conductivité du matériau σ augmente, alors T_{\max} diminue, ce qui est cohérent car il y a moins de puissance fournie à la plaque par effet Joule.

Le profil de température est représenté figure 4. On note les discontinuités de température aux interfaces entre la plaque et l'air, c'est-à-dire en $x = 0$ et en $x = e$.

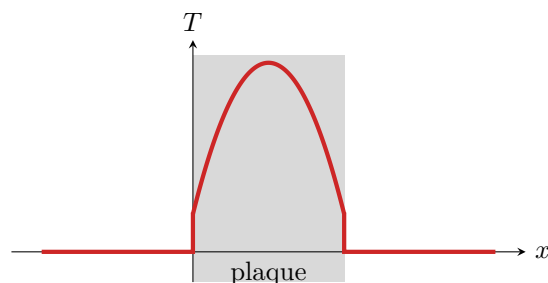


Figure 4 – Profil de température dans la plaque.


5 Avec la loi de Fourier,

$$\Phi(x) = \iint_{\text{section}} \vec{j}_{\text{th}} \cdot \vec{dS} = -\lambda \frac{dT}{dx} L \ell = \frac{2J_0^2}{\sigma} L \ell \left(x - \frac{e}{2} \right).$$

Bilans thermiques divers et variés

Exercice 11 : Four industriel

oral banque PT | 💡 2 | ✂ 2

- 
 ▷ *Transitoire thermique ;*
 ▷ *Équation de la chaleur ;*
 ▷ *Temps caractéristique de diffusion.*

1 Procédons à un bilan enthalpique pour la pièce entre t et $t + dt$. La surface de la pièce vaut $6a^2$, donc elle reçoit le flux thermique

$$P = P_s \times 6a^2 = 6a^2 h(T_a - T).$$

Ainsi,

$$\frac{dH}{dt} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Joule}}}{=} \rho a^3 c_p \frac{dT}{dt} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er P}}}{=} 6a^2 h(T_a - T)$$

d'où on déduit

$$\rho a c_p \frac{dT}{dt} + 6hT = 6hT_a \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{dT}{dt} + \frac{6h}{\rho a c_p} T = \frac{6h}{\rho a c_p} T_a.}$$

En posant $\tau = \rho a c_p / 6h$ et T_0 la température initiale de la pièce, cette équation différentielle se résout en

$$\boxed{T(t) = T_a + (T_0 - T_a) e^{-t/\tau} .}$$

2 Par définition, $T(t = \tau_c) = T_c$, c'est-à-dire

$$T_c = T_a + (T_0 - T_a) e^{-\tau_c/\tau} \quad \text{soit} \quad e^{-\tau_c/\tau} = \frac{T_c - T_a}{T_0 - T_a}$$

d'où on déduit

$$\tau_c = -\tau \ln \frac{T_c - T_a}{T_0 - T_a}$$

et en inversant le ln et en remplaçant τ par son expression, il vient enfin

$$\boxed{\tau_c = \frac{\rho a c_p}{6h} \ln \frac{T_0 - T_a}{T_c - T_a} .}$$

Ce temps τ_c correspond à la durée que la pièce doit passer dans le four. Sachant que le tapis roulant a une longueur L , on doit avoir $\tau_c = L/V_0$ d'où

$$\boxed{V_0 = \frac{6hL}{\rho a c_p \ln \frac{T_0 - T_a}{T_c - T_a}} .}$$

3 Cf. cours pour la démonstration, on aboutit à

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{avec} \quad D = \frac{\lambda}{\rho c} .}$$

Par analyse dimensionnelle de l'équation de diffusion, on trouve $[D] = L^2 T^{-1}$. Cherchons par analyse dimensionnelle le temps τ_d caractéristique de la diffusion sur une longueur a , en le prenant sous la forme

$$\tau_d = D^\alpha a^\beta$$

avec les exposants α et β constants. L'équation aux dimensions s'écrit

$$T = L^{2\alpha} T^{-\alpha} \times L^\beta$$

d'où on déduit par identification

$$\begin{cases} 1 = -\alpha \\ 0 = 2\alpha + \beta \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 2 \end{cases}$$

si bien que

$$\tau_d = \frac{a^2}{D}.$$

4 Pour que la température de la pièce soit uniforme en sortie du four, il faut avoir

$$\tau_d \ll \tau_c \quad \text{donc} \quad \frac{a^2 \rho c_p}{\lambda} \ll \frac{\rho a c_p}{6h} \ln \frac{T_0 - T_a}{T_c - T_a} \quad \text{soit} \quad a \ll \frac{\lambda}{6h} \ln \frac{T_0 - T_a}{T_c - T_a}.$$

Exercice 12 : Bilan thermique d'un astéroïde

oral banque PT | 💡 2 | ✂ 2



- ▷ Régime permanent ;
- ▷ Source thermique ;
- ▷ Coordonnées sphériques.

Les compte-rendus des candidats mentionnent qu'il y avait beaucoup de texte parlant de, je cite, « ce qu'est un astéroïde et les métaux précieux qu'ils contiennent ». Des valeurs numériques étaient fournies au candidat ... mais ce n'est pas évident à reconstituer, on fera donc sans.

1 L'hypothèse d'équilibre thermodynamique indique que la température ne dépend **pas du temps**, et celle d'astéroïde sphérique qu'elle ne dépend **que de r**.

2 Raisonnons sur une transformation infinitésimale de durée dt .

Comme on est en régime stationnaire, c'est de toute façon sans importance : la durée de la transformation se simplifiera en fin des calculs. Il aurait été plus judicieux que l'énoncé demande de calculer les puissances thermiques.

Compte tenu de la question précédente, $\vec{j} = j_r(r) \vec{e}_r$. Le flux conductif sortant de la sphère de rayon r vaut donc

$$\phi_{\text{cond}} = \iint_{\text{sphère}} j_r(r) \vec{e}_r \cdot dS \vec{e}_r = j_r(r) \iint dS \quad \text{soit} \quad \phi_{\text{cond}} = 4\pi r^2 j_r(r).$$

Or d'après la loi de Fourier et compte tenu des symétries,

$$j_r = -\lambda \frac{dT}{dr}.$$

Ainsi, puisque $\delta Q_{\text{cond}} = \phi_{\text{cond}} dt$,

$$\delta Q_{\text{cond}} = -4\pi r^2 \lambda \frac{dT}{dr} dt.$$

3 On somme cette fois sur le volume de la sphère étudiée,

$$\delta Q_{\text{rad}} = \iiint \mathcal{P} d\tau dt \quad \text{d'où} \quad \delta Q_{\text{rad}} = \frac{4}{3} \pi r^3 \mathcal{P} dt.$$

4 Énoncé rigoureux : cf. cours ... le candidat mentionne de toute façon dans son compte-rendu que « ça n'intéressait pas l'examineur qui ne voulait que l'équation ».

Étant en régime stationnaire, et comme δQ_{cond} est une énergie *cédée*,

$$dH = 0 = \delta Q_{\text{rad}} - \delta Q_{\text{cond}} \quad \text{d'où} \quad \delta Q_{\text{rad}} = \delta Q_{\text{cond}}.$$

5 Ainsi,

$$\frac{4}{3} \pi r^3 \mathcal{P} dt = -4\pi r^2 \lambda \frac{dT}{dr} dt \quad \text{soit} \quad \frac{\mathcal{P}r}{3} = -\lambda \frac{dT}{dr}.$$

On peut intégrer p.ex. en séparant les variables,

$$\int_{T_0}^{T(r)} dT = -\frac{\mathcal{P}}{3\lambda} \int_0^r r dr \quad \text{soit} \quad T(r) - T_0 = -\frac{\mathcal{P}}{3\lambda} \left(\frac{r^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right)$$

ce qui donne

$$T(r) = T_0 - \frac{\mathcal{P}}{6\lambda} r^2.$$

Remarquer qu'on obtient ici une expression de la température dans l'astéroïde de façon bien plus simple qu'en démontrant et résolvant l'équation de diffusion.

6 Appliquons le premier principe à l'astéroïde tout entier.

$$\frac{dH}{dt} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er P}}}{=} \mathcal{P} \times \frac{4}{3}\pi R^3 - \mathcal{P}_{\text{ray}} \times 4\pi R^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{stat}}}{=} 0$$

d'où on déduit

$$\mathcal{P}_{\text{ray}} = \frac{\mathcal{P}R}{3} \quad \text{soit} \quad \sigma T_s^4 = \frac{\mathcal{P}R}{3} \quad \text{d'où} \quad T_s = \left(\frac{\mathcal{P}R}{3\sigma} \right)^{1/4}.$$

On peut alors en déduire la température au centre,



$$T_0 = \left(\frac{\mathcal{P}R}{3\sigma} \right)^{1/4} + \frac{\mathcal{P}}{6\lambda} R^2.$$

Ce résultat peut également s'obtenir en écrivant la continuité du flux à la surface de l'astéroïde :

$$\phi_{\text{cond}}(r=R) = \mathcal{P}_{\text{ray}} \quad \rightsquigarrow \quad -\lambda \frac{dT}{dr} = \sigma T_s^4.$$

Cette relation traduit simplement que l'énergie ne s'accumule pas en surface de l'astéroïde : toute l'énergie atteignant sa surface par conduction est immédiatement cédée par rayonnement. Attention à ne pas confondre avec la conservation du flux : ici, le flux n'est pas conservatif à cause de la production d'énergie par radioactivité.

Exercice 13 : Effet de cave

exemple officiel banque PT |  2 |  3



- ▷ Régime sinusoïdal forcé ;
- ▷ Analogie électromagnétique.

1 Voir cours. On aboutit à

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{D} \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad \text{avec} \quad D = \frac{\lambda}{\rho c} = 3,1 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}.$$

2 On peut prendre

$$T(x=0, t) = T_0 - T_1 \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right)$$

avec $T_0 = (T_{\text{max}} + T_{\text{min}})/2 = 12,5^\circ\text{C}$ la température moyenne ; $T_1 = (T_{\text{max}} - T_{\text{min}})/2 = 27,5\text{ K}$ l'amplitude des variations de température et $T = 365$ jours la période.

3 Insérons la forme de solution proposée dans l'équation de la chaleur,

$$\underline{f}''(x) e^{i\omega t} - \frac{i\omega}{D} \underline{f}(x) e^{i\omega t} = 0$$

ce qui se simplifie en

$$\underline{f}''(x) - \frac{i\omega}{D} \underline{f}(x) = 0 \quad \text{soit} \quad \underline{f}''(x) - \frac{2i}{\delta^2} \underline{f}(x) = 0 \quad \text{avec} \quad \delta = \sqrt{\frac{2\lambda}{\rho c \omega}} = \sqrt{\frac{2\lambda T}{\pi \rho c}} = 2,5 \text{ m}.$$

Le polynôme caractéristique de cette équation différentielle donne

$$r^2 = \frac{2i}{\delta^2} = \frac{2e^{i\pi/2}}{\delta^2} = \frac{2(e^{i\pi/4})^2}{\delta^2} \quad \text{soit} \quad r = \pm \frac{\sqrt{2}}{\delta} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \pm \frac{1+i}{\delta}.$$

On en déduit d'abord

$$\underline{f}(x) = A \exp\left(\frac{1+i}{\delta}x\right) + B \exp\left(-\frac{1+i}{\delta}x\right),$$

puis

$$\underline{T}(x, t) = T_0 + \left[A \exp\left(\frac{1+i}{\delta}x\right) + B \exp\left(-\frac{1+i}{\delta}x\right) \right] e^{i\omega t}.$$

La première exponentielle diverge pour $x \rightarrow \infty$, ce qui est physiquement impossible pour la température, d'où on déduit $A = 0$. Au niveau du sol, la condition limite s'écrit

$$\underline{T}(x=0, t) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CL}}}{=} T_0 + T_1 e^{i\omega t} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{expr}}}{=} T_0 + B e^{i\omega t} \quad \text{d'où} \quad B = T_1.$$

En conclusion, on a donc en complexes

$$\underline{T}(x, t) = T_0 + T_1 \exp\left(-\frac{1+i}{\delta}x\right) e^{i\omega t}$$

et en revenant aux grandeurs réelles

$$T(x, t) = T_0 + T_1 e^{-x/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right).$$

4 Notons h l'épaisseur de la couche de tuffeau au dessus de la cave. On fait l'hypothèse que la température de la cave T_c est égale à $T(x=h, t)$... ce qui n'est pas du tout évident a priori car on pourrait tout à fait imaginer tenir compte de la hauteur de la cave. D'après la question précédente,

$$T_c = T_0 + T_1 e^{-h/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{h}{\delta}\right)$$

• **Première méthode : avec l'amplitude.** L'amplitude des variations de température au sein de la cave vaut

$$\Delta T \underset{\substack{\uparrow \\ \text{expr}}}{=} T_1 e^{-h/\delta} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{courbe}}}{=} \frac{T_{c,\max} - T_{c,\min}}{2}.$$

On en déduit

$$e^{-h/\delta} = \frac{T_{c,\max} - T_{c,\min}}{2T_1} \quad \text{d'où} \quad h = \delta \ln \frac{2T_1}{T_{c,\max} - T_{c,\min}} = 3,61 \text{ m}.$$

• **Seconde méthode : avec le déphasage.** La température minimale dans la cave n'est pas atteinte au 1^{er} janvier, mais avec un retard d'environ 80 jours. La température au sein de la cave peut se réécrire

$$T_c = T_0 + T_1 e^{-h/\delta} \cos\left[\omega\left(t - \frac{h}{\omega\delta}\right)\right]$$

ce qui permet d'identifier l'expression du retard

$$\tau = \frac{h}{\omega\delta} \quad \text{soit} \quad h = \frac{2\pi}{T} \tau \delta = 3,45 \text{ m}.$$

Compte tenu des incertitudes de lecture graphique de la courbe de température, ce résultat peut être considéré comme étant cohérent avec le précédent.

5 Ce phénomène d'effet de cave est l'analogue à l'**effet de peau** lors de l'absorption d'une onde électromagnétique dans un conducteur ohmique ... ce qui n'est pas une surprise : l'équation de propagation d'une OEM dans un conducteur ohmique est une équation de diffusion. Enterrer une cave à champagne à plusieurs dizaines de mètres de profondeur permet d'amortir totalement les variations saisonnières de température, et donc de conserver ses précieux millésimes à température constante.

Exercice 14 : Gel d'un lac

oral Centrale PSI | 💡 3 | ✂ 3



- ▷ Résistance thermique ;
- ▷ Changement d'état.

1 En régime stationnaire, le plus simple est d'utiliser la résistance thermique. En notant S la surface de glace, la couche d'épaisseur e a une résistance thermique

$$R = \frac{e}{\lambda S}.$$

Le flux Φ au travers de la couche de glace vaut donc

$$\Phi = \frac{T_f - T_s}{R} = \frac{\lambda S(T_f - T_s)}{e}.$$

Or par définition $\Phi = j_Q S$ d'où on déduit

$$j_Q = \frac{\lambda(T_f - T_s)}{e}.$$

Compte tenu du sens dans lequel j'ai choisi d'orienter la différence de température, cette densité de courant thermique est orientée vers le haut, de l'eau du lac vers l'air.

Une autre méthode possible consiste à commencer par déterminer le profil de température $T(z)$ dans la glace à partir de l'équation de diffusion en régime stationnaire $\Delta T = \frac{d^2 T}{dz^2} = 0$ et des conditions aux limites, puis d'utiliser la loi de Fourier.

2 Supposons le régime quasi-stationnaire, et procédons à un bilan enthalpique pour la couche infinitésimale d'eau de surface S qui gèle entre t et $t + dt$, de masse $\mu S de$. Elle ne reçoit pas de transfert thermique de la part de l'eau du lac, car elle est à la même température, et cède le transfert thermique $j_Q S dt$ à la glace. Ainsi,

$$dH \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er ppe}}}{=} 0 - j_Q S dt \underset{\substack{\uparrow \\ \text{gel}}}{=} -\mu S de \ell$$

car l'enthalpie de solidification est l'opposée de l'enthalpie de fusion. Ainsi,

$$\frac{\lambda(T_f - T_s)}{e} S dt = \mu S \ell de$$

d'où on déduit finalement

$$\frac{de}{dt} = \frac{\lambda(T_f - T_s)}{\mu \ell e}.$$

3 Procédons par séparation des variables,

$$e de = \frac{\lambda(T_f - T_s)}{\mu \ell} dt$$

soit en intégrant

$$\int_{e(0)}^{e(t)} e de = \frac{\lambda(T_f - T_s)}{\mu \ell} \int_0^t dt$$

d'où

$$\frac{1}{2} [e(t)^2 - 0] = \frac{\lambda(T_f - T_s)}{\mu \ell} t$$

et ainsi

$$e(t) = \sqrt{\frac{2\lambda(T_f - T_s)}{\mu \ell} t}.$$

Numériquement, l'épaisseur vaut 11 cm au bout d'une journée, 29 cm au bout d'une semaine et 60 cm au bout d'un mois. C'est donc dans les premiers jours de gel que la couche de glace se forme le plus rapidement : comme on le constate sur l'expression de R , la couche de glace joue le rôle d'un isolant d'autant plus performant qu'il est épais.

Pour intégrer l'équation différentielle, on peut également reconnaître

$$e \frac{de}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (e^2),$$

et utiliser la condition initiale $e(0) = 0$.

Exercice 15 : Combinaison de plongée

oral CCINP PSI | 💡 3 | ✂ 2



▷ Résolution de problème.

On est a priori dans un régime transitoire, mais vues les données on suppose pouvoir le traiter dans le cadre de l'ARQS ... et donc utiliser les résistances thermiques.

1 La puissance P_{conv} est un flux, auquel on peut associer la résistance thermique $R_{\text{conv}} = 1/\alpha S = 0,05 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$ en prenant $S \sim 2 \text{ m}^2$ la surface de la peau. La peau et cette résistance conducto-convective sont montées en série, donc

$$R_{\text{tot}} = R_{\text{conv}} + R_{\text{peau}} = 8 \cdot 10^{-2} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}.$$

Le premier principe appliqué au baigneur pendant une durée infinitésimale dt donne

$$dH = mc_{\text{corps}} dT = -\Phi_{\text{tot}} dt + P_{\text{corps}} dt = \frac{T_{\text{mer}} - T}{R_{\text{tot}}} dt + P_{\text{corps}} dt$$

Comme la chute de température qui conduit à l'hypothermie est bien plus faible que l'écart de température entre le corps et la mer, on peut estimer grossièrement l'ordre de grandeur sans résoudre l'équation différentielle en supposant $T_{\text{mer}} - T(t) \simeq T_{\text{mer}} - T_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$. Alors,

$$mc_{\text{corps}} \Delta T = \left(\frac{T_{\text{mer}} - T_0}{R_{\text{tot}}} + P_{\text{corps}} \right) \Delta t$$

soit

$$\Delta t = \frac{mc_{\text{corps}}}{\frac{T_{\text{mer}} - T_0}{R_{\text{tot}}} + P_{\text{corps}}} \Delta T$$

Numériquement, pour un baigneur de masse $m = 70 \text{ kg}$,

$$\Delta t \simeq 3,2 \cdot 10^3 \text{ s} = 53 \text{ minutes},$$

ce qui semble raisonnable.

2 À la résistance totale à il faut ajouter celle de la combinaison, qu'on modélise comme une paroi plane,

$$R_{\text{combi}} = \frac{e}{\lambda_{\text{néo}} S}$$

Le premier principe mis sous forme d'une équation différentielle s'écrit

$$mc_{\text{corps}} \frac{dT}{dt} + \frac{T}{R_{\text{tot}}} = \frac{T_{\text{mer}}}{R_{\text{tot}}} + P_{\text{corps}}$$

Au bout d'un temps infini, le transitoire est terminé, et seule reste la solution particulière qui est constante :

$$0 + \frac{T_{\infty}}{R_{\text{tot}}} = \frac{T_{\text{mer}}}{R_{\text{tot}}} + P_{\text{corps}} \quad \text{soit} \quad T_{\infty} = T_{\text{mer}} + R_{\text{tot}} P_{\text{corps}}.$$

On veut $T_{\infty} > T_{\text{hypo}} = 35 \text{ }^\circ\text{C}$, et il ne reste qu'à résoudre pour trouver e . À toi de bosser !)