

# Ondes électromagnétiques dans le vide

## I - Équation de propagation

- **Démonstration** : exprimer avec les équations de Maxwell les deux termes de la formule du double rotationnel

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{E}) - \overrightarrow{\Delta} \vec{E}$$

avec  $\overrightarrow{\Delta}$  l'opérateur laplacien vectoriel.

- **Équation de d'Alembert** : même équation de propagation pour  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  dans le vide.

$$\overrightarrow{\Delta} \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{avec} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

## II - Ondes planes

- **Onde plane « tout court »** :

- ▷ *Qualitativement* : les surfaces d'onde sont des plans ;
- ▷ *Mathématiquement* : les champs ne dépendent que d'une seule variable d'espace cartésienne, p.ex.  $\vec{E}(x, t)$ .

- **Onde plane progressive** :

- ▷ *Qualitativement* : l'onde se propage dans un sens bien déterminé ;
- ▷ *Mathématiquement* :  $x$  et  $t$  se combinent en une seule variable réduite

$$\vec{E}(x, t) = f(x \pm ct) \vec{e}_p = F\left(t \pm \frac{x}{c}\right) \vec{e}_p \quad \begin{cases} \ominus & \text{propagation dans le sens des } x \text{ croissants} \\ \oplus & \text{propagation dans le sens des } x \text{ décroissants} \end{cases}$$

- ▷ *Graphiquement* : deux représentations possibles (type photo ou type signal enregistré par un capteur au cours du temps), qui peuvent éventuellement apparaître symétriques en fonction du sens de propagation de l'onde. Toujours réfléchir sur des points remarquables (sommet, points anguleux) pour faire les tracés.

- **Onde plane progressive harmonique** :

- ▷ *Mathématiquement* : propagation le long de l'axe ( $Ox$ ) :

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t \pm kx + \varphi) \vec{e}_p \quad \longleftrightarrow \quad \underline{\vec{E}} = E_0 e^{i(\omega t \pm kx + \varphi)} \vec{e}_p = \underline{\vec{E}}_0 e^{i(\omega t \pm kx)}$$

Cas général :  $\vec{k}$  vecteur d'onde dirigé dans le sens propagation

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \overrightarrow{OM} + \varphi) \vec{e}_p \quad \longleftrightarrow \quad \underline{\vec{E}} = E_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \overrightarrow{OM} + \varphi)} \vec{e}_p = \underline{\vec{E}}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \overrightarrow{OM})}$$

Dérivation des champs complexes : analyser la convention d'exponentielle complexe.

$$\frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} = \pm i \omega \underline{\vec{E}} \quad \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial x} = \mp i k_x \underline{\vec{E}} \quad \rightsquigarrow \nabla = \mp i \vec{k}$$

- ▷ *Relation de dispersion* : raisonnement type analyse-synthèse, on injecte l'expression (réelle ou complexe) de l'OPPH dans l'équation de d'Alembert.

$$\omega = kc \quad \longleftrightarrow \quad \lambda = cT \quad \longleftrightarrow \quad \lambda = \frac{c}{\nu} \quad \longleftrightarrow \quad \text{etc.}$$

- ▷ *Relation de structure* : traduire en complexes les équations de Maxwell en raisonnant avec  $\nabla$ .

$$\vec{B} = \vec{u} \wedge \frac{\vec{E}}{c},$$

avec  $\vec{u}$  la direction de propagation de l'onde. Résultat vrai pour toutes les OPP.

### III - Polarisation

- **Définition** : direction du vecteur champ électrique de l'OEM, forcément orthogonale à la direction de propagation.
- **Onde non polarisée** : direction aléatoire fluctuant rapidement, cas de la lumière naturelle.
- **Polarisation rectiligne** : direction constante.
- **Polariseur** : production d'une polarisation rectiligne, le polariseur sélectionne la composante de l'onde sur son axe passant  $\vec{n}$  et coupe la composante sur son axe bloquant  $\vec{n}_\perp$ .

$$\vec{E}_{\text{sortant}} = (\vec{E}_{\text{entrant}} \cdot \vec{n}) \vec{n}$$

### IV - Transport d'énergie

- **Densité volumique d'énergie électromagnétique** : en moyenne temporelle  $\langle u_{\text{em}} \rangle$  est uniforme et équirépartie entre les formes électrique et magnétique.
- **Rayonnement** : le vecteur de Poynting est dirigé dans le sens de propagation de l'onde  $\rightsquigarrow$  cohérent avec l'intuition.
- **Utilisation des champs complexes** : les grandeurs énergétiques sont non-linéaires par rapport aux champs, donc seules les moyennes peuvent se calculer avec les complexes.

$$\langle E^2 \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{E} \cdot \vec{E}^*) = \frac{1}{2} |\vec{E}|^2$$

$$\left\langle \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right\rangle = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}(\vec{E} \wedge \vec{B}^*)$$