

Équations de Maxwell

Énergie électromagnétique

Exercice 1 : Chauffage par induction



- ▷ Équations de Maxwell ;
- ▷ Puissance volumique d'effet Joule ;
- ▷ Intégration de dérivées partielles.

1 Voir la figure 1. En orientant l'axe z par rapport au courant i (règle de la main droite), le champ créé par le solénoïde s'écrit

$$\vec{B} = \mu_0 n i \vec{e}_z$$

avec n le nombre de spires par unité de longueur. L'expression est identique dans l'ARQS et en magnétostatique.

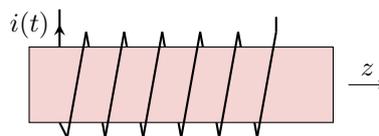


Figure 1 – Dispositif de soudure inductive.

2 L'équation de Maxwell-Faraday indique qu'un champ magnétique dépendant du temps est source de champ électrique. Au sein du métal, ce champ électrique va faire apparaître une densité de courant \vec{j} et céder de l'énergie au métal par effet Joule.

Une autre justification moins orientée « équations » consisterait à dire que le métal est un conducteur placé dans un champ magnétique variable, et est donc le siège d'un phénomène d'induction. Ce sont les courants induits (les courants de Foucault) qui vont chauffer le matériau par effet Joule.

3 D'après l'équation de Maxwell-Faraday,

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu_0 n \frac{di}{dt} \vec{e}_z = +\mu_0 n I_0 \omega \sin(\omega t) \vec{e}_z$$

et en utilisant le formulaire

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial r E_\theta}{\partial r} \vec{e}_z$$

d'où on déduit

$$\frac{\partial r E_\theta}{\partial r} = \mu_0 n I_0 \omega \sin(\omega t).$$

En intégrant par rapport à r ,

$$r E_\theta = \mu_0 n I_0 \omega \sin(\omega t) \frac{r^2}{2} + f(t).$$

Comme on intègre une dérivée partielle pour laquelle certaines variables (ici t) sont fixées, alors la constante d'intégration est une « constante partielle », c'est-à-dire une fonction des variables fixées.

On montre que la fonction f est nulle en se plaçant en $r = 0$: comme il n'y a « rien de spécial » en ce point, la composante E_θ y prend une valeur finie. Finalement,

$$\vec{E} = \frac{1}{2} \mu_0 n r I_0 \omega \sin(\omega t) \vec{e}_\theta.$$

L'analyse des invariances est identique à celle menée en électrostatique. En revanche, celle des symétries est beaucoup plus subtile à cause du champ magnétique variable, et hors de portée en PT : comme c'est $\vec{\text{rot}} \vec{E}$ qui intervient dans l'équation de Maxwell-Faraday, alors un plan de symétrie de $\partial \vec{B} / \partial t$ est plan d'antisymétrie de \vec{E} ... ce qui est la propriété inverse par rapport à la charge électrique, car ρ apparaît dans l'équation de Maxwell-Gauss qui porte sur $\text{div} \vec{E}$.

L'énoncé impose l'utilisation de l'équation de Maxwell-Faraday, mais aurait-il été possible de passer par l'équation de Maxwell-Ampère ? Ici, la réponse est non, pour des raisons de cohérence avec l'hypothèse d'ARQS magnétique utilisée pour exprimer le champ magnétique créé par la bobine. Dans cette limite, le courant de déplacement est négligé devant le courant de conduction dans l'équation de Maxwell-Ampère, si bien que l'équation de Maxwell-Ampère n'implique plus le champ électrique ... et n'est donc plus utilisable pour le calculer.

4 D'après la loi d'Ohm locale,

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} = \frac{1}{2} \mu_0 \gamma n r I_0 \omega \sin(\omega t) \vec{e}_\theta.$$

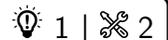
On en déduit la puissance volumique dissipée par effet Joule,

$$\mathcal{P} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{1}{4} \gamma \mu_0^2 n^2 r^2 I_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t).$$

Elle est maximale lorsque r est maximal, c'est donc sur les bords du cylindre que le métal chauffe le plus et qu'il fond en premier.

On retrouve un phénomène d'effet de peau analogue à celui que nous rencontrerons en étudiant les ondes électromagnétiques : dans un conducteur en régime variable, les courants sont repoussés à l'extérieur du matériau.

Exercice 2 : Manipulation des équations de Maxwell



▷ Équations de Maxwell.

1 Par définition,

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0$$

ce qui est conforme à l'équation de Maxwell-Gauss car $\rho = 0$ par hypothèse. De même,

$$\text{div} \vec{B} = \frac{\partial B_y}{\partial y} = 0$$

ce qui est là aussi conforme à l'équation de Maxwell-Thomson.

2 Compte tenu de la forme des champs,

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = f'(z) e^{-t/\tau} \vec{e}_y \quad \text{et} \quad -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{\tau} g(z) e^{-t/\tau} \vec{e}_y$$

d'où on déduit de l'équation de Maxwell-Faraday

$$f'(z) = \frac{1}{\tau} g(z)$$

3 Compte tenu de la forme des champs,

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = -g'(z) e^{-t/\tau} \vec{e}_x \quad \text{et} \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{1}{\tau} f(z) e^{-t/\tau} \vec{e}_x.$$

d'où on déduit de l'équation de Maxwell-Ampère

$$g'(z) = \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{\tau} f(z) e^{-t/\tau}.$$

4 En dérivant par rapport à z l'équation obtenue par Maxwell-Faraday, on obtient

$$f''(z) = \frac{1}{\tau} g'(z)$$

et en combinant avec la question précédente on obtient

$$f''(z) - \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{\tau^2} f(z) = 0.$$

Il s'agit d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants portant sur la seule variable z . Son polynôme caractéristique admet pour racines

$$r_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{\mu_0 \varepsilon_0}{\tau^2}} = \pm \frac{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}{\tau}$$

▮ Dans un cas aussi simple, pas besoin de passer par le discriminant !

La solution particulière est nulle et la solution homogène est

$$f(z) = \alpha \exp\left(-\frac{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}{\tau} z\right) + \beta \exp\left(\frac{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}{\tau} z\right)$$

Les conditions données par l'énoncé imposent que $\beta = 0$ et que $f(z=0) = E_0 = \alpha$. On en déduit :

$$\vec{E} = E_0 \exp\left(-\frac{1}{\tau} (t + \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} z)\right) \vec{e}_x.$$

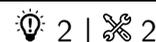
5 D'après ce qui précède,

$$g(z) = \tau f'(z) = -E_0 \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} \exp\left(-\frac{1}{\tau} (t + \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} z)\right)$$

d'où on déduit

$$\vec{B} = -E_0 \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} \exp\left(-\frac{1}{\tau} (t + \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} z)\right) \vec{e}_y.$$

Exercice 3 : Solénoïde dans l'ARQS



- ▷ ARQS magnétique;
- ▷ Bilan d'énergie.

1 Temps caractéristique de variation des sources de champ (ici $1/\omega$) très supérieur au temps de propagation de l'OEM le long du solénoïde (ici a/c car invariance suivant z), soit

$$\frac{1}{\omega} \gg \frac{a}{c} \quad \text{soit} \quad \omega \ll \frac{c}{a}.$$

Dans ce cas, $\vec{B}_{\text{ext}} = \vec{0}$ et

$$\vec{B}_{\text{int}} = \mu_0 n I_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z$$

2 On a

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu_0 n I_0 \sin(\omega t) \vec{e}_z$$

donc le plan contenant l'axe (Oz) et passant par M est plan de symétrie, donc \vec{E} orthogonal à ce plan, donc orthoradial. Invariance par translation et rotation. D'après l'équation de Maxwell-Faraday,

$$\frac{\partial r E_{\theta}}{\partial r} = \mu_0 n I_0 \omega \sin(\omega t).$$

En intégrant par rapport à r ,

$$r E_{\theta} = \mu_0 n I_0 \omega \sin(\omega t) \frac{r^2}{2} + f(t).$$

Comme on intègre une dérivée partielle pour laquelle certaines variables (ici t) sont fixées, alors la constante d'intégration est une « constante partielle », c'est-à-dire une fonction des variables fixées.

On montre que la fonction f est nulle en se plaçant en $r = 0$: comme il n'y a « rien de spécial » en ce point, la composante E_θ y prend une valeur finie. Finalement,

$$\vec{E} = \frac{1}{2} \mu_0 n r I_0 \omega \sin(\omega t) \vec{e}_\theta.$$

3 Densité volumique d'énergie magnétique :

$$w_m = \frac{\mu_0^2 n^2 I_0^2 \cos^2(\omega t)}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 n^2 I_0^2 \cos^2(\omega t)}{2}$$

uniforme donc sur tout le volume

$$U_m = \frac{\mu_0 n^2 I_0^2 \cos^2(\omega t)}{2} \pi a^2 H$$

et en moyenne temporelle

$$\langle U_m \rangle = \frac{\mu_0 n^2 I_0^2 \pi a^2 H}{4}$$

Densité volumique d'énergie électrique :

$$w_e = \frac{1}{8} \varepsilon_0 \mu_0^2 n^2 r^2 I_0^2 \omega^2 \sin(\omega t)^2$$

soit sur le volume

$$\begin{aligned} U_e &= \iiint w_e r dr d\theta dz \\ &= \frac{1}{8} \varepsilon_0 \mu_0^2 n^2 I_0^2 \omega^2 \sin(\omega t)^2 \int_0^a r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^H dz \\ &= \frac{1}{8} \varepsilon_0 \mu_0^2 n^2 I_0^2 \omega^2 \sin(\omega t)^2 \frac{a^4}{4} 2\pi H \end{aligned}$$

soit en moyenne temporelle

$$\begin{aligned} \langle U_e \rangle &= \frac{1}{8} \varepsilon_0 \mu_0^2 n^2 I_0^2 \omega^2 \frac{1}{2} \frac{a^4}{4} 2\pi H \\ &= \frac{\pi}{32} \varepsilon_0 \mu_0^2 n^2 I_0^2 \omega^2 a^4 H. \end{aligned}$$

On en déduit en posant le calcul

$$\frac{\langle U_e \rangle}{\langle U_m \rangle} = \frac{\omega^2 a^2}{8c^2} \ll 1$$

On est donc bien en ARQS « magnétique », c'est l'effet de \vec{B} qui domine.

4 Vecteur de Poynting :

$$\begin{aligned} \vec{\Pi} &= \frac{1}{\mu_0} \times \frac{1}{2} \mu_0 n r I_0 \omega \sin(\omega t) \times \mu_0 n I_0 \cos(\omega t) (\vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_z) \\ &= \frac{1}{4} \mu_0 n^2 I_0^2 \omega r \sin(2\omega t) \vec{e}_r. \end{aligned}$$

5 On redémontre le bilan de puissance,

$$\frac{d}{dt} [U_e(t) + U_m(t)] = - \oiint \vec{\Pi} \cdot d\vec{S}.$$

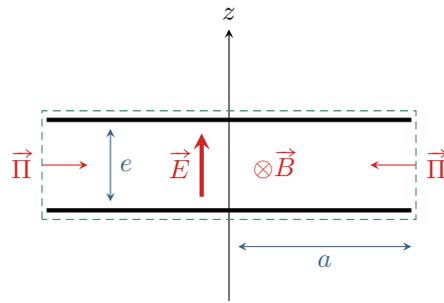
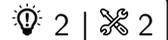


Figure 2 – Schéma des notations.

Exercice 4 : Échanges énergétiques lors de la charge d'un condensateur



- ▷ Équations de Maxwell ;
- ▷ Bilan d'énergie électromagnétique.

Le condensateur étudié est schématisé figure 2.

- 1** D'après la loi des mailles,

$$U_0 = Ri + u$$

et avec la loi de comportement du condensateur on en déduit

$$RC \frac{du}{dt} + u = U_0$$

ce qui se met sous forme canonique

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{\tau} u = \frac{U_0}{\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = RC.$$

Cette équation admet U_0 comme solution particulière, et les solutions homogènes sont de la forme $A e^{-t/\tau}$, ainsi

$$u(t) = A + U_0 e^{-t/\tau}$$

Comme le condensateur est initialement déchargé, alors

$$u(t=0) = 0 = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CI}}}{A} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sol}}}{U_0}$$

d'où on a finalement

$$u(t) = U_0 \left(1 - e^{-t/\tau} \right).$$

- 2** Par définitions, la charge stockée sur le condensateur vaut

$$q = \sigma \pi a^2 = C u = \varepsilon_0 \frac{\pi a^2}{e} u \quad \text{d'où} \quad \sigma = \frac{\varepsilon_0}{e} u$$

et ainsi

$$\vec{E} = \frac{u(t)}{e} \vec{e}_z.$$

- 3** Les sources de champ magnétique sont les courants et les variations de champ électrique. Il n'y a pas de courant entre les armatures, la seule source de champ magnétique est donc le champ électrique, ou plus exactement ses variations. L'équation de Maxwell-Ampère s'écrit

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

ce qui montre que \vec{j} et $\partial \vec{E} / \partial t$ jouent un rôle analogue. Leurs symétries ont donc les mêmes conséquences sur le champ magnétique.

D'après la question précédente,

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{e} \frac{du}{dt} \vec{e}_z.$$

On se place en un point M quelconque. Le plan passant par M et contenant l'axe (Oz) (plan M, \vec{e}_r, \vec{e}_z) est plan de symétrie de $\partial \vec{E} / \partial t$, \vec{B} est donc orthogonal à ce plan,

$$\vec{B}(M, t) = B_\theta(M, t) \vec{e}_\theta.$$

4 L'équation de Maxwell-Thomson donne

$$\frac{1}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} = 0$$

c'est-à-dire que \vec{B} est indépendant de θ . De plus, l'équation de Maxwell-Ampère donne

$$-\frac{\partial B_\theta}{\partial z} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial(rB_\theta)}{\partial r} \vec{e}_z = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{1}{e} \frac{du}{dt} \vec{e}_z.$$

On en déduit d'une part que

$$\frac{\partial B_\theta}{\partial z} = 0$$

c'est-à-dire que \vec{B} est indépendant de z , et d'autre part que

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rB_\theta)}{\partial r} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{1}{e} \frac{du}{dt}.$$

Cette relation donne

$$\frac{\partial(rB_\theta)}{\partial r} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{1}{e} \frac{du}{dt} r$$

ce qui s'intègre en

$$rB_\theta = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{1}{e} \frac{du}{dt} \frac{r^2}{2} + f(t).$$

Le champ \vec{B} ne pouvant diverger en $r = 0$ où ses sources n'ont pas de singularité, la fonction $f(t)$ est forcément nulle. On en déduit donc

$$\vec{B} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \mu_0 \frac{1}{e} \frac{du}{dt} r \vec{e}_\theta.$$

Comme on intègre une dérivée partielle, la « constante » d'intégration est en fait une « constante partielle », c'est-à-dire une fonction qui dépend des variables laissées constantes dans la dérivée partielle : ici, f doit a priori dépendre de z , θ et t ... mais elle ne dépend que de t car il a été montré par ailleurs que \vec{B} ne dépend ni de z ni de θ .

Par ailleurs, la méthode usuelle pour trouver un champ connaissant l'autre à partir des équations de Maxwell consiste à prendre le rotationnel du champ que l'on connaît : calculer un rotationnel est souvent infiniment plus simple que de l'intégrer ! Cette méthode est ici inopérante, et on peut même constater que l'équation de Maxwell-Faraday qu'il aurait été naturel d'utiliser conduit à une contradiction apparente : $\text{rot } \vec{E}$ est nul ... alors que la dérivée temporelle de \vec{B} ne l'est pas ! Le paradoxe vient du fait que l'expression de \vec{E} est celle obtenue dans l'ARQS électrique, approximation pour laquelle les équations de Maxwell portant sur \vec{E} s'écrivent comme en statique, ce qui revient à négliger les variations temporelles de \vec{B} . À partir des expressions trouvées dans l'exercice, on peut calculer l'ordre de grandeur des densités volumiques d'énergie électrique et magnétique :

$$w_e = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{u^2}{e^2} \quad \text{et} \quad w_m = \frac{\varepsilon_0 \mu_0 a^2}{4\tau^2} w_e.$$

Le terme $\varepsilon_0 \mu_0 a^2$ représente le carré de la durée nécessaire à une OEM pour se propager sur une longueur a , très inférieure au temps caractéristique d'évolution τ par hypothèse d'ARQS. On constate alors que l'énergie est essentiellement sous forme électrique, ce qui justifie la pertinence de l'hypothèse d'ARQS électrique.

5 Par définition,

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \left(\frac{u}{e} \vec{e}_z \right) \wedge \left(\frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{1}{e} \frac{du}{dt} r \vec{e}_\theta \right)$$

ce qui se simplifie en

$$\vec{\Pi} = -\frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{1}{e^2} u \frac{du}{dt} r \vec{e}_r.$$

Le flux du vecteur de Poynting correspond à une puissance sortant, la puissance entrant dans le condensateur s'écrit donc (on intègre sur la surface en pointillés verts de la figure 2)

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= - \oint_{\text{condensateur}} \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} \\ &= - \iint_{\text{sup}} \Pi_r \vec{e}_r \cdot dS \vec{e}_z - \iint_{\text{sup}} \Pi_r \vec{e}_r \cdot (-dS \vec{e}_z) - \iint_{\text{lat}} \Pi_r \vec{e}_r \cdot dS \vec{e}_r \\ &= 0 + 0 + \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{1}{e^2} u \frac{du}{dt} a \times 2\pi a e \\ \mathcal{P} &= \varepsilon_0 \frac{1}{e} u \frac{du}{dt} \pi a^2. \end{aligned}$$

Cette puissance vient de l'extérieur du condensateur, et la direction de $\vec{\Pi}$ montre qu'elle entre par les parois latérales.

Le fait que l'énergie entre dans le condensateur par les parois latérales, et pas par les fils électriques, est contre-intuitif et très paradoxal! La résolution du paradoxe vient d'une analogie très naturelle mais trompeuse avec la mécanique des fluides : en mécanique des fluides, c'est le mouvement du fluide qui entraîne le transport d'énergie. Au contraire, en électricité, les fils électriques transportent les charges et courants, qui sont des sources de champ électromagnétique, et ce sont ces champs qui assurent le transport de l'énergie. Ce paradoxe se manifeste également dans le temps de réponse d'un circuit : en ARQS, tous les points d'un circuit électrique réagissent instantanément à une modification de tension en un point de ce circuit ... alors même que les électrons de conduction n'avancent qu'à environ $0,1 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$! Ceci prouve que l'information n'est pas véhiculée par ces électrons mais par un autre canal, en l'occurrence une onde électromagnétique.

Un bilan analogue appliqué au générateur montrerait qu'il cède de la puissance. On peut en fait montrer que le générateur cède une puissance $2\mathcal{P}$, la moitié étant stockée par le condensateur et l'autre moitié dissipée par la résistance.

6 On peut réécrire la puissance reçue sous la forme

$$\mathcal{P} = \frac{\varepsilon_0 \pi a^2}{e} u \frac{du}{dt} = Cu \frac{du}{dt} \quad \text{soit} \quad \mathcal{P} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Cu^2 \right).$$

On reconnaît l'expression de l'énergie stockée dans le condensateur.

7 L'énergie reçue s'écrit

$$\mathcal{E} = \int_0^\infty \mathcal{P} dt = \left[\frac{1}{2} Cu^2 \right]_0^\infty$$

Avec l'expression de u déterminée à la première question (ou avec la condition initiale et la solution particulière), on obtient

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} CU_0^2.$$

Exercice 5 : Décharge d'un cylindre dans un autre

oral banque PT | 💡 2 | ✂ 2 | Ⓜ



▷ Équations de Maxwell.

Toutes les hypothèses ne sont pas clairement posées par l'énoncé, il est certainement attendu du candidat qu'il le fasse par lui-même.

1 Soit M un point se trouvant dans l'espace entre les deux cylindres. À tout instant, on suppose les deux cylindres sont uniformément chargés en surface, et on néglige tout effet de bord.

• **Symétries** : les plans $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ et $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ sont deux plans de symétrie de la distribution de charges, le champ $\vec{E}(M)$ doit donc appartenir à chacun de ces plans, ce qui impose

$$\vec{E}(M) = E_r(M) \vec{e}_r.$$

• **Invariances** : la distribution est invariante par toute rotation autour de l'axe (Oz) et par translation le long de cet axe, d'où on déduit

$$\vec{E}(M) = E_r(r) \vec{e}_r.$$

2 Pour $t < 0$, aucun courant n'existe dans le système, donc \vec{B} est nécessairement nul. Pour $t > 0$, le courant entre les deux cylindres est radial d'après la loi d'Ohm locale puisque \vec{E} l'est. Ainsi, les plans $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ et $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ sont deux plans de symétrie de la distribution de courant, le champ $\vec{B}(M)$ doit donc être *orthogonal* à ces deux plans, ce qui n'est pas possible à moins d'avoir

$$\vec{B}(M) = \vec{0}.$$

3 L'équation de Maxwell-Gauss et donc le théorème de Gauss prennent exactement la même forme en régime variable qu'en régime permanent. On peut donc l'appliquer à un cylindre de même hauteur h que les deux autres et de rayon $R_1 < r < R_2$. En supposant négligeable le temps de vol des charges au travers du fluide conducteur, la charge intérieure à la surface de Gauss est égale à la charge $Q(t)$ du cylindre de rayon R_1 . Ainsi,

$$E_r(r, t) \times 2\pi r h = \frac{Q(t)}{\varepsilon_0} \quad \text{d'où} \quad \vec{E}(r, t) = \frac{Q(t)}{2\pi\varepsilon_0 h r} \vec{e}_r.$$

4 Procédons par élimination pour savoir quelle équation de Maxwell utiliser. Il est d'abord évident que l'équation de Maxwell-Thomson n'apporte aucune information. Par ailleurs, les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Faraday ne font pas apparaître le temps (rappelons que \vec{B} est nul), et ne peuvent pas servir non plus. Il ne reste plus que l'équation de Maxwell-Ampère, qui s'écrit

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

ce qui devient dans notre contexte

$$\mu_0 \gamma \vec{E} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}.$$

En utilisant l'expression de \vec{E} obtenue précédemment puis en simplifiant, on en déduit l'équation différentielle vérifiée par Q :

$$\varepsilon_0 \frac{dQ}{dt} + \gamma Q = 0$$

qui se résout en

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = \varepsilon_0 / \gamma.$$

Ce temps caractéristique permet de formuler de manière plus précise l'hypothèse sur le temps de vol des charges dans l'espace entre les deux cylindres : en notant v une vitesse typique, le temps de vol est négligeable si

$$\frac{R_2 - R_1}{v} \ll \tau$$

... et pour trouver v on pourrait envisager de l'estimer via le théorème de l'énergie cinétique entre les deux cylindres, en supposant que les charges quittent le cylindre de rayon R_1 avec une vitesse nulle.

5 Il ne se serait rien passé du tout! Qualitativement, le cylindre 1 se décharge car les charges à sa surface se repoussent, et pour minimiser cette répulsion tendent à s'étaler sur une plus grande surface, celle du cylindre de rayon R_2 . Le mécanisme inverse n'est évidemment pas possible. De manière plus mathématique, si le cylindre de rayon R_2 était chargé alors le champ dans l'espace entre les cylindres serait nul, et une charge qui quitterait le cylindre de rayon R_2 , a priori sans vitesse initiale, ne subirait aucune force à même de l'accélérer et de l'emmener rejoindre l'autre cylindre.

Exercice 6 : Décharge d'une boule chargée dans l'air

- ▷ Équations de Maxwell ;
- ▷ Bilan d'énergie électromagnétique.

1 La décharge est par hypothèse isotrope, donc \vec{j} est radial, et il y a invariance des distributions de charge et de courant par rotation autour de O .

▷ Conséquence 1 : $\vec{E}(M, t) = E_r(r, t) \vec{e}_r$;

▷ Conséquence 2 : $\vec{B}(M, t) = \vec{0}$.

2 L'équation de Poynting se réécrit

$$\operatorname{div} \vec{\Pi} + \frac{\partial u_{\text{em}}}{\partial t} = -p_J$$

avec $\vec{\Pi}$ le vecteur de Poynting, qui traduit la puissance rayonnée, u_{em} la densité volumique d'énergie électromagnétique, qui traduit le stockage d'énergie, et enfin p_J la puissance volumique dissipée par effet Joule.

Comme le champ magnétique est nul on en déduit

$$0 + \varepsilon_0 E_r(r, t) \frac{\partial E_r(r, t)}{\partial t} = -\gamma E_r(r, t)^2 \quad \text{soit} \quad \frac{\partial E_r}{\partial t} + \frac{\gamma}{\varepsilon_0} E_r = 0.$$

Cette équation se résout en

$$\vec{E}(M, t) = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2} e^{-t/\tau} \vec{e}_r \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{\varepsilon_0}{\gamma}.$$

La condition initiale $\vec{E}(M, t=0)$ se détermine avec le théorème de Gauss.

3 L'équation de Maxwell-Gauss ne dépend pas du temps, donc le théorème de Gauss s'applique aussi en régime variable. En raisonnant sur la sphère de rayon R , qui coïncide avec la boule, on trouve

$$4\pi r^2 E_r(r, t) = \frac{Q(t)}{\varepsilon_0} \quad \text{d'où} \quad \boxed{Q(t) = Q_0 e^{-t/\tau}}.$$

4 Méthode 1 : intégrer sur tout l'espace la puissance volumique dissipée par effet Joule, ce qui donne

$$\mathcal{P}_{\text{Joule}} = \iiint \gamma E_r(r, t)^2 \underbrace{4\pi r^2 dr}_{=d\tau} = \frac{\gamma Q(t)^2}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

puis ensuite intégrer pour t allant de 0 à l'infini, d'où

$$\mathcal{E}_{\text{diss}} = \frac{Q_0^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

On retrouve l'énergie propre de la boule, indépendamment de la conductivité de l'air qui ne régit que la vitesse du processus, ce qui est tout à fait normal.

Méthode 2 : calculer l'énergie électromagnétique dans tout l'espace à l'instant initial et à l'instant final et prendre la différence.

$$U_{\text{em}}(t) = \iiint \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_r(r, t)^2 \underbrace{4\pi r^2 dr}_{=d\tau} = \frac{Q(t)^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

d'où on déduit

$$\mathcal{E}_{\text{diss}} = U_{\text{em}}(0) - U_{\text{em}}(t \rightarrow \infty) = \frac{Q_0^2}{8\pi\varepsilon_0 R}.$$