

# Interférences par division du front d'onde

## Plan du cours

<b>I</b>	<b>Micro-rappel de Terminale sur la diffraction</b>	<b>2</b>
<b>II</b>	<b>Trous d'Young</b>	<b>3</b>
II.A	Dispositif et modélisation . . . . .	3
II.B	Rappel de PTSI : différence de marche à grande distance . . . . .	4
II.C	Différence de marche à l'infini . . . . .	7
II.D	Figure d'interférences . . . . .	9
<b>III</b>	<b>Extension spatiale de la source, cohérence spatiale</b>	<b>10</b>
III.A	Source étendue parallèlement aux franges. . . . .	10
III.B	Source étendue perpendiculairement aux franges . . . . .	10
III.C	Fentes d'Young. . . . .	16
<b>IV</b>	<b>Réseaux par transmission</b>	<b>17</b>
IV.A	Principe : interférences à N ondes . . . . .	17
IV.B	Formule des réseaux . . . . .	18
IV.C	Utilisation en spectroscopie. . . . .	20

## Au programme

Extrait du programme officiel : partie 3 « Optique », bloc 3 « Exemple de dispositif interférentiel par division du front d'onde : trous d'Young ».

Dans cette partie, les trous d'Young permettent de confronter théorie et expérience. Les fentes d'Young peuvent être abordées mais de manière exclusivement expérimentale. Aucune connaissance sur un autre diviseur du front d'onde n'est exigible.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Trous d'Young ponctuels dans un milieu non dispersif : source à distance finie et observation à grande distance finie. Ordre d'interférences $p$ .	Exprimer et utiliser l'ordre d'interférences. <b>Mettre en œuvre une expérience d'interférences : trous d'Young ou fentes d'Young.</b> <b>Montrer la non-localisation des franges d'interférences.</b>
Franges d'interférences. Interfrange.	Justifier la forme des franges observées.
Variations de l'ordre d'interférences avec la position [ou la longueur d'onde] <sup>1</sup> de la source. Perte de contraste par élargissement spatial [ou spectral] de la source.	Utiliser un critère de brouillage des franges pour interpréter des observations expérimentales.

En **gras**, les points devant faire l'objet d'une approche expérimentale.

1. Abordée au chapitre suivant

Extrait du programme officiel : partie 3 « Optique », bloc 2 « Superposition d'ondes lumineuses ».

L'étude de la superposition de  $N$  ondes cohérentes ne doit pas donner lieu à des développements calculatoires.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Superposition de $N$ ondes monochromatiques cohérentes, de même amplitude et dont les phases sont en progression arithmétique. Réseau par transmission.	Établir l'expression de la différence de marche entre deux motifs consécutifs. Établir la relation fondamentale des réseaux liant la condition d'interférences constructives à la valeur de la différence de marche entre deux motifs consécutifs. <b>Mettre en œuvre un dispositif expérimental utilisant un phénomène d'interférences à <math>N</math> ondes.</b> <b>Relier qualitativement le nombre de traits d'un réseau à la largeur des franges brillantes.</b>

En **gras**, les points devant faire l'objet d'une approche expérimentale.

## Ces cinq dernières années au concours

- ▷ Écrit : épreuve A 2019.
- ▷ Oral : régulièrement.

Nous avons montré dans le cours précédent que deux ondes ne pouvaient être cohérentes que si elles étaient issues de la même source primaire mais avaient suivi deux chemins différents pour atteindre le point d'observation, ce qui nécessite d'utiliser un interféromètre.

Dans un **interféromètre à division du front d'onde**, une source émet les mêmes trains d'onde dans plusieurs directions, dont une partie au moins est déviée par un miroir ou grâce au phénomène de diffraction, ce qui permet de les superposer.

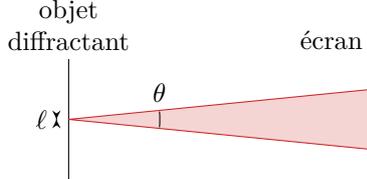
## I - Micro-rappel de Terminale sur la diffraction

On appelle **diffraction** l'étalement d'une onde dans l'espace dû à son passage au travers ou autour d'un obstacle.

Toutes les figures de diffraction présentent une tâche centrale brillante entourée d'autres motifs. L'allure précise est caractéristique de l'objet diffractant : à partir de la figure de diffraction, il est possible de retrouver la forme et les dimensions de l'objet diffractant. C'est d'ailleurs par diffraction de rayons X que l'on détermine la structure microscopique des solides cristallins, de l'ADN, des protéines, des virus, etc.

La figure de diffraction à grande distance possède les mêmes symétries et invariances que l'objet diffractant.

Plus l'objet diffractant est étroit, plus la figure de diffraction est large : la figure de diffraction par un objet de taille caractéristique  $\ell > \lambda$  a une largeur angulaire  $\theta \sim \lambda/\ell$

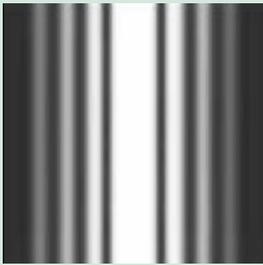


Espace 1

**Remarque :** Ne pas croire que la diffraction nécessite  $\ell < \lambda$  ! Par exemple, les ondes lumineuses sont diffractées par des objets de taille de l'ordre du mm, soit  $\ell \simeq 2000\lambda$ . Le résultat ci-dessus n'est d'ailleurs qu'un développement limité au premier ordre, valable pour  $\lambda \ll \ell$ .

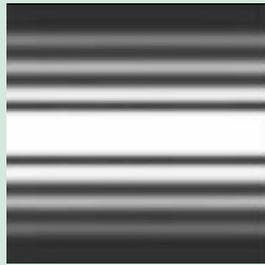
**Application 1 : À la recherche de l'objet diffractant**

Identifier l'objet diffractant ayant produit les figures ci-dessous.



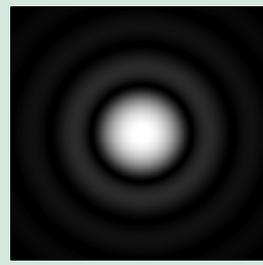
Fente verticale

Espace 2



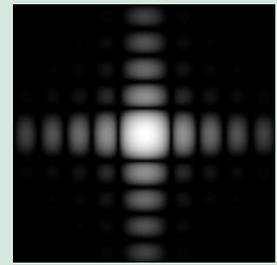
Fente horizontale

Espace 3



Disque

Espace 4



Carré

Espace 5

**II - Trous d'Young**

**II.A - Dispositif et modélisation**



Le dispositif des trous d'Young est constitué d'un écran opaque percé de deux trous circulaires.

**UN trou : diffraction**

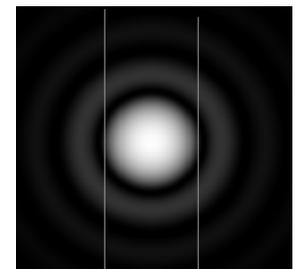
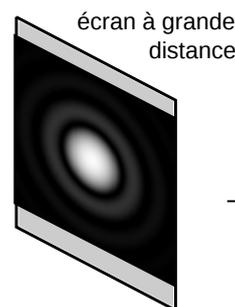
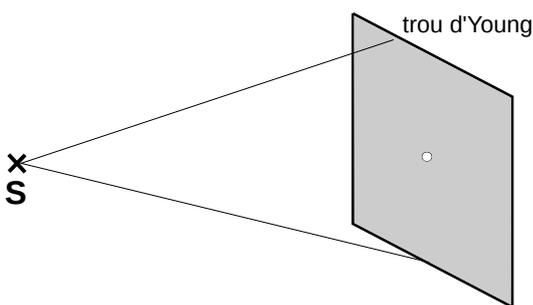
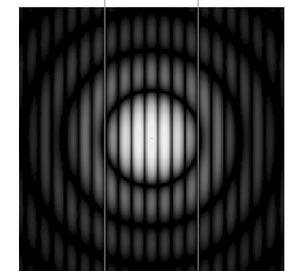
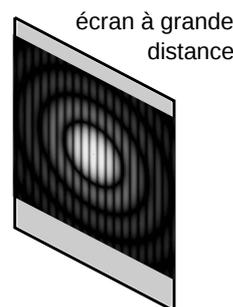
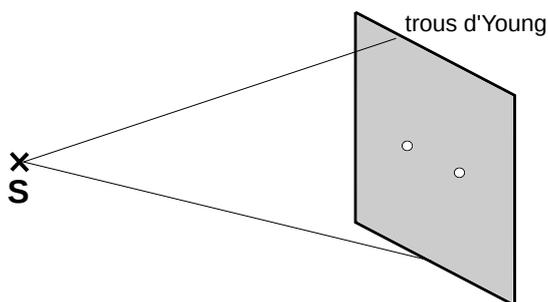


Figure de diffraction

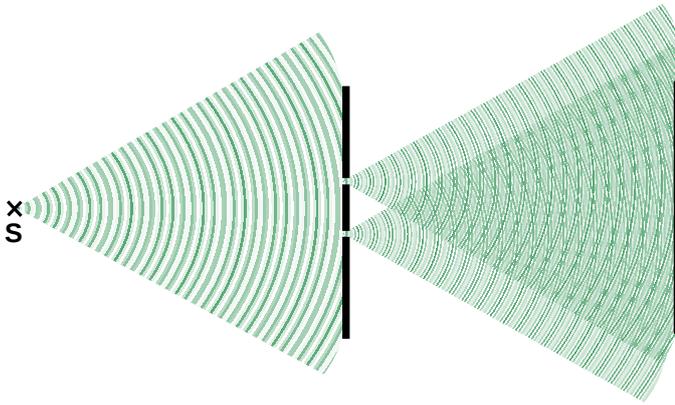
**DEUX trous : diffraction + interférences**



Dans la figure de diffraction produite par un trou, on voit des interférences



On appelle **champ d'interférences** la zone de l'espace dans laquelle les deux ondes se superposent.



Pour les trous d'Young, les interférences sont observables en tout point du champ d'interférences ... mais on montrera que c'est parfois moins simple au chapitre suivant.

Notre objectif est de comprendre la figure d'interférences, mais pas d'étudier la figure de diffraction : même si elle est la cause des interférences, elle sera « négligée » par la suite. Ainsi, les ondes diffractées seront supposées parfaitement isotropes, ce qui revient à considérer que si un seul des trous est ouvert alors l'éclairement sur l'écran est uniforme.

↪ concrètement, la modélisation développée dans la suite de ce paragraphe permet de décrire l'éclairement à proximité du centre de l'écran.

## II.B - Rappel de PTSI : différence de marche à grande distance

### • Hypothèses et notations

- ▷ Les trous d'Young sont éclairés par une source ponctuelle  $S$  supposée monochromatique, et les deux **sources secondaires**  $S_1$  et  $S_2$  sont également ponctuelles et monochromatiques.
- ▷ Les sources secondaires sont situées dans le plan  $y = 0$ , mais le point  $M$  a une ordonnée  $y$  a priori non nulle : le schéma de la figure 1 donne donc une vue « écrasée » de la situation.
- ▷ Dans un dispositif expérimental, on a classiquement  $d$  et  $D$  de l'ordre de 10 à 20 cm,  $a$  de l'ordre de quelques mm et une figure d'interférence qui mesure quelques cm sur l'écran. Ainsi, on peut considérer les distances  $d$  et  $D$  très supérieures aux autres :

$$d, D \gg a, x, y.$$

- ▷ On se place dans l'air d'indice 1 : les chemins optiques sont directement égaux aux distances géométriques. Le calcul de la différence de marche se résume donc à des calculs de longueur.

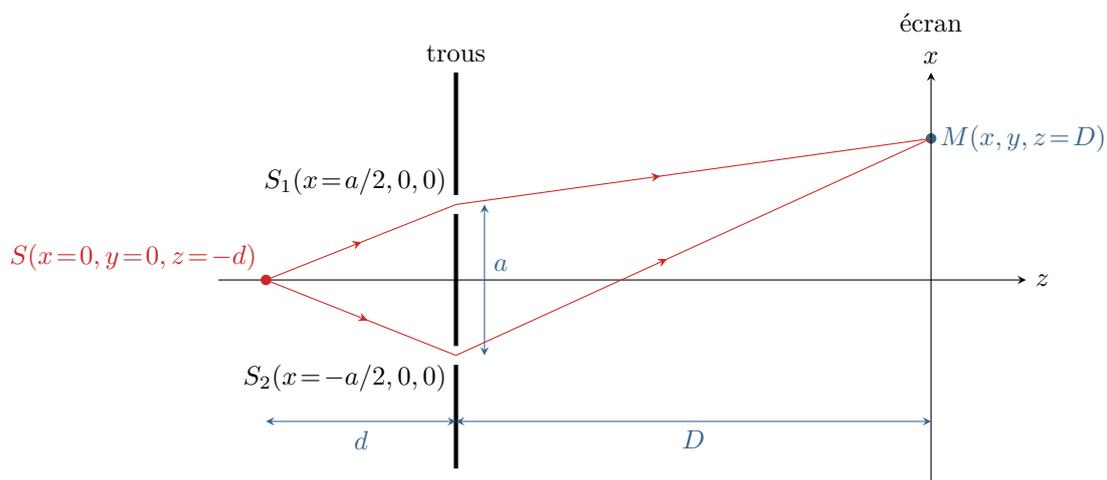


Figure 1 – Schéma du montage.

- **Démonstration de la différence de marche à grande distance**

❶ **Définition et simplification par symétrie :** Par définition, la différence de marche est la différence de chemin optique suivi par les rayons passant par les trous ① et ②. En décomposant, on a donc

$$\delta = (SM)_2 - (SM)_1 = (SS_2M) - (SS_1M) = (SS_2) + (S_2M) - (SS_1) - (S_1M)$$

Or par symétrie  $(SS_1) = (SS_2)$ , donc

$$\delta = (S_2M) - (S_1M).$$

D!

Espace 6

❷ **Expression géométrique de la longueur  $S_1M$  :** utilisons une approche en termes de coordonnées.

Les coordonnées des points extrêmes sont  $S_1(a/2, 0, 0)$  et  $M(x, y, D)$  donc

$$\overrightarrow{S_1M} = \left(x - \frac{a}{2}\right) \vec{e}_x + y \vec{e}_y + D \vec{e}_z \quad \text{d'où} \quad S_1M^2 = \overrightarrow{S_1M} \cdot \overrightarrow{S_1M} = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + D^2$$

et en développant l'identité remarquable et en réorganisant les termes on arrive à

$$S_1M^2 = D^2 + x^2 - ax + \frac{a^2}{4} + y^2.$$

Espace 7

**Remarque :** le calcul tel qu'on vient de le faire est exactement équivalent au théorème de Pythagore en trois dimensions : à vous de choisir la forme que vous préférez.

Développement limité :

Factorisation par  $D^2$  puis calcul de la racine.

$$S_1M = D \left(1 + \frac{x^2 - ax + \frac{a^2}{4} + y^2}{D^2}\right)^{1/2} \underset{D \gg a, x, y}{\simeq} D \left(1 + \frac{x^2 - ax + \frac{a^2}{4} + y^2}{2D^2}\right)$$

Espace 8

③ **Expression géométrique de la longueur  $S_2M$**  : Le point  $S_2$  a pour coordonnées  $(-a/2, 0, 0)$  : le calcul de  $(S_2M)$  est donc formellement identique à celui de  $(S_1M)$  en remplaçant  $a$  par  $-a$ .

$$S_2M = D \left( 1 + \frac{x^2 + ax + \frac{a^2}{4} + y^2}{2D^2} \right)$$

Espace 9

④ **Conclusion :**

$$\begin{aligned} \delta &= D \left( \sqrt{x^2 + ax + \frac{a^2}{4} + y^2} \right) - D \left( \sqrt{x^2 - ax + \frac{a^2}{4} + y^2} \right) \\ &= D \frac{ax}{2D^2} + nD \frac{ax}{2D^2} \\ \delta &= \frac{ax}{D} \end{aligned}$$

Espace 10

Dans un dispositif de trous d'Young distants de  $a$  le long d'un axe  $(Ox)$ , placés dans l'air d'indice 1, la différence de marche en un point  $M$  d'un écran placé à une distance  $D$  des trous ne dépend que de sa coordonnée  $x$  et vaut

$$\delta(M) = \frac{ax}{D}.$$

**Ordre d'interférences et déphasage :**

$$p(M) = \frac{\delta(M)}{\lambda} = \frac{ax}{\lambda D} \quad \text{et} \quad \Delta\phi(M) = 2\pi p(M) = \frac{2\pi ax}{\lambda D}$$

Espace 11

*La démonstration de  $\delta$  est très importante et il faut absolument que vous sachiez la refaire vite et bien. L'expression de  $\delta$  est à connaître par cœur, celles de  $p$  et  $\Delta\phi$  à savoir retrouver très vite.*

## II.C - Différence de marche à l'infini

Dans les exercices, il est fréquent de considérer que les sources secondaires se trouvent à l'infini par rapport à l'écran d'observation. Cela peut être une approximation d'une expérience réelle à l'échelle d'une salle de TP, ou bien un excellent modèle par exemple pour analyser des observations astronomiques. Un autre cas fréquent est celui de l'observation des interférences dans le plan focal image d'une lentille, représenté figure 2. Ce paragraphe a pour but de démontrer l'expression de la différence de marche dans cette dernière situation.

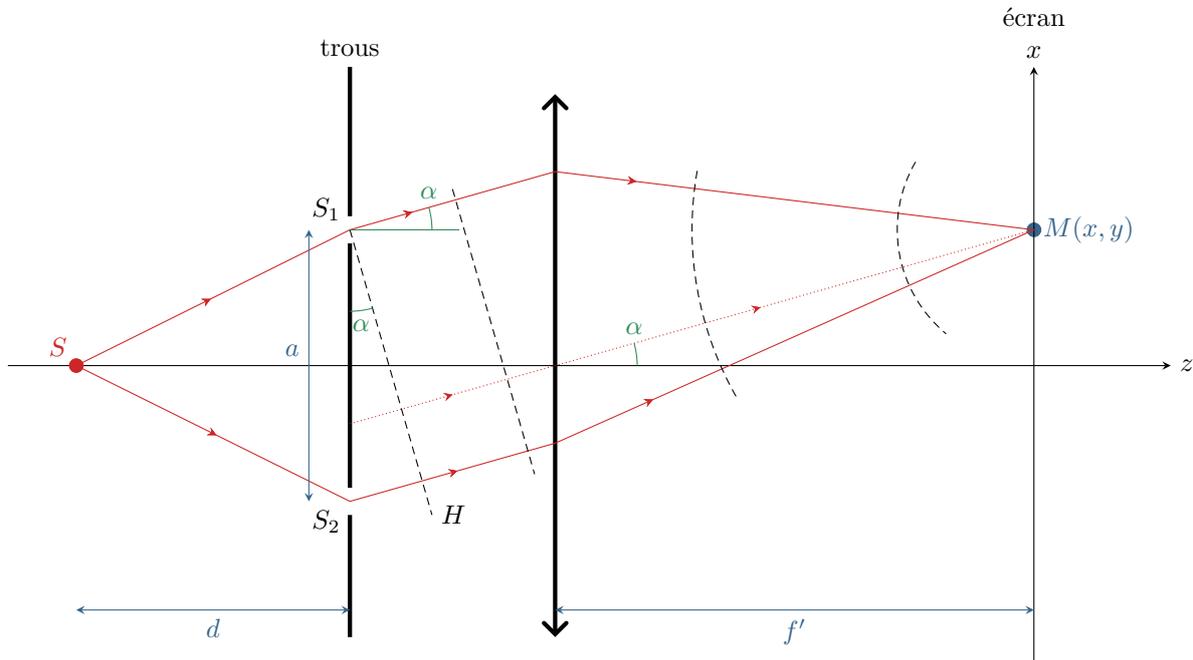


Figure 2 – Observation d'interférences dans le plan focal image d'une lentille convergente.

### • Construction des rayons qui interfèrent

- ▷ comme le point  $M$  se trouve dans le plan focal image de la lentille, alors on sait que les rayons qui y aboutissent sont tous parallèles les uns aux autres avant la lentille;
- ▷ on construit le rayon en traits pointillés passant par le centre optique de la lentille : c'est un rayon fictif (il ne passe ni par  $S_1$  ni par  $S_2$ , donc il ne peut pas y avoir de lumière se propageant le long de ce rayon) ... mais comme il n'est pas dévié, il indique la direction de tous les rayons avant la lentille;
- ▷ on en déduit le tracé des deux rayons qui interfèrent réellement : ce sont les deux rayons issus de  $S_1$  et  $S_2$  parallèlement au rayon pointillé et qui convergent ensuite vers  $M$ .

### • Utilisation du principe du retour inverse de la lumière en optique ondulatoire

Une fois les rayons tracés, le calcul de la différence de marche repose sur le principe du retour inverse de la lumière.

#### Principe du retour inverse de la lumière :

Si la lumière allait du point d'observation vers la source, alors les rayons lumineux seraient les mêmes.

Il y a donc égalité des chemins optiques entre deux points  $A$  et  $B$  quel que soit le sens de parcours :

$$(AB) = (BA)$$

**Remarque :** la première partie sur l'identité des rayons est (à notre niveau) à un postulat, en revanche la seconde partie sur l'égalité des chemins optiques  $(AB)$  et  $(BA)$  se déduit de la définition du chemin optique : le rayon direct et le rayon inverse sont identiques donc parcourent la même distance dans les mêmes milieux.

**Graphiquement :** si jamais la source était située au point d'observation, alors d'après le théorème de Malus les surfaces d'onde seraient en tout point orthogonales aux rayons qui aboutissent à la source.

↪ on peut représenter des « surfaces d'onde inverses » sur la figure.

**Remarque :** le terme « surface d'onde inverse » me semble clair et utile pour expliquer, mais il ne fait pas partie du vocabulaire traditionnel de l'optique ... à éviter dans une copie ☺

**Conséquence sur les chemins optiques :**

(M)

si la lumière allait de  $M$  vers  $S$ , alors  $S_1$  et  $H$  seraient dans le même plan d'onde, et donc  $(MS_1) = (MH)$ . D'après le principe du retour inverse,  $(MS_1) = (S_1M)$  et  $(MH) = (HM)$ , d'où on déduit

$$(S_1M) = (HM).$$

Espace 12

🔴🔴🔴 **Attention !** Les surfaces d'onde inverses ne sont pas des vraies surfaces d'onde : les points qui s'y trouvent n'ont pas la même phase ... sinon cela signifierait qu'il n'y aurait pas d'interférences en  $M$ !

- **Calcul de la différence de marche**

Simplification du calcul :

$$\delta = \left[ \underbrace{(SS_2)}_{\text{symétrie}} + (S_2H) + \underbrace{(HM)}_{\text{retour inv}} \right] - \left[ (SS_1) + (S_1M) \right]$$

(D!)

Espace 13

Pour simplifier le calcul, on admet que le résultat ne dépend pas de  $y$  (ce qui se justifie par invariance, ou par analogie avec le paragraphe précédent), ce qui permet de raisonner pour  $y = 0$ , et donc simplement dans le plan de la figure.

*Idée de la démonstration :* exprimer  $\alpha$  de deux façons différentes, d'une part avec les sources secondaires, d'autre part avec le point  $M$  sur l'écran, et les identifier.

Relation trigonométrique dans le triangle rectangle  $S_1S_2H$  :

$$\sin \alpha = \frac{S_2H}{S_1S_2} = \frac{S_2H}{a}$$

(D!)

Relation trigonométrique dans le triangle formé par  $O$  (centre de la lentille), le centre de l'écran, et  $M$  :

$$\tan \alpha = \frac{x}{f'}$$

L'angle  $\alpha$  étant petit, on peut linéariser et identifier les fonctions trigonométriques,

$$\frac{S_2H}{a} = \frac{x}{f'} \quad \text{d'où} \quad \delta = S_2H = \frac{ax}{f'}$$

Espace 14

## II.D - Figure d'interférences

On suppose se placer dans le cas de l'observation à grande distance, mais compte tenu de l'analogie des expressions des différences de marche, les résultats sont directement transposables au cas d'une observation à l'infini en remplaçant  $D$  par  $f'$ . D'après la formule de Fresnel

$$\mathcal{E}(M) = 2\mathcal{E}_0 \left[ 1 + \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} \delta \right) \right] = 2\mathcal{E}_0 \left[ 1 + \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} \frac{ax}{D} \right) \right].$$

L'éclairement est périodique en  $x$  mais il est indépendant de la coordonnée  $y$  de  $M$ , il est donc invariant par translation le long de cet axe : les franges sont rectilignes dans la direction  $(Oy)$ .

**Remarque :** ce résultat se voit dès l'expression de la différence de marche, puisqu'elle détermine à elle seule l'état d'interférence en un point donné.

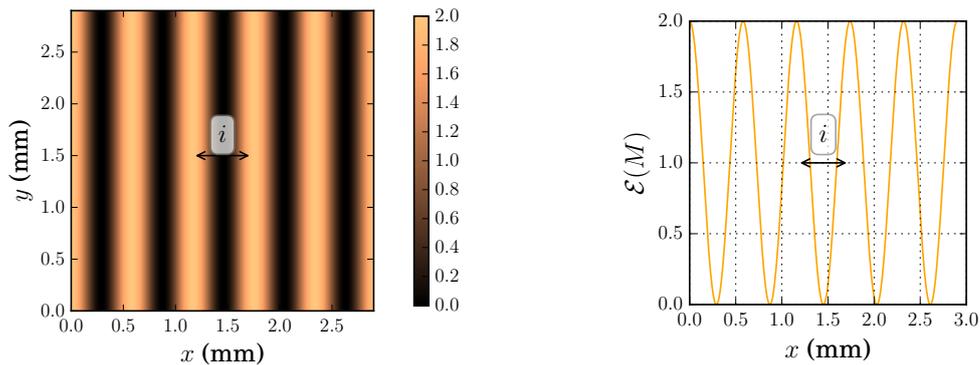


Figure 3 – Expérience des trous d'Young. Simulation réalisée pour  $\lambda = 580 \text{ nm}$ ,  $D = 1 \text{ m}$  et  $a = 1 \text{ mm}$ .

On appelle **interfrange**  $i$  la période spatiale de la figure d'interférences.

L'interfrange correspond à la distance entre deux franges sombres ou deux franges brillantes consécutives.

$$\Delta\varphi(x+i) = \Delta\varphi(x) + 2\pi \quad p(x+i) = p(x) + 1 \quad \delta(x+i) = \delta(x) + \lambda.$$

### Application 2 : Interfrange dans l'expérience des trous d'Young

- 1 - Exprimer l'interfrange dans le cas des trous d'Young avec observation à une distance  $D$ .
- 2 - On prend une source de longueur d'onde  $650 \text{ nm}$  au lieu de  $580 \text{ nm}$ . Quel est l'effet visuel sur la figure d'interférences ?
- 3 - Même question si on utilise des trous plus rapprochés.

$$\boxed{1} \quad p(x) = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{ax}{\lambda D} \text{ donc } \frac{a(x+i)}{\lambda D} = \frac{ax}{\lambda D} + 1 \text{ soit } \frac{ai}{\lambda D} = 1$$

d'où on conclut  $i = \frac{\lambda D}{a}$ .

- 2 L'interfrange augmente, donc la figure d'interférences semble qualitativement se dilater sur l'écran.
- 3 Même chose.

### III - Extension spatiale de la source, cohérence spatiale

Utiliser une source de grande taille est a priori intéressant car cela permet d'augmenter la luminosité (ne pas confondre avec le contraste !) de la figure d'interférences.



Une source étendue se modélise comme une juxtaposition de sources ponctuelles incohérentes, l'éclairement total étant la somme des éclaircissements issus de chaque point de la source.

Q

#### III.A - Source étendue parallèlement aux franges

On a montré que la figure d'interférences était indépendante de l'ordonnée  $y$  du point d'observation, donc que les franges étaient rectilignes dans cette direction. Ce paragraphe étudie l'effet de l'extension spatiale de la source en la supposant étendue selon  $(Oy)$  mais toujours infiniment fine selon  $(Ox)$  et placée en  $x = 0$ .

On suppose les trous d'Young toujours éclairés par une source ponctuelle monochromatique  $S$ , mais elle est désormais située en  $Y \neq 0$ , comme représenté figure 4 en vue « écrasée ». Malgré la translation selon  $(Oy)$ , la source primaire  $S$  est toujours dans le plan médiateur des trous d'Young donc on a toujours

$$(SS_1) = (SS_2).$$

↪

une translation de la source selon  $(Oy)$  laisse la figure d'interférences inchangée.

Espace 16

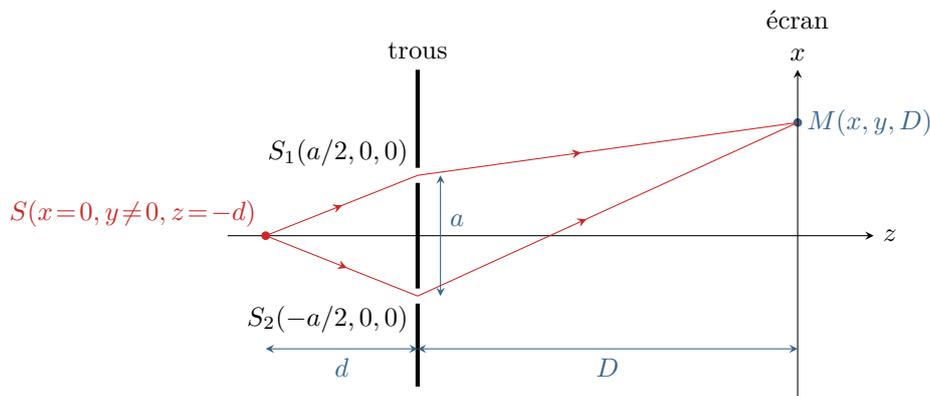


Figure 4 – Schéma du montage.

Ainsi, deux sources décalées le long de l'axe  $(Oy)$  produisent exactement la *même* figure d'interférences, même si elles sont incohérentes, ce qui permet de doubler l'éclairement et donc de rendre la figure plus lumineuse ... et ce raisonnement tient pour un nombre quelconque de sources.



Utiliser une source étendue dans la direction parallèle aux franges est bénéfique, car cela augmente la luminosité de la figure d'interférences en préservant le contraste.

Q

#### III.B - Source étendue perpendiculairement aux franges

##### III.B.1 - Effet d'une translation de la source

###### Application 3 : Trous d'Young éclairés par une source décalée par rapport à l'axe optique

Considérons deux trous d'Young éclairés par une source ponctuelle décalée par rapport à l'axe optique du montage à une abscisse  $X$ . Compte tenu de l'invariance par translation selon  $(Oy)$ , on suppose pour alléger le calcul que la source, les trous d'Young et le point d'observation sont tous situés dans le plan  $y = 0$ .

- 1 - En généralisant les résultats précédents, donner sans calcul la différence de marche en un point  $M$  de l'écran.
- 2 - Exprimer alors l'éclairement. Quel est l'impact de la translation de la source sur la figure d'interférences ?

1 En décomposant les chemins optiques,

$$\delta = (SS_2M) - (SS_1M) = [(SS_2) + (S_2M)] - [(SS_1) + (S_1M)] = (SS_2) - (SS_1) + (S_2M) - (S_1M)$$

M

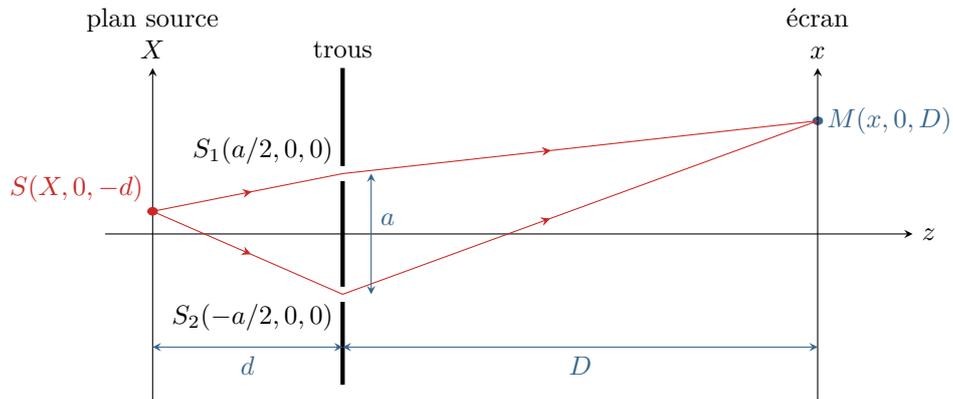


Figure 5 – Translation de la source dans la direction perpendiculaire aux franges.

On a montré au paragraphe II.B que

$$(S_2M) - (S_1M) = \frac{ax}{D}.$$

La géométrie étant identique, on en déduit sans calcul que

$$(SS_2) - (SS_1) = \frac{aX}{d}$$

et ainsi

$$\delta = \frac{aX}{d} + \frac{ax}{D}.$$

Déplacer la source augmente la différence de marche d'une constante indépendante du point d'observation.

2 D'après la formule de Fresnel,

$$\mathcal{E}(M) = 2\mathcal{E}_0 \left[ 1 + \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} \delta \right) \right] = 2\mathcal{E}_0 \left[ 1 + \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} \frac{ax}{D} + \frac{2\pi}{\lambda} \frac{aX}{d} \right) \right]$$

Le terme impliquant la position  $X$  de la source est indépendant du point d'observation, il est donc égal en tout point de la figure d'interférences : tout se passe comme s'il y avait un « déphasage spatial » dans l'éclairement. Par analogie avec un signal sinusoïdal, on comprend que la figure d'interférences apparaît décalée sur l'écran.

## III.B.2 - Trous d'Young éclairés par deux sources ponctuelles

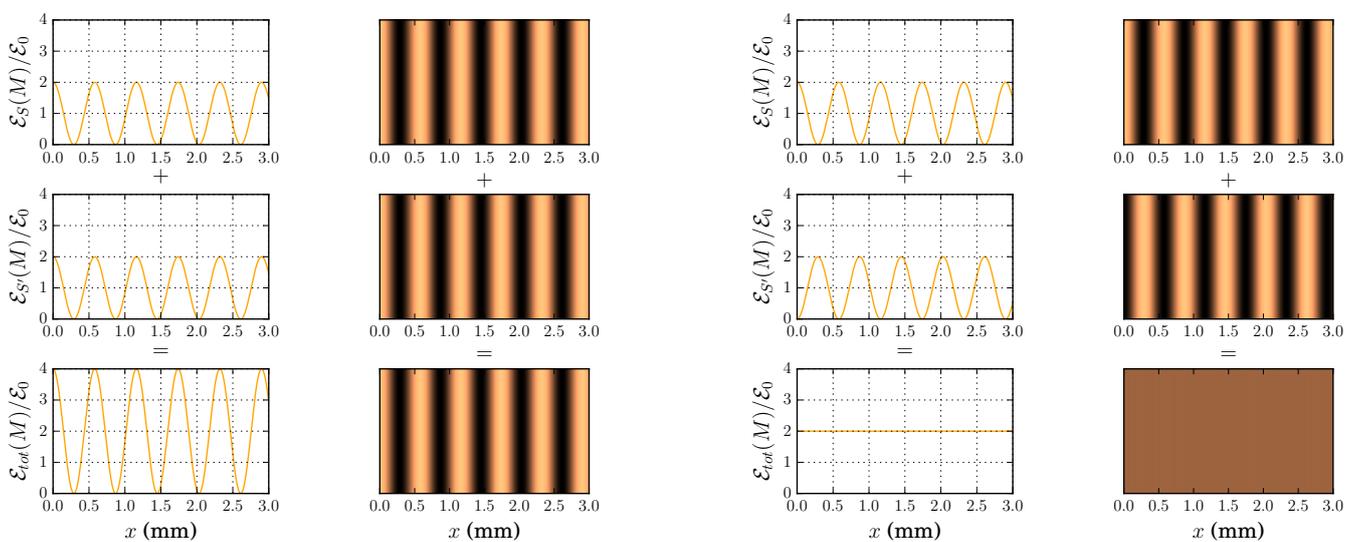
## Application 4 : Trous d'Young éclairés par deux sources ponctuelles

Les trous d'Young sont maintenant éclairés par *deux* sources ponctuelles incohérentes,  $S$  et  $S'$ , symétriques par rapport à l'axe du montage, c'est-à-dire en  $X = \pm b/2$ . On note  $p(M)$  et  $p'(M)$  l'ordre d'interférence au point  $M$  correspondant à chacune des sources.

- 1 - Indiquer qualitativement l'effet de la présence des deux sources sur la figure d'interférences.
- 2 - Exprimer l'éclairement en un point  $M$  de l'écran. Interpréter physiquement l'expression obtenue, en identifiant un terme d'interférences et un facteur de contraste.
- 3 - À quelle condition sur  $p$  et  $p'$  la figure d'interférences est-elle totalement brouillée ?

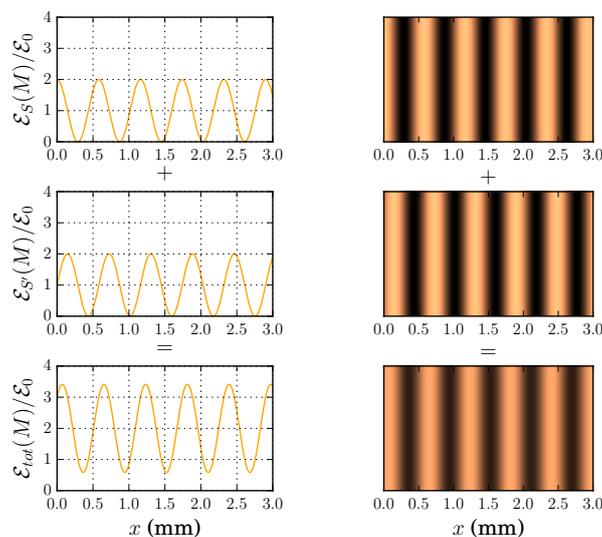
## • Analyse qualitative : simulations numériques

**Cas extrêmes :** La figure de gauche est tracée pour un décalage des figures d'interférences égal à  $i$ , si bien qu'elles paraissent identiques, et celle de droite pour un décalage égal à  $i/2$ , si bien qu'elles sont « en opposition de phase ».



**Figure 6 – Trous d'Young éclairés par deux sources ponctuelles décalées.** Simulations réalisées pour  $\lambda = 580$  nm,  $D = 1$  m et  $a = 1$  mm.

**Cas quelconque :** voir figure 7. La figure est tracée pour un décalage des figures d'interférences égal à  $i/4$ .



**Figure 7 – Trous d'Young éclairés par deux sources ponctuelles décalées.** Simulation réalisée pour  $\lambda = 580$  nm,  $D = 1$  m et  $a = 1$  mm.

**Conclusion qualitative :**

- ▷ Les deux figures d'interférences issues des deux sources se superposent, mais comme elles sont décalées l'une par rapport à l'autre, cela conduit à une perte de contraste : les franges sombres ne sont pas parfaitement noires, les franges brillantes ne sont pas complètement lumineuses.
- ▷ La perte de contraste peut éventuellement aller jusqu'à un brouillage total de la figure d'interférences.

🔴🔴🔴 **Attention !** « Brouillage total » n'est pas du tout synonyme de « interférences destructives ». Lorsque la figure d'interférences est totalement brouillée, l'éclairement sur l'écran est uniforme (il n'y a plus du tout d'interférences) mais non nul.

- **Mise en équation**

*Les résultats établis dans ce paragraphe n'ont pas besoin d'être appris par cœur, en revanche il s'agit d'un exercice très classique à savoir refaire vite et bien.*

Les deux sources  $S$  et  $S'$  sont placées de manière symétrique en  $\pm b/2$  par rapport à l'axe optique du montage, donc en reprenant le calcul de l'application précédente

$$\delta(M) = (SS_2M) - (SS_1M) = \frac{ab}{2d} + \frac{ax}{D} \quad \text{et} \quad \delta'(M) = (S'S_2M) - (S'S_1M) = -\frac{ab}{2d} + \frac{ax}{D}$$

soit en termes d'ordre d'interférence

$$p(M) = \frac{ab}{2\lambda d} + \frac{ax}{\lambda D} \quad \text{et} \quad p'(M) = -\frac{ab}{2\lambda d} + \frac{ax}{\lambda D}.$$

**Éclairement total :**

Les sources sont incohérentes mais chacun des deux éclairissements se calcule à partir de la formule de Fresnel.

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= 2\mathcal{E}_0 [1 + \cos(2\pi p)] + 2\mathcal{E}_0 [1 + \cos(2\pi p')] \\ &= 2\mathcal{E}_0 [2 + \cos(2\pi p) + \cos(2\pi p')] \\ &= 2\mathcal{E}_0 \left[ 2 + 2 \cos\left(2\pi \frac{p-p'}{2}\right) \cos\left(2\pi \frac{p+p'}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

Espace 18

**Interprétation :**

- ▷ Terme en  $p + p'$  :

$$\cos\left(2\pi \frac{p+p'}{2}\right) = \cos\left(\frac{2\pi ax}{\lambda D}\right).$$

Ce terme est identique à celui que l'on obtiendrait avec une seule source placée en  $X = 0$ , c'est-à-dire au milieu des deux sources  $S$  et  $S'$ . Il est appelé **terme d'interférences**. Il dépend de  $x$ , et donne la position des franges brillantes et sombres ainsi que l'interfrange, qui est inchangé par rapport au cas d'une unique source ponctuelle.

- ▷ Terme en  $p - p'$  :

$$\cos\left(2\pi \frac{p-p'}{2}\right) = \cos\left(2\pi \frac{ab}{2\lambda d}\right)$$

Ce terme est indépendant de  $x$ , donc il prend la même valeur en tout point de l'écran. Il donne le contraste global de la figure d'interférences. Il est appelé **facteur de contraste**. Le contraste est égal à la valeur absolue du facteur de contraste.

- **Critère de brouillage**

Il y a brouillage total de la figure d'interférences si les franges sombres créées par une source se superposent aux franges brillantes créées par la deuxième source.

Le facteur de contraste s'annule si  $2\pi \frac{p-p'}{2} = \frac{\pi}{2} + n\pi$  soit  $p-p' = n + 1/2$ .

Espace 19

### III.B.3 - Trous d'Young éclairés par une source étendue

Les résultats établis précédemment avec deux sources ponctuelles se généralisent :

Lorsque les trous d'Young sont éclairés par une source étendue perpendiculairement aux franges, le décalage des figures d'interférences produites par chaque point de la source induit une perte de contraste qui peut aller jusqu'à un brouillage total.

- **Critère semi-quantitatif de brouillage (admis)**

Par convention, la figure d'interférences formée par une source étendue est dite **brouillée** dès lors que la différence d'ordre d'interférences entre les ondes issues de son centre et de ses extrémités est supérieure à  $1/2$

$$\Delta p = p_{\text{ext}}(M) - p_{\text{centre}}(M) > 1/2$$

La largeur de source à partir de laquelle le critère de brouillage prévoit une figure brouillée est appelée **largeur de cohérence spatiale** de la source.

(R)

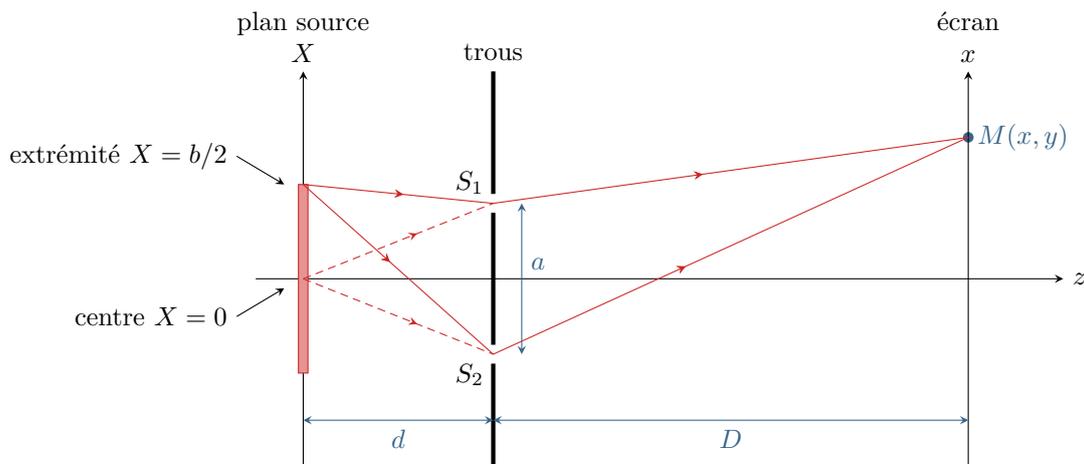


Figure 8 – Trous d'Young éclairés par une source étendue.

Interprétation qualitative :

lorsque ce critère est vérifié, il y a brouillage entre les figures d'interférences créées par certains points de la source. On comprend donc que cela dégrade le contraste.

Espace 20

**Remarque :** on constatera de manière récurrente dans les calculs qu'en pratique, avec une source étendue, la valeur de  $\Delta p$  ne dépend jamais du point d'observation : comme indiqué à la fin du chapitre précédent, la cohérence spatiale induit une perte de contraste uniforme sur l'écran.

• Cas d'une fente source

**Application 5 : Trous d'Young éclairés par une source large**

Considérons deux trous d'Young éclairés par une fente source de largeur  $b$  centrée sur l'axe optique.

1 - Exprimer les ordres d'interférences  $p_0(x)$  et  $p_{b/2}(x)$  au point de l'écran d'abscisse  $x$  créés par les points de la source situés respectivement en  $X = 0$  et  $X = b/2$ . En utilisant le critère de brouillage, en déduire la largeur de cohérence spatiale de la source.

2 - Un calcul exact permet de montrer que l'éclairement au point  $M$  s'écrit

$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_0 \left[ 1 + \frac{\lambda d}{\pi ab} \sin \left( \frac{\pi ab}{\lambda d} \right) \cos \left( \frac{2\pi ax}{\lambda D} \right) \right]$$

Identifier un terme d'interférences et un facteur de contraste. Déterminer la valeur de  $b$  correspondant à la première annulation du facteur de contraste. Comparer les deux approches.

1 Largeur de cohérence spatiale :

$$p_{b/2}(x) = \frac{a \times b/2}{\lambda d} + \frac{ax}{\lambda D} \quad \text{et} \quad p_0(x) = \frac{a \times 0}{\lambda d} + \frac{ax}{\lambda D}$$

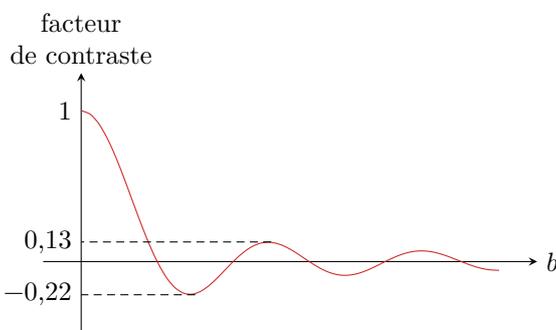
La figure d'interférences est brouillée lorsque que

$$\Delta p = \frac{ab}{2\lambda d} > \frac{1}{2} \quad \text{soit} \quad \frac{ab}{2\lambda d} > \frac{1}{2} \quad \text{donc} \quad b > \frac{\lambda d}{a} = b_c.$$

Espace 21

1 Comparaison à un calcul exact : identifier terme d'interférences et facteur de contraste

$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_0 \left[ 1 + \frac{\lambda d}{\pi ab} \sin \left( \frac{\pi ab}{\lambda d} \right) \cos \left( \frac{2\pi ax}{\lambda D} \right) \right]$$



Première annulation de contraste :

$$\frac{\pi ab}{\lambda d} = \pi \quad \text{soit} \quad b = \frac{\lambda d}{a}$$

Espace 22

↪ La largeur de cohérence spatiale de la source est celle qui donne la première annulation du contraste, ce qui est un bon ordre de grandeur : si  $b > b_c = \lambda d/a$ , le contraste ne dépasse pas 0,22, ce qui est peu.

🚫🚫🚫 **Attention !** Ne pas croire pour autant que la figure d'interférences est « parfaitement » contrastée si la source est plus étroite que la largeur de cohérence spatiale et « pas du tout » si elle est plus large : la variation de contraste est un phénomène progressif.

↪ le critère semi-quantitatif de brouillage ne donne qu'un ordre de grandeur.

► **Pour approfondir** : Démontrons l'expression de l'éclairement observé sur l'écran en utilisant une source étendue de largeur  $b$ . Pour ce faire, découpons par la pensée la source étendue en bandes infinitésimales de largeur  $dX$  incohérentes les unes avec les autres. Supposons la source uniforme : l'éclairement  $d\mathcal{E}_0$  produit sur l'écran par une bande de largeur  $dX$  en l'absence d'interférences est simplement proportionnelle à  $dX$ ,

$$d\mathcal{E}_0 = \alpha dX.$$

L'éclairement total  $\mathcal{E}_0$  produit par la source en l'absence d'interférences vaut donc

$$\mathcal{E}_0 = \int d\mathcal{E}_0 = \int_{-b/2}^{b/2} \alpha dX = \alpha b \quad \text{d'où} \quad \alpha = \frac{\mathcal{E}_0}{b}.$$

D'après la formule de Fresnel, l'élément de source situé en  $X$  produit en un point  $M$  de l'écran un éclairement

$$d\mathcal{E}(M) = 2 \frac{\mathcal{E}_0 dX}{b} [1 + \cos(2\pi p_X(M))] \quad \text{avec} \quad p_X(M) = \frac{aX}{\lambda d} + \frac{ax}{\lambda D}$$

Les différentes bandes étant incohérentes,

$$\mathcal{E}(M) = \int d\mathcal{E}(M) = \int_{-b/2}^{b/2} \frac{2\mathcal{E}_0}{b} \left\{ 1 + \cos\left(\frac{2\pi a}{\lambda} \left(\frac{X}{d} + \frac{x}{d}\right)\right) \right\} dX$$

En calculant l'intégrale et à l'aide de la relation trigonométrique

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2},$$

on aboutit au résultat donné précédemment, dans lequel on peut identifier un facteur de contraste et un terme d'interférences :

$$\mathcal{E}(M) = 2\mathcal{E}_0 \left[ 1 + \underbrace{\frac{\lambda d}{\pi ab} \sin\left(\frac{\pi ab}{\lambda d}\right)}_{\text{contraste}} \underbrace{\cos\left(\frac{2\pi ax}{\lambda D}\right)}_{\text{interférences}} \right]$$

Le facteur de contraste est donné par la fonction  $x \mapsto \sin(x)/x$ , appelée *sinus cardinal*. Elle se rencontre très fréquemment dans le contexte de l'optique ondulatoire.

Remarquons par ailleurs que le facteur de contraste peut prendre des valeurs négatives : on parle d'*inversion de contraste*. Expérimentalement, si l'on augmente progressivement la largeur  $b$  de la source, l'inversion de contraste se manifeste par le fait que les franges sombres deviennent brillantes et réciproquement. ■

### • Conclusion générale



Utiliser une source étendue dans la direction perpendiculaire aux franges permet d'augmenter la luminosité de la figure d'interférences, mais au prix d'une diminution de contraste.

(R!)

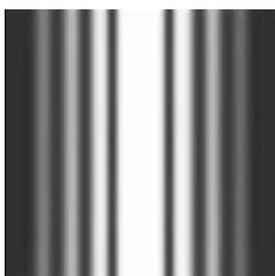
## III.C - Fentes d'Young

Dans le but d'obtenir une figure plus lumineuse, on peut aussi poser la question d'élargir les objets diffractants en remplaçant les pupilles circulaires des trous d'Young par des fentes pour laisser passer plus de lumière. Les résultats précédents se généralisent sans peine.

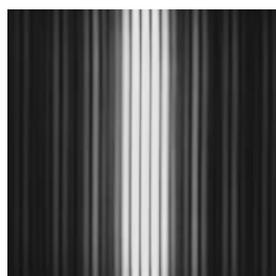


Utiliser des fentes d'Young parallèles à la place de trous d'Young permet d'augmenter la luminosité de la figure d'interférences.

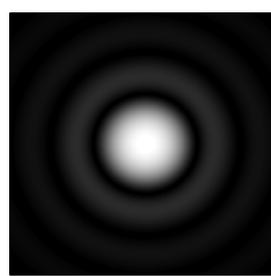
Cependant, comme la figure d'interférences apparaît à l'intérieur de la figure de diffraction par l'un des trous ou l'une des fentes l'observation sur l'écran est modifiée, voir figure 9.



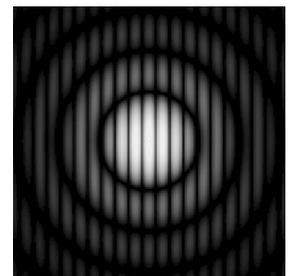
Une fente



Deux fentes



Un trou



Deux trous

Figure 9 – Comparaison entre fentes d'Young et trous d'Young.

Par ailleurs, si les fentes sont trop larges dans la direction perpendiculaires aux franges d'interférences alors la figure de diffraction risque de devenir trop étroite pour pouvoir observer correctement des interférences.



Tous les résultats établis jusqu'à présent se généralisent au cas des fentes d'Young. L'animation ci-contre (flashez ou cliquez sur le QR code), développée par l'école Supoptique, permet de les observer. Elle est très bien faite, je vous encourage à l'utiliser largement lors de vos révisions.

## IV - Réseaux par transmission

### IV.A - Principe : interférences à N ondes

Les dispositifs d'Young étudiés jusqu'à présent n'impliquent que deux chemins optiques différents pour aller de la source au point d'observation, ceux passant par les deux fentes ou trous d'Young.

↪ qu'en est-il si l'on utilise un dispositif permettant à  $N$  rayons lumineux d'interférer ?

**Observation expérimentale :** voir figure 10.

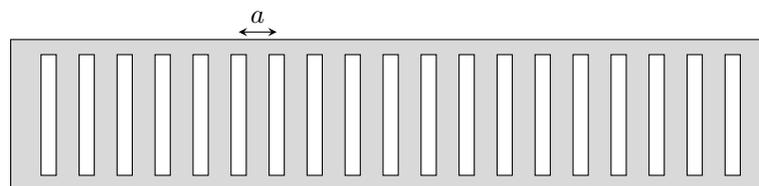


**Figure 10 – Figure obtenue par passage d'un laser au travers de 1 à 6 fentes.** Plus le nombre de fentes est élevé, plus les tâches brillantes sont lumineuses, ce que la figure ne permet pas de montrer.

Plus il y a de fentes au travers desquelles la lumière peut passer, plus celle-ci se retrouve concentrée sur les points les plus lumineux. Ces points coïncident avec la position des franges brillantes lors du passage au travers de deux fentes.

On appelle **réseau optique** un instrument constitué d'une série de motifs identiques, répétés périodiquement, permettant la réflexion ou la transmission d'ondes lumineuses.

La répétition est caractérisée par la période spatiale du réseau  $a$ , appelée **pas du réseau**, ou par la fréquence spatiale  $n = 1/a$ , usuellement nommée **nombre de traits par millimètre**.



**Ordre de grandeur :** les réseaux usuels comptent quelques centaines voire quelques milliers de traits par millimètre.

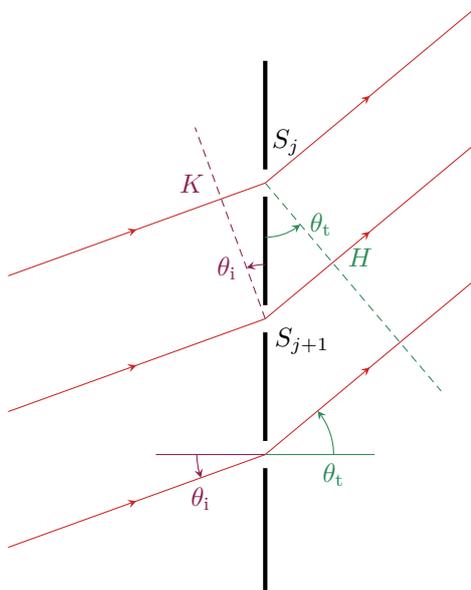
**Restrictions de notre étude :** dans toute la suite, nous ferons les hypothèses suivantes :

- ▷ on ne s'intéresse qu'aux réseaux par transmission ;
- ▷ dans la pratique expérimentale, la source permettant d'éclairer le réseau est toujours située au foyer objet d'une lentille : le réseau est utilisé **en éclairage parallèle** ;
- ▷ dans la pratique expérimentale, l'observation se fait toujours dans le plan focal image d'une lentille de projection : les interférences sont observées à l'infini, ce sont des rayons parallèles qui interfèrent.

## IV.B - Formule des réseaux

### • Différence de marche entre motifs consécutifs

🔴🔴🔴 **Attention !** Comme tous les angles sont algébriques, il faut les dessiner positifs sur le schéma pour que le calcul se passe correctement au niveau des signes. Ainsi, les rayons doivent « arriver du bas » et « repartir vers le haut ».



Avec la trigonométrie habituelle,

$$\sin \theta_i = \frac{KS_j}{a} \quad \text{et} \quad \sin \theta_t = \frac{S_{j+1}H}{a} \quad \text{d'où} \quad \delta = a(\sin \theta_t - \sin \theta_i)$$

Calculons la différence de marche entre deux motifs consécutifs, notés  $S_j$  et  $S_{j+1}$  :

$$\delta = (SS_{j+1}M) - (SS_jM).$$

La source primaire  $S$  est situé à l'infini, donc d'après le théorème de Malus les points  $K$  et  $S_{j+1}$  appartiennent au même plan d'onde. Ainsi,

$$(SK) = (SS_{j+1}).$$

Par ailleurs, l'observation se fait à l'infini. Si la lumière venait du point d'observation, alors d'après le principe de retour inverse et le théorème de Malus les points  $S_j$  et  $H$  appartiendraient au même plan d'onde. Ainsi,

$$(S_jM) = (HM).$$

Ainsi,

$$\delta = [(SS_{j+1}) + (S_{j+1}H) + (HM)] - [(SK) + (KS_j) + (S_jM)]$$

### • Position des franges brillantes

Pour un grand nombre de traits éclairés, les maxima sont très concentrés : on ne s'intéresse donc qu'à la position des franges brillantes. Comme les motifs sont répartis régulièrement, alors la différence de marche entre deux motifs consécutifs est partout la même.

↪ si les ondes issues des motifs  $j$  et  $j + 1$  sont en phase, alors celle issue du motif  $j + 2$  est en phase avec  $j + 1$  et donc également avec celle de  $j$ , etc.

Les motifs étant régulièrement répartis,  
si les ondes issues de *deux* motifs consécutifs du réseau sont en phase au point d'observation,  
alors toutes les ondes issues de *tous* les motifs sont en phase en ce point.

Pour déterminer la position des maxima d'intensité en sortie du réseau,  
il suffit d'établir la condition d'interférences constructives entre deux motifs consécutifs.

Condition d'interférences constructives :

$$p = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{a}{\lambda} (\sin \theta_t - \sin \theta_i) \in \mathbb{Z}.$$

Espace 24

**Notations spécifiques aux réseaux :** L'angle de transmission dans la direction donnant un ordre d'interférences  $p$  est noté  $\theta_p$  plutôt que  $\theta_t$ . De plus, si l'angle d'incidence est égal à l'angle de transmission alors on trouve directement  $p = 0$  soit  $\theta_0 = \theta_{p=0} = \theta_i$ . Ainsi, l'angle d'incidence est traditionnellement noté  $\theta_0$ . Plus généralement, on se méfiera du léger glissement de notations et de vocabulaire entre les interférences à deux ondes et les réseaux.

#### Formule des réseaux :

Les raies brillantes en sortie d'un réseau apparaissent dans les directions telles que

$$\sin \theta_p - \sin \theta_0 = p \frac{\lambda}{a} \quad \text{avec } p \in \mathbb{Z}.$$

La valeur de  $p$  est appelée **ordre** de la raie.

La direction des maxima est représentée figure 11 : on identifie en ordonnée  $\sin \theta_p$  ( $p \in \mathbb{Z}$ ) à partir de  $\sin \theta_0$ , puis la direction des rayons par analogie avec le cercle trigonométrique (il n'est pas nécessaire de savoir refaire la figure). Un sinus devant être inférieur à 1, le nombre d'ordre visibles est nécessairement limité.

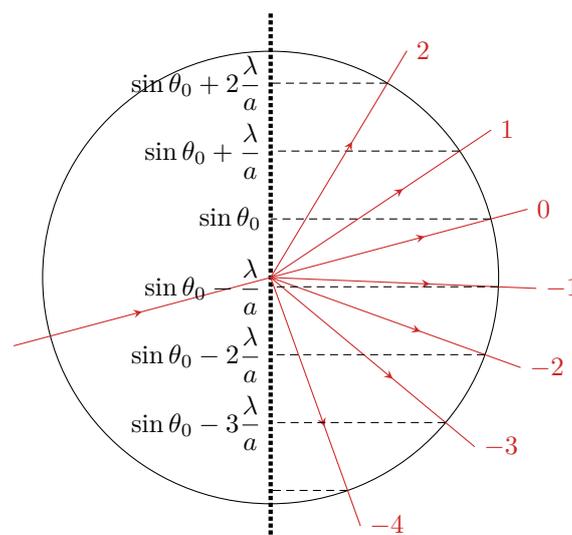


Figure 11 – Direction des maxima d'intensité en sortie d'un réseau.

## IV.C - Utilisation en spectroscopie

### • Idée de physique

La positions des ordres du réseau dépend de la longueur d'onde : un réseau peut donc être utilisé pour séparer spatialement les différentes composantes spectrales d'une lumière incidente. D'après la formule des réseaux,

$$\sin \theta_p = \sin \theta_0 + p \frac{\lambda}{a} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{a}{p} (\sin \theta_p - \sin \theta_0).$$

Connaissant  $a$  (ou plus souvent le nombre de traits par millimètre  $n = 1/a$ ), en ayant repéré le numéro  $p$  de l'ordre et mesuré la position angulaire  $\theta_p$  des raies brillantes, on peut en déduire la longueur d'onde correspondante.

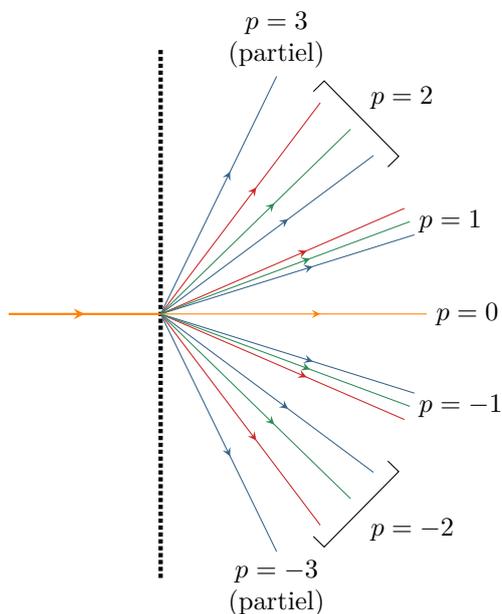
### • « Dispersion » par le réseau



Dans un ordre donné, plus la longueur d'onde est grande, plus elle apparaît déviée par le réseau.  
Les longueurs d'onde sont d'autant plus séparées que l'ordre est élevé.



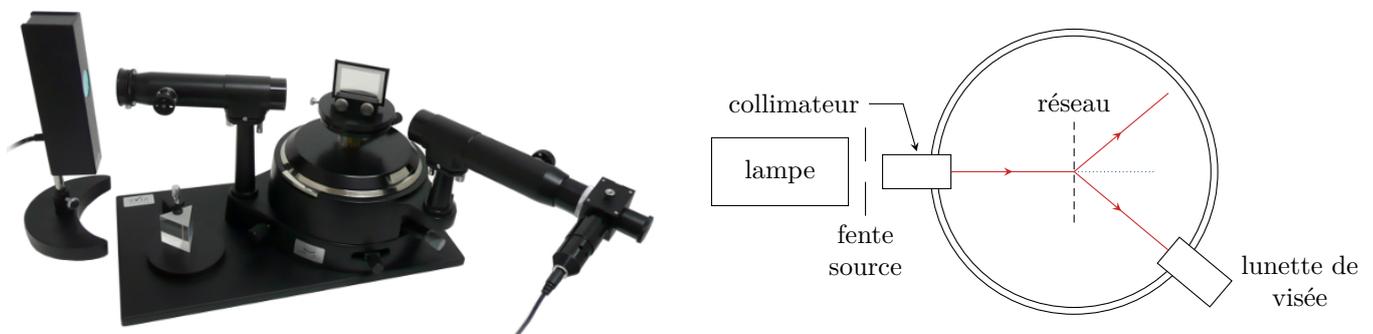
**Attention !** Il ne s'agit pas du tout d'une déviation géométrique comme peut le faire un prisme, mais bien d'un phénomène d'interférences. Cependant, l'abus de langage est permis par l'analogie des observations : « un réseau dévie davantage le rouge que le bleu ».



- ▷ Certains ordres peuvent ne pas apparaître en entier sur l'écran si certaines raies sont déviées : c'est par exemple le cas des ordres  $\pm 3$  de la figure ci-contre.
- ▷ Dans certains cas, on rencontre également du **recouvrement d'ordres** : les raies les plus déviées de l'ordre  $n$  sont davantage déviées que les raies les moins déviées de l'ordre  $n + 1$ . Les ordres apparaissent alors mélangés.

### • Exemple de montage

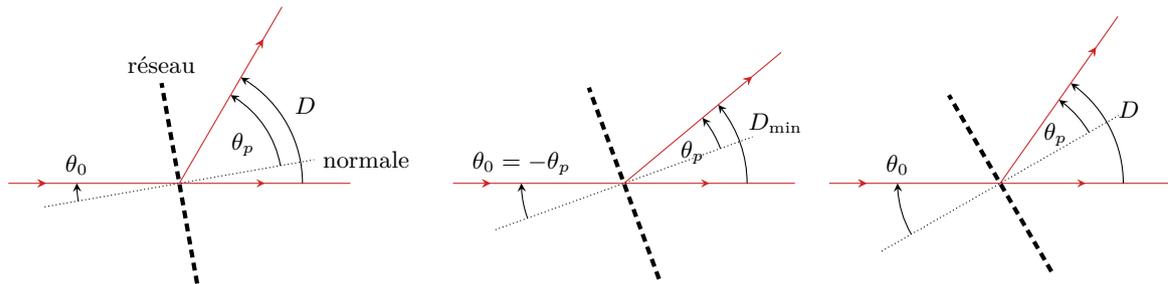
On peut par exemple utiliser un montage à goniomètre, voir figure 12. Le collimateur permet d'obtenir une source à l'infini à partir d'une lampe spectrale, et la lunette de visée d'observer à l'infini. Le vernier du goniomètre permet de mesurer précisément les positions angulaires des différentes raies. Une méthode efficace est celle du minimum de déviation, cf. TP.



**Figure 12 – Montage de spectrométrie à réseau utilisant un goniomètre.** Sur la photo, on retrouve de gauche à droite la lampe à analyser, le collimateur, le réseau (tourné pour être visible sur la photo) et la lunette de visée.

► **Pour approfondir** : Mesurer une longueur d'onde à l'aide d'un réseau peut en principe être réalisé avec une bonne précision par exploitation directe de la formule des réseaux. Cependant, en pratique, la mesure précise des angles  $\theta_p$  et  $\theta_0$  n'est pas aisée car elle nécessite un repérage précis de la normale au réseau. Une méthode plus efficace consiste à étudier la *dévi*ation par le réseau, définie comme l'angle que forme le rayon émergent par rapport au rayon incident,

$$D = \theta_p - \theta_0 .$$



Montrons que l'angle de déviation d'une raie donnée ( $p$  fixé) passe par un minimum pour une valeur de  $\theta_0$  bien choisie, comme illustré sur la figure ci-dessus. Les angles  $D$  et  $\theta_p$  sont vus comme des fonctions de l'angle  $\theta_0$ . Lorsque la déviation est minimale,

$$\frac{dD}{d\theta_0} = \frac{d\theta_p}{d\theta_0} - 1 \stackrel{\uparrow}{=}_{\text{min}} 0 \quad \text{donc} \quad \frac{d\theta_p}{d\theta_0} \stackrel{\uparrow}{=}_{\text{min.dév.}} 1 .$$

De plus, en dérivant la formule des réseaux par rapport à l'angle d'incidence  $\theta_0$  pour un ordre  $p = \text{cte}$ , on obtient

$$\frac{d\theta_p}{d\theta_0} \times \cos \theta_p - \cos \theta_0 = 0$$

Au niveau du minimum de déviation,  $d\theta_p/d\theta_0 = 1$  donc

$$\cos \theta_p - \cos \theta_0 \stackrel{\uparrow}{=}_{\text{min.dév.}} 0 \quad \text{soit} \quad \theta_p \stackrel{\uparrow}{=}_{\text{min.dév.}} = \pm \theta_0 .$$

Seul le signe  $-$  est physiquement intéressant, car le signe  $+$  correspond à une déviation nulle, c'est-à-dire à l'ordre 0 qui n'est pas pertinent ici. Ainsi, dans la situation où la déviation est minimale,

$$D_{\text{min}} = \theta_p - \theta_0 = 2\theta_p \quad \text{d'où} \quad \theta_p = -\theta_0 = \frac{D_{\text{min}}}{2} .$$

En reprenant la formule des réseaux, on a alors

$$2 \sin \frac{D_{\text{min}}}{2} = \frac{p\lambda}{a} .$$

On montre ainsi que mesurer la déviation minimale d'une raie permet d'en déduire sa longueur d'onde. ■