Analyse documentaire

Nombre de Reynolds

BLAISE PASCAL
PT 2021-2022

Travail à réaliser

Lire soigneusement l'article suivant. À la fin de votre lecture, vous devez avoir compris :
▷ comment le nombre de Reynolds est construit ;
▷ sa signification physique comme « comparateur » des effets de convection et de viscosité ;
▷ les renseignements qu'il apporte sur la nature de l'écoulement.

Nombres adimensionnels en mécanique des fluides

Osborne Reynolds est un ingénieur et physicien anglais du XIX$^\text{e}$ siècle, qui apporta d'importantes contributions à la dynamique des fluides. Son dispositif expérimental, voir figure 1, lui permettait de visualiser les lignes de courant d'un écoulement en injectant un colorant au centre d'une canalisation cylindrique rectiligne. En augmentant progressivement le débit de l'écoulement (donc la vitesse débitante), il fit le constat que, toutes choses égales par ailleurs, l'écoulement pouvait complètement changer, et notamment perdre son caractère stationnaire : on parle aujourd'hui d'écoulements laminaires ou turbulents. En poussant plus loin ses investigations, il découvrit que le caractère turbulent ou laminaire de l'écoulement dépendait de la valeur prise par un nombre adimensionnel qui porte aujourd'hui son nom : le nombre de Reynolds.

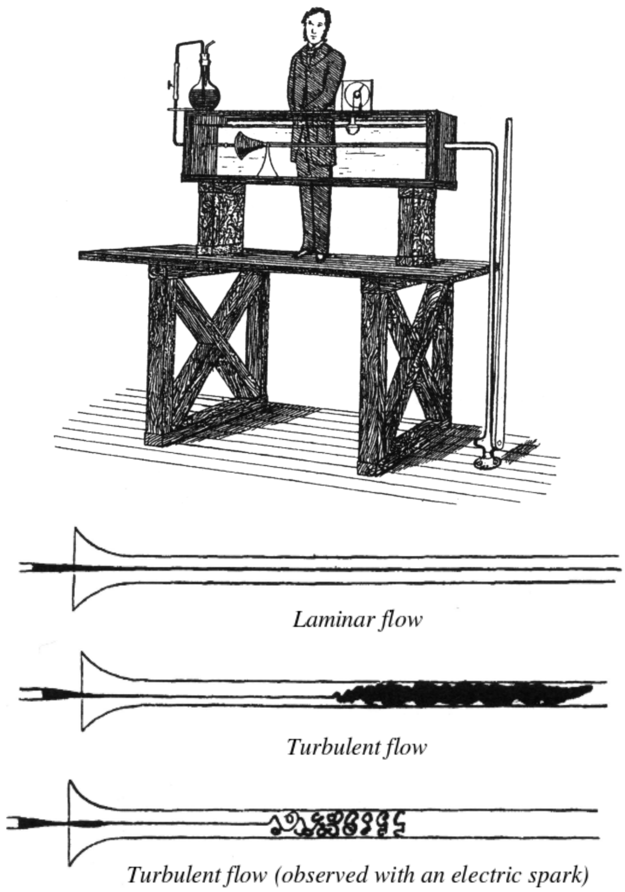

Figure 1 – Travaux expérimentaux d'Osborne Reynolds.

Équation de Navier-Stokes

Pour comprendre comment émerge le nombre de Reynolds, il est nécessaire de revenir à l'équation fondamentale de la dynamique des fluides : l'équation de Navier-Stokes. Celle-ci traduit le théorème de la résultante cinétique appliqué à une particule fluide au sein de l'écoulement. En se limitant à la pesanteur, aux forces pressantes, et aux forces de viscosité, elle s'écrit

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}})\,\vec{v}\right) = \rho\,\vec{g} - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P + \eta\,\vec{\Delta}\vec{v}\,,$$

où $\vec{\Delta}$ désigne l'opérateur laplacien, reliée aux dérivées secondes. Le membre de gauche traduit l'accélération de la particule fluide, et il est donc physiquement associé à la convection au sein du fluide. À cette équation s'ajoute également une équation dite « de conservation de la masse », qui prend la forme

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\vec{v}) = 0\,.$$

Ce système d'équations est non-linéaire, et dans la grande majorité des situations il n'en existe pas de solution analytique.

Écriture adimensionnée

Pour introduire le nombre de Reynolds, considérons l'exemple d'un écoulement dans une conduite cylindrique. Cet écoulement peut être caractérisé par une vitesse caractéristique, sa vitesse débitante U ; une longueur caractéristique, le diamètre D de la conduite ; une pression caractéristique P_0 ; ainsi que les propriétés du fluide dans lequel se fait l'écoulement, en l'occurrence sa masse volumique ρ et sa viscosité dynamique η. Ces grandeurs caractéristiques permettent de réécrire l'équation de Navier-Stokes avec des grandeurs sans dimension, notées d'une étoile $\star$ dans cet article :

$$\vec{v} = U\,\vec{v}^\star \qquad P = P_0\,P^\star$$

les dérivées spatiales peuvent s'écrire

$$\mathrm{d}x = D\,\mathrm{d}x^\star \quad \mathrm{d}y = D\,\mathrm{d}y^\star \quad \mathrm{d}z = D\,\mathrm{d}z^\star$$

et enfin la dérivée temporelle est

$$\mathrm{d}t = \frac{D}{U}\mathrm{d}t^\star\,.$$

Après simplification, l'équation de Navier-Stokes devient

$$\frac{\partial \vec{v}^\star}{\partial t^\star} + (\vec{v}^\star \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}^\star)\,\vec{v}^\star = \frac{gD}{U^2}\frac{\vec{g}}{g} - \frac{P_0}{\rho U^2}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}^\star P^\star + \frac{\eta}{DU\rho}\vec{\Delta}^\star\vec{v}^\star\,.$$

Cette écriture a l'intérêt de faire apparaître trois préfacteurs sans dimension, qui permettent de comparer l'importance des différents phénomènes (convection, gravité, pression, viscosité) au sein de l'écoulement. La valeur de référence est donnée par le préfacteur 1 devant le terme convectif à gauche de l'équation.

- Le nombre de Froude $Fr = U^2/gD$ caractérise l'influence de la gravité sur l'écoulement comparativement à la convection. Dans les écoulements industriels, on a généralement $Fr \gg 1$, signe que les effets de la gravité y sont négligeables.
- Le rapport $\rho U^2/P_0$ ne porte pas de nom particulier.
- Enfin, le nombre de Reynolds $Re = DU\rho/\eta$ compare l'importance des effets de convection et de viscosité au sein de l'écoulement : plus il est faible, plus la viscosité joue un rôle important. Ce nombre est souvent très grand dans les écoulements industriels.

Même si cette distinction doit être faite avec précaution, la valeur prise par le nombre de Reynolds permet de classifier les écoulements en trois catégories.

- $Re \ll 1$: écoulements rampants (aussi dits « écoulements de Stokes »), le terme de viscosité $\vec{\Delta}\vec{v}$ domine et les termes non-linéaires des équations de Navier–Stokes sont négligeables ;
- $1 < Re < 10^3$: écoulements laminaires, la convection et la viscosité sont d'importance équivalente ;
- $Re > 10^4$: écoulements turbulents, le terme de convection non linéaire domine.

Dans certains écoulements turbulents, on peut faire l'approximation que le fluide se comporte comme un fluide parfait en dehors d'une zone proche des parois, appelée couche limite, où les effets de viscosité et turbulence se font sentir.

Écoulements similaires

Comme déjà mentionné, l'équation de Navier-Stokes est non-linéaire et en dehors de quelques rares cas simples on n'en connaît pas de solution analytique. Les problèmes associés à la mécanique des fluides sont nombreux dans l'industrie (aérodynamique, énergétique, traitement des eaux, etc.) et l'absence de solution analytique doit donc être, au moins partiellement, contournée par des solutions pragmatiques. La résolution de ces problèmes passe souvent par de la modélisation numérique et/ou des tests en soufflerie.

L'adimensionnalisation des équations de Navier-Stokes présente alors un intérêt supplémentaire pour la conception de modèles réduits. En effet, deux écoulements a priori différents (par exemple avec des fluides différents ou à des échelles différentes) mais qui auraient les mêmes nombres adimensionnels présenteront une allure identique, comme l'illustre la figure 2.

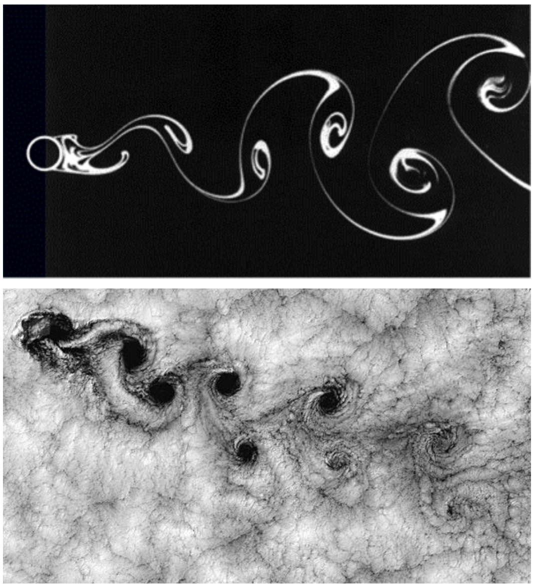

Figure 2 – Allées de von Karman. En haut, image obtenue en laboratoire par écoulement d'une huile visqueuse autour d'un cylindre ; en bas image obtenue par observation satellite des nuages autour d'un volcan.

C'est sur ce principe que sont construites certaines souffleries permettant de tester des objets volants à très grande vitesse, voir figure 3. On reproduit l'objet dont on veut déterminer les performances à plus petite échelle mais en respectant ses proportions, et on le place dans un écoulement à plus grande vitesse (ou dans un fluide différent) de façon à conserver la valeur du nombre de Reynolds, et plus généralement de tous les nombres sans dimension caractéristiques de l'écoulement.

Il est cependant parfois impossible de maintenir une similitude exacte pour tous les nombres adimensionnels qui gouvernent un écoulement. Par exemple, en plus des nombres adimensionnels présentés pour les équations de Navier-Stokes, les écoulements compressibles font intervenir le nombre de Mach défini par $Ma = U/C$ où C est la célérité du son dans le fluide considéré ; les écoulements transitoires font intervenir le nombre de Strouhal $St = fD/U$ (f est la fréquence caractéristique de l'écou-

Figure 3 – Essai aérodynamique d'un avion à réaction.

lement), etc. Il n'est donc pas si fréquent de pouvoir élaborer une maquette respectant toutes les similitudes. Les résultats expérimentaux obtenus sont alors plus difficiles à interpréter.

Simulations numériques

Outre ces études expérimentales, il est impossible aujourd'hui de ne pas évoquer la simulation numérique d'écoulements (Computational Fluids Dynamics en anglais). Les améliorations apportées aux méthodes numériques (le schéma d'Euler explicite est largement dépassé !) et la puissance de calcul des processeurs modernes permettent de reproduire très fidèlement la plupart des caractéristiques des écoulements industriels. De nombreux logiciels de recherche ou commerciaux équipent aujourd'hui toutes les branches industrielles qui ont à traiter des problèmes de mécanique des fluides.

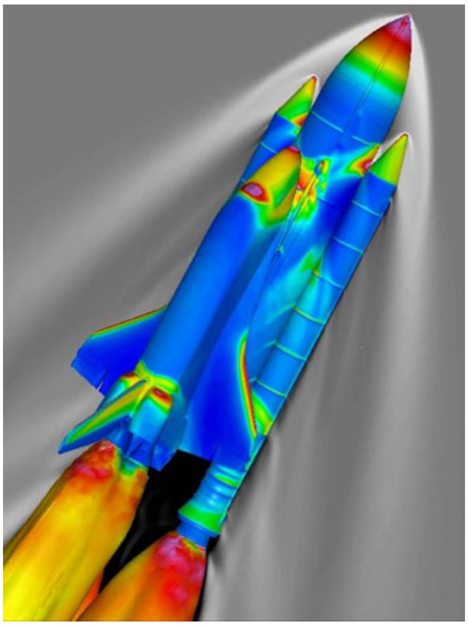

Figure 4 – Simulation de l'écoulement d'air autour d'une navette spatiale. Le code couleur indique la pression locale.

(Auteurs : C. Cayssiols et É. Thibierge, pour nos classes de PT)