Systèmes linéaires

Exercice 1 : Obtention d'une équation différentielle

2 | 2

▷ *Représentation complexe.*

Raisonnons à partir de la figure 1.

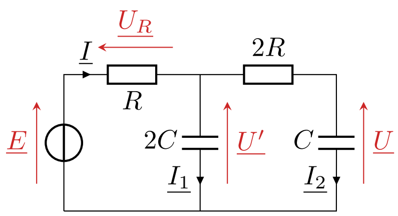

Figure 1 – Schéma des notations.

D'après la loi des nœuds,

$$\underline{I} = \underline{I_1} + \underline{I_2}$$

et en utilisant les admittances,

$$\frac{1}{R}\underline{U_R} = 2\mathrm{j}C\omega\underline{U'} + \mathrm{j}C\omega\underline{U}\,.$$

Pour limiter les fractions on multiplie directement par R,

$$\underline{U_R} = 2\mathrm{j}\omega\tau\underline{U'} + \mathrm{j}\omega\tau\underline{U}$$

D'après la loi des mailles dans la maille de droite,

$$\underline{U'} = \underline{U} + 2R\underline{I_2} = \underline{U} + 2\mathrm{j}RC\omega\underline{U}$$

et dans la maille de gauche

$$\underline{U_R} = \underline{E} - \underline{U'} = \underline{E} - \underline{U} - 2\mathrm{j}RC\omega\underline{U}\,.$$

En regroupant et en identifiant $RC = \tau$,

$$\underline{E} - \underline{U} - 2\mathrm{j}\omega\tau\underline{U} = 2\mathrm{j}\omega\tau(\underline{U} + 2\mathrm{j}\omega\tau\underline{U}) + \mathrm{j}\omega\tau\underline{U}$$

soit

$$\underline{E} = \underline{U} + 5\mathrm{j}\omega\tau\underline{U} + 4\tau^2(\mathrm{j}\omega)^2\underline{U}$$

En identifiant les puissances de $\mathrm{j}\omega$ à l'ordre des dérivées pour retourner dans le domaine des représentations réelles, on aboutit à

$$\boxed{e = u + 5\tau\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + 4\tau^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}}$$

ce qui est bien le résultat escompté.

BY-NC-SA

Exercice 2 : Filtre RL

1 | 1 |

▷ *Fonction de transfert ;*
▷ *Diagramme de Bode ;*
▷ *Signal de sortie d'un filtre.*

1 Analyse asymptotique par équivalence :
▷ à très basse fréquence, la bobine est équivalente à un fil, donc $\underline{S} = 0$;
▷ à très haute fréquence, la bobine est équivalente à un interrupteur ouvert, donc le courant dans le filtre est nul et on déduit de la loi des mailles $s = e$.
Conclusion : le filtre est a priori **un filtre passe-haut.**

2 Utilisons un pont diviseur de tension en représentation complexe,

$$\underline{H} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{\mathrm{j}L\omega}{R + \mathrm{j}L\omega} = \frac{\mathrm{j}\frac{L}{R}\omega}{1 + \mathrm{j}\frac{L}{R}\omega} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\underline{H} = H_0 \frac{\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_\mathrm{c}}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_\mathrm{c}}} \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} H_0 = 1 \\ \omega_\mathrm{c} = R/L \end{cases}}$$

3 Simplifions la fonction de transfert dans la limite très basse fréquence $\omega \ll \omega_\mathrm{c}$,

$$\underline{H} \sim \frac{j\frac{\omega}{\omega_\mathrm{c}}}{1} \sim j\frac{\omega}{\omega_\mathrm{c}} \qquad \text{donc} \qquad |\underline{H}| = \frac{\omega}{\omega_\mathrm{c}}$$

Ainsi,

$$G_\mathrm{dB}(\omega) = 20 \log |\underline{H}| = 20 \log x$$

Comme l'axe des abscisses d'un diagramme de Bode est une échelle logarithmique (en d'autres termes l'abscisse est $\log x$), on en déduit directement que **la pente de l'asymptote à basse fréquence est de pente +20 dB/décade** et **qu'elle passe par le point $G_\mathrm{dB} = 0$ en $x = 1$.**

De même dans la limite très haute fréquence $\omega \gg \omega_\mathrm{c}$,

$$\underline{H} \sim \frac{\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_\mathrm{c}}}{\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_\mathrm{c}}} = 1\,. \qquad \text{d'où} \qquad G_\mathrm{dB}(\omega) = 20 \log 1 = 0\,.$$

L'asymptote haute fréquence est donc **une asymptote horizontale**.

L'allure du diagramme de Bode est représentée figure 2.

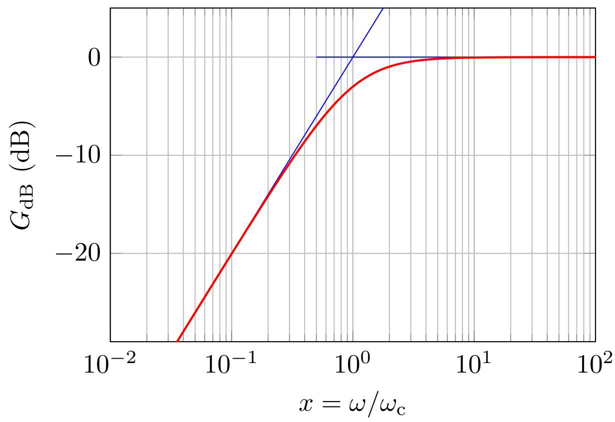

Figure 2 – Diagramme de Bode du filtre RL.

4 Comme les trois harmoniques sont de même amplitude et en phase

$$\boxed{e(t) = E_0 \left[\cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t) + \cos(2\pi f_3 t)\right]}\,.$$

D'après les valeurs numériques données, la pulsation de coupure du filtre vaut

$$\omega_\mathrm{c} = \frac{R}{L} = 1{,}0 \cdot 10^5\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}} \qquad \text{soit} \qquad f_\mathrm{c} = \frac{\omega_\mathrm{c}}{2\pi} = 16\,\mathrm{kHz}\,.$$

BY-NC-SA

> ***Rappel de cours :*** *Pour un signal d'entrée*
> $$e(t) = \sum_n E_n \cos(\omega_n t + \varphi_n)$$
> *le signal de sortie du filtre s'écrit*
> $$s(t) = \sum_n |\underline{H}(\omega_n)|\, E_n \cos\left(\omega_n t + \varphi_n + \arg \underline{H}(\omega_n)\right)$$
> *où* $|\underline{H}(\omega_n)| = 10^{G_{\mathrm{dB}}(\omega_n)/20}$ *et* $\arg \underline{H}(\omega_n) = \varphi(\omega_n)$.

Comme $x_1 = f_1/f_c = 6 \cdot 10^{-3}$, la composante associée est très atténuée : le gain n'est même pas représenté sur le diagramme donné. On peut donc négliger sa contribution au signal de sortie. De même, la contribution de fréquence f_2 (soit $x_2 = 6 \cdot 10^{-2}$) est atténuée d'environ 22 dB, ce qui correspond à un facteur multiplicatif 1/12. Elle est de plus déphasée d'environ 1,5 rad. Enfin la contribution de fréquence f_3 (soit $x_3 = 6{,}25$) est associée à un gain à peu près nul, signe qu'elle n'est pas atténuée, mais on peut estimer son déphasage à 0,2 rad. Ainsi,

$$\boxed{s(t) = \frac{E_0}{12} \cos\left(2\pi f_2 t + 1{,}5\right) + E_0 \cos(2\pi f_3 t + 0{,}2)\,.}$$

5 La fréquence du signal est bien plus faible que la fréquence de coupure du filtre, qui est dans son domaine asymptotique, décrit par une pente de 20 dB/décade dans le diagramme de Bode. En repassant en représentation temporelle, cela indique que le circuit se comporte en dérivateur,

$$s(t) \propto \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}\,.$$

La pente d'un signal triangle étant constante, alternativement positive et négative, le signal dérivé présente des plateaux alternativement positifs et négatifs, ce qui est bien un signal créneau de même fréquence que le signal triangle.

Exercice 3 : Filtre RLC

oral banque PT | 3 | 1

- *Fonction de transfert ;*
- *Diagramme de Bode ;*
- *Signal de sortie d'un filtre.*

1 Dans la limite très basse fréquence, la bobine est équivalente à un fil et C à un interrupteur ouvert, donc l'intensité dans la branche est nulle, et ainsi $v_s = 0 + 0$. Dans la limite très haute fréquence, C est équivalent à un fil donc on a directement $v_s = v_e$.

$\rightsquigarrow$ le filtre est un passe-haut.

2 Diviseur de tension :

$$\underline{H} = \frac{\underline{Z_{RL}}}{\underline{Z_{RL}} + \underline{Z_C}} = \frac{R + \mathrm{j}L\omega}{R + \mathrm{j}L\omega + \dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}}\,.$$

Pour passer à la forme canonique, on multiplie en haut et en bas par $\mathrm{j}C\omega$,

$$\underline{H} = \frac{\mathrm{j}RC\omega - LC\omega^2}{1 + \mathrm{j}RC\omega - LC\omega^2}\,.$$

> *On identifie l'opération à faire en comparant la forme canonique à l'expression que l'on a : le dénominateur n'est pas fractionnaire.*
>
> *Pour avancer, on peut proposer à l'examinateur d'identifier directement ω_0 et Q car il s'agit d'un RLC série, donc d'un circuit de référence. S'il refuse, il faut alors faire le calcul ...*

Par identification du dénominateur avec la forme canonique, on en déduit

$$-LC\omega^2 = -x^2 = -\frac{\omega^2}{\omega_0^2} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\,.}$$

BY-NC-SA

et

$$\mathrm{j}RC\omega = \frac{\mathrm{j}x}{Q} = \frac{\mathrm{j}\omega}{Q\omega_0} \qquad \text{soit} \qquad Q = \frac{1}{RC\omega_0} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\,.}$$

3 En très basse fréquence,

$$\underline{H} \sim \frac{\frac{\mathrm{j}x}{Q}}{1} = \frac{\mathrm{j}x}{Q} \qquad \text{d'où} \qquad G_{\mathrm{dB}} \sim 20\log x - 20\log Q\,,$$

la pente est donc de +20 dB/décade.

En très haute fréquence,

$$\underline{H} \sim \frac{-x^2}{-x^2} = 1 \qquad \text{d'où} \qquad G_{\mathrm{dB}} = 0$$

ce qui est conforme avec **une asymptote horizontale.**

Avec l'ordonnée à l'origine de l'asymptote TBF ($x = 10^0 = 1$), $G_{\mathrm{dB}} = -20\log Q = -20\,\mathrm{dB}$, on déduit $\log Q = 1$ soit $Q = 10$. On peut aussi utiliser le fait que $G_{\mathrm{TBF}} = 0$ lorsque $x = Q$, ou encore exprimer la valeur exacte de $|\underline{H}(x{=}1)|$ en fonction de Q.

> *Bien que le filtre soit d'ordre 2, il n'a pas d'asymptote de pente ±40 dB/décade : cela n'a rien de contradictoire, et vient ici du fait qu'on mesure la sortie aux bornes d'une association de dipôles.*

4 La question n'est pas simple : changer R modifie la valeur de Q, mais cela a un impact énorme sur le diagramme de Bode, d'une part via l'intermédiaire de l'ordonnée à l'origine de l'asymptote basse fréquence et d'autre part car elle contraint l'existence ou non d'une résonance. Une illustration est donnée sur la figure 3.

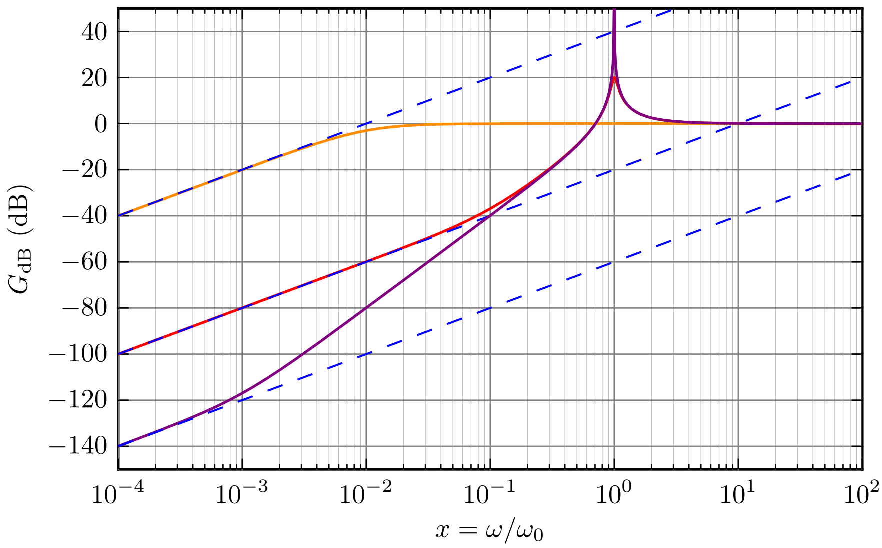

Figure 3 – Diagrammes de Bode asymptotique d'un filtre RLC. Les trois diagrammes sont tracés pour la même fonction de transfert, la même pulsation propre, seule la valeur du facteur de qualité est modifiée : elle vaut 0,01 pour la courbe orange, 10 pour la courbe rouge (cas de l'énoncé) et 1000 pour la courbe violette. Version couleur sur le site de la classe.

Le signal carré est la dérivée du signal triangulaire. Le facteur de qualité du filtre est donc tel que tout le spectre du signal soit dans le domaine très basse fréquence du filtre : comme la pente de l'asymptote est de +20 dB/décade, il se comporte en dérivateur.

Si l'on observe des impulsions, cela signifie que les variations brusques du signal, associées aux hautes fréquences, sont sensiblement mieux transmises que les variations lentes, associées aux basses fréquences et qui décrivent son allure globale. Le facteur de qualité est donc tel que les basses fréquence du spectre soient coupées et les hautes fréquences transmises.

Par exemple, si la fréquence fondamentale du signal est telle que $x = 1 \cdot 10^{-3}$, alors la première situation pourrait correspondre à la courbe rouge de la figure 3, et la deuxième à la courbe orange.

BY-NC-SA

Exercice 4 : Signal de sortie d'un filtre

adapté oral banque PT | 3 | 2

- *Analyse de Fourier ;*
- *Diagramme de Bode ;*
- *Signal de sortie d'un filtre.*

Attention ! Les deux voies de l'oscilloscope ne sont pas représentées à la même échelle !

1 Le signal créneau a une **amplitude de 2,5 V**, une **période de 1 ms** soit une **fréquence de 1 kHz** et une **valeur moyenne nulle**.

2 On constate sur le chronogramme que le signal créneau est impair, $v_\mathrm{e}(-t) = -v_\mathrm{e}(t)$, soit en termes de développement de Fourier

$$-\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(2\pi k f t) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cos(2\pi k f t) = -\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(2\pi k f t) - \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cos(2\pi k f t)$$

soit à tout instant

$$2\sum_{k=1}^{\infty} B_k \cos(2\pi k f t) = 0$$

ce qui ne peut être vérifié que si

$$\boxed{\forall k, \quad B_k = 0\,.}$$

> *En termes mathématiques, on utilise le fait que les fonctions sinusoïdales constituent une famille libre. Physiquement, un signal est constamment nul si et seulement si toutes les harmoniques de ce signal sont d'amplitude nulles.*

3 Le diagramme de Bode du filtre est celui d'un filtre passe-bande dont la fréquence centrale est $f_0 = 3\,\mathrm{kHz}$.

4 Si on modélise le signal de sortie par une unique sinusoïde, on lit graphiquement que celle-ci aurait une période égale à un tiers de la période du créneau, soit une **fréquence $3f = 3\,\mathrm{kHz}$**, et une amplitude que l'on peut estimer **égale à 1 V**, en tenant compte de l'échelle différente. Cette sinusoïde correspond à l'harmonique de rang $k = 3$ du signal d'entrée.

5 Les deux harmoniques « candidates » sont celles dont la fréquence est la plus proche de la fréquence centrale du filtre, car ce seront les moins atténuées par le filtre : les deux harmoniques envisageables sont donc le fondamental $k = 1$ et l'harmonique de rang $k = 5$.

6 On constate graphiquement que la « sinusoïde » envisagée précédemment a une amplitude qui varie à la même fréquence que le créneau. La deuxième harmonique à considérer serait donc le fondamental $k = 1$ du créneau. Retrouvons ce résultat à partir du diagramme de Bode.

- pour le fondamental $k = 1$: $f = 1\,\mathrm{kHz}$ donc $G_\mathrm{dB} = -22\,\mathrm{dB}$, si bien que dans le signal de sortie l'harmonique a une amplitude
$$A_{1,\mathrm{s}} = |\underline{H}(1\,\mathrm{kHz})|\,A_{1,\mathrm{e}} = 10^{-22/20}\frac{4A}{\pi}\,.$$
- pour l'harmonique $k = 5$: $f = 5\,\mathrm{kHz}$, donc $G_\mathrm{dB} = -15\,\mathrm{dB}$, si bien que dans le signal de sortie l'harmonique a une amplitude
$$A_{5,\mathrm{s}} = |\underline{H}(1\,\mathrm{kHz})|\,A_{5,\mathrm{e}} = 10^{-15/20}\frac{4A}{5\pi}\,.$$

Finalement, le rapport des amplitudes de ces deux harmoniques vaut

$$\frac{A_{1,\mathrm{s}}}{A_{5,\mathrm{s}}} = \frac{10^{-22/20}}{10^{-15/20}} \times 5 = 2{,}2\,,$$

ce qui confirme que le fondamental joue un rôle plus important dans le signal de sortie que l'harmonique $k = 5$.

7 L'amplitude de toutes les harmoniques de rang $k \geq 7$ est inférieure à celle de rang 5 dans le signal d'entrée, et on constate sur le diagramme de Bode qu'elles sont encore plus atténuées par le filtre que l'harmonique de rang 5. Comme l'harmonique de rang 5 est déjà négligée, celles de rang $k \geq 7$ le sont forcément aussi.

8 On calcule d'abord les valeurs des amplitudes ... puis on trace !

BY-NC-SA

Étienne Thibierge, 24 août 2021, www.etienne-thibierge.fr

Harmonique k	Fréquence f_k (kHz)	Amplitude en entrée $4A/k\pi$ (V)	Amplitude en sortie $10^{G_{\mathrm{dB}}(f_k)/20} \times 4A/k\pi$ (V)
1	1	3,2	0,24
3	3	1,1	2,2
5	5	0,64	0,12
7	7	0,45	0,05

> *On remarque que le caractère négligeable des harmoniques 5 et 7 s'avère finalement assez discutable !*

BY-NC-SA