BLAISE PASCAL
PT 2021-2022

Cours 2 – Électronique *Version prof*

Électronique numérique

Plan du cours

Au programme

Extrait du programme officiel : partie 2 « Électronique », bloc 4 « Électronique numérique ».

Le bloc 4 est exclusivement étudié de manière expérimentale et aborde la question du traitement numérique du signal dans le prolongement du programme de première année. Le professeur introduira les thèmes proposés au fur et à mesure des besoins et en relation avec les autres sujets d'étude. Le phénomène de repliement de spectre est expliqué qualitativement à l'aide d'une analogie stroboscopique, l'objectif étant de mettre en place la condition de Nyquist-Shannon et de réaliser convenablement une acquisition numérique en vue d'une analyse spectrale. Afin de mettre en évidence d'autres effets associés à l'échantillonnage, on réalise de manière comparative un filtre analogique passe-bas et un filtre numérique remplissant la même fonction, ce dernier étant réalisé à l'aide d'une feuille de calcul traitant l'acquisition numérique d'une entrée analogique, un CNA restituant ensuite une sortie analogique. On étudie expérimentalement l'influence de la fréquence d'échantillonnage.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Échantillonnage.	**Décrire le mouvement apparent d'un segment tournant observé avec un stroboscope.** **Expliquer l'influence de la fréquence d'échantillonnage.**
Condition de Nyquist-Shannon.	**Mettre en évidence le phénomène de repliement de spectre dû à l'échantillonnage lors de l'utilisation d'un oscilloscope numérique ou d'une carte d'acquisition.**
Analyse spectrale numérique.	**Choisir les paramètres (durée, nombre d'échantillons, fréquence d'échantillonnage) d'une acquisition numérique afin de respecter la condition de Nyquist-Shannon.**
Filtrage numérique.	**Réaliser un filtrage numérique passe-bas d'une acquisition, et mettre en évidence la limitation introduite par l'échantillonnage.**

En **gras**, les points devant faire l'objet d'une approche expérimentale.

Extrait du programme officiel de PTSI : partie « Formation expérimentale ».

Notions et contenus	Capacités exigibles
Numérisation d'un signal.	**Déterminer le nombre de bits d'une conversion A/N et N/A.**
Analyse spectrale.	**Effectuer l'analyse spectrale d'un signal périodique à l'aide d'un oscilloscope numérique ou d'une carte d'acquisition.** **Choisir de façon cohérente la fréquence d'échantillonnage et la durée totale d'acquisition.**

En **gras**, les points devant faire l'objet d'une approche expérimentale.

Ces cinq dernières années au concours

- Écrit : épreuve A 2019.
- Oral : occasionnellement à l'oral de physique mais souvent à l'épreuve de TP.

Synthèse : choix des paramètres d'acquisition d'un signal

Les paramètres d'acquisition du signal peuvent être définis directement par des boutons (oscilloscope), par une interface graphique (logiciels type LatisPro) ou par l'intermédiaire d'un script de commande (carte d'acquisition type Arduino).

- **Fréquence d'échantillonnage :**
  - → plus elle est élevée, meilleure sera l'image du signal, mais les données seront d'autant plus lourdes à stocker et à traiter ;
  - → elle doit au moins respecter le critère de Shannon ($f_e > 2f_{max}$), sinon il faut utiliser un filtre anti-repliement ;
  - → le traitement numérique du signal échantillonné peut imposer d'autres contraintes.
- **Durée d'acquisition :**
  - → plus elle est élevée, meilleure sera la résolution spectrale du signal, mais les données seront d'autant plus lourdes à stocker et à traiter.
- **Nombre d'échantillons :** fixé par la fréquence d'échantillonnage et la durée d'acquisition, $N_e = f_e T_{acq}$.
  - → en pratique, il est souvent limité, ce qui nécessite un compromis entre fréquence d'échantillonnage et durée d'acquisition.
- **Calibre :**
  - → plus il est faible, meilleur sera le pas de quantification et donc la résolution (en volt) du signal ... mais s'il est trop faible il y aura saturation pour les valeurs élevées ;
  - → il faut donc choisir le calibre immédiatement supérieur à la valeur maximale du signal.

Merci à Mickaël Melzani, professeur en PTSI à Belfort,
pour avoir partagé un bon nombre des illustrations de ce cours.

Tout chaîne de transmission d'information passe aujourd'hui par un traitement numérique des signaux. L'objectif de ce chapitre est de comprendre les conditions à respecter pour pouvoir numériser un signal sans perdre d'information.

I - Numérisation d'un signal

I.A - Notion de signal

- On appelle **signal** une grandeur physique X porteuse d'information.
- Le signal est dit **analogique** si la grandeur physique $X(t)$ peut prendre un ensemble continu de valeurs et est définie sur un intervalle de temps continu.
- Le signal est dit **numérique** si la grandeur physique prend un ensemble discret de valeurs X_1, X_2, etc. et ne varie qu'à certains instants discrets t_1, t_2, etc. Les valeurs prises par le signal ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs différentes, généralement une puissance de 2.

> ***Remarque 1 :*** *La notion de signal est donc relative à l'observateur : tout le monde n'est pas intéressé par les mêmes informations.*

> ***Remarque 2 :*** *Mathématiquement, un signal analogique est une fonction d'une variable réelle (le temps) à valeurs dans $\mathbb{R}$ alors qu'un signal numérique est une suite à valeurs dans un ensemble fini.*

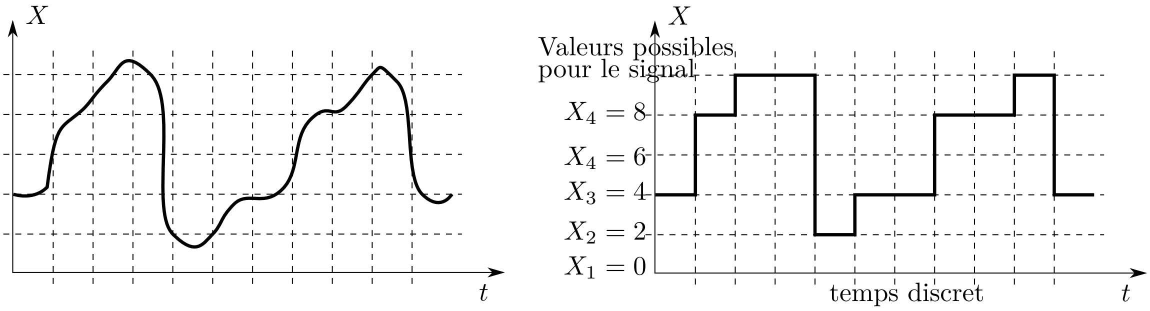


Figure 1 – Signal analogique et signal numérique.

I.B - Intérêt de la numérisation

Pourquoi numériser un signal ?

- pour le stocker : par exemple sur un disque dur d'un ordinateur, une carte SD dans un smartphone, etc.
- pour faire des calculs : il est infiniment plus simple d'effectuer des opérations sur un signal numérique à l'aide d'un programme informatique plutôt que sur un signal analogique avec des circuits électroniques.

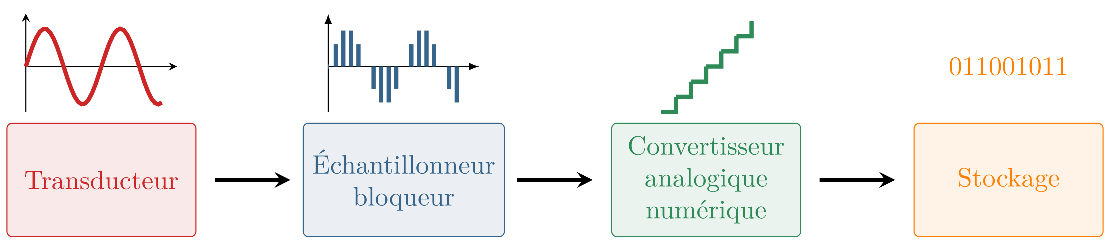
> ***Exemple :*** *les oscilloscopes modernes numérisent le signal d'entrée pour pouvoir l'analyser.*

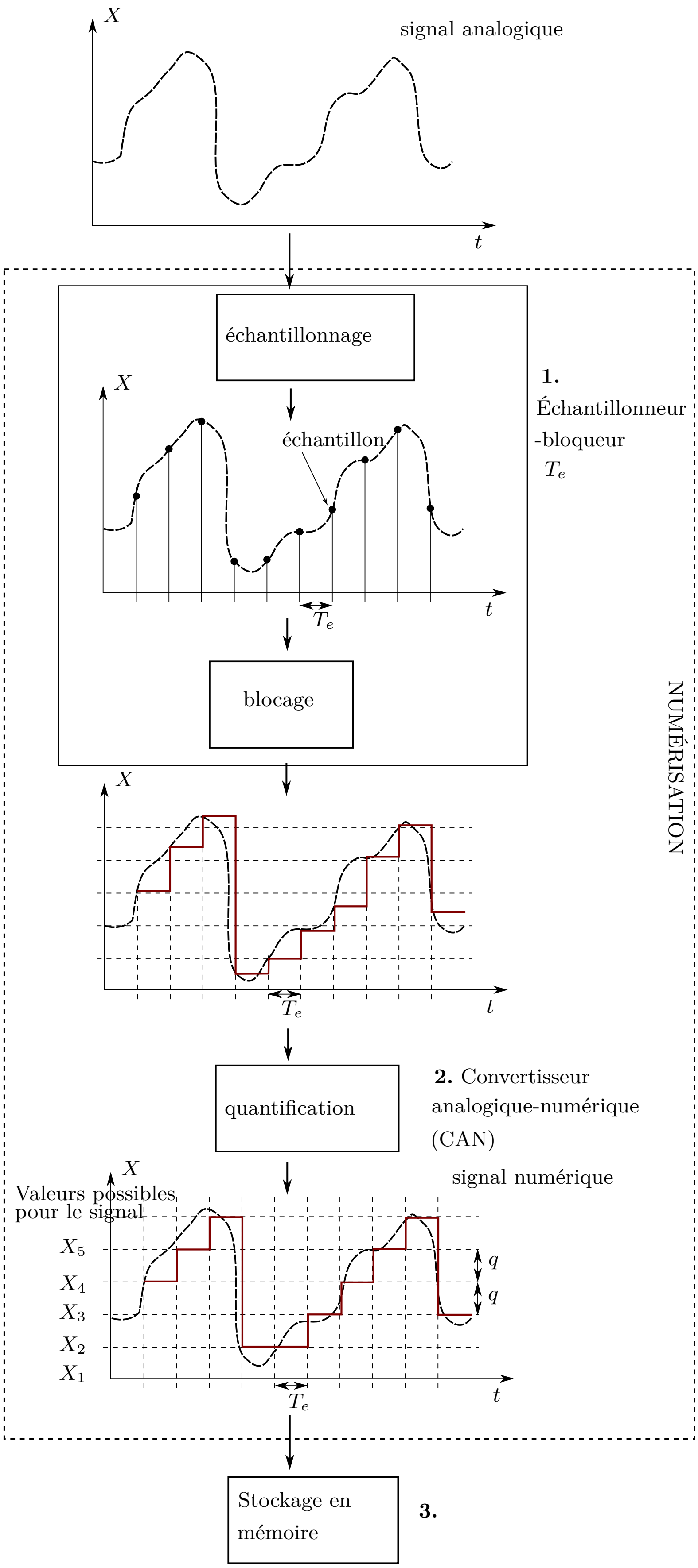
- pour le transmettre : comme un signal numérisé varie « par paliers », il est moins sensible au bruit lors d'une transmission car même en présence de perturbations aléatoires il sera possible de distinguer les différents paliers.

> ***Exemple :*** *C'est pour cette raison que la télévision hertzienne a été remplacée par la TNT, télévision numérique terrestre.*

I.C - Structure d'une chaîne d'acquisition et de numérisation

Une chaîne d'acquisition et de numérisation contient toujours les mêmes éléments, présentés ci-dessous, et dont le rôle est discuté page suivante.





Bloc 1 : transducteur

Le signal analogique d'intérêt (température, vitesse, position, etc.) est converti en tension analogique.

Bloc 2 : échantillonneur-bloqueur

La tension analogique est envoyée en entrée d'un échantillonneur-bloqueur. Son rôle est de bloquer la valeur de la tension à un niveau constant pendant une durée T_e appelée **période d'échantillonnage**. La valeur est actualisée tous les T_e.

Bloc 3 : convertisseur analogique numérique

En sortie de l'échantillonneur-bloqueur, la tension est toujours analogique : elle peut prendre n'importe quelle valeur. Comme un système numérique ne peut traiter que des données codées en binaire avec un nombre de bits fini, il faut discrétiser les valeurs prises. C'est le rôle du convertisseur analogique numérique, usuellement abrégé CAN, qui attribue à la tension la valeur binaire permise la plus proche (ou immédiatement inférieure) à sa valeur réelle.

Les cartes d'acquisition, par exemple Sysam ou Arduino, contiennent les deux blocs échantillonneur-bloqueur et CAN.

Bloc 4 : stockage

Les valeurs de sortie du CAN sont enfin stockées en mémoire pour être affichées ou manipulées.

II - Échantillonnage

Échantillonner un signal analogique revient à « prélever » sa valeur à certains instant t_n séparés d'un intervalle de temps régulier T_e appelé **période d'échantillonnage** : on a donc $t_n = nT_\mathrm{e}$. On nomme **fréquence d'échantillonnage** $f_\mathrm{e} = 1/T_\mathrm{e}$. Le nombre total d'échantillons N_e est bien sûr relié à la durée totale d'acquisition $T_\mathrm{a} = N_\mathrm{e}T_\mathrm{e}$.

⇝ objectif de ce paragraphe : établir des critères sur les paramètres d'échantillonnage pour que la numérisation ait lieu sans perte d'information sur le signal.

II.A - Premières observations

Simulons numériquement l'échantillonnage à la fréquence f_e d'un signal sinusoïdal de fréquence f_0.

- **Différents échantillonnage d'un même signal**

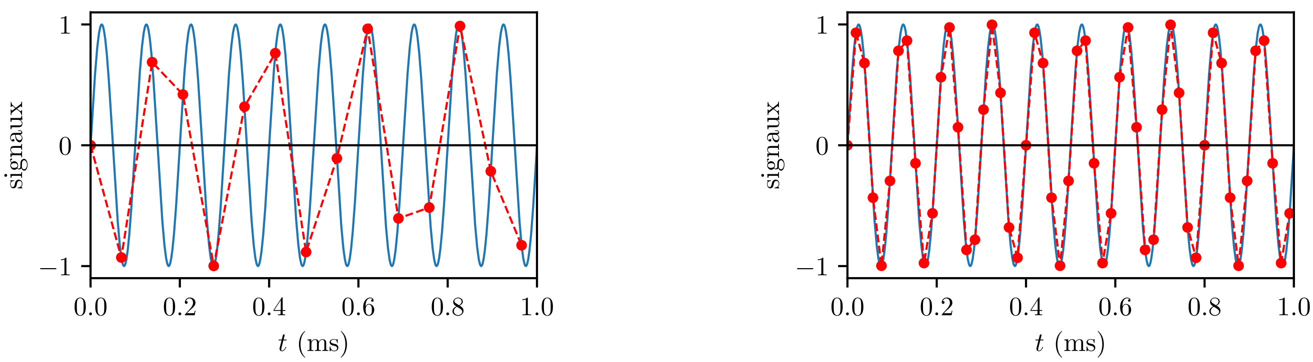


Figure 2 – Différents échantillonnage d'un même signal sinusoïdal. Le signal a pour fréquence $f_0 = 10{,}0\,\mathrm{kHz}$. La fréquence d'échantillonnage correspondant aux différentes figures vaut respectivement 4,5, 14,5 et 52,5 kHz.

Observations :

Il faut que la fréquence d'échantillonnage soit suffisamment élevée pour que le signal échantillonné soit raisonnablement fidèle au signal analogique. Contrairement à une première intuition, choisir $f_\mathrm{e} > f_0$ n'est pas suffisant et ne permet même pas de rendre correctement la période du signal.

Espace 1

> ***Remarque :*** *Les fréquences choisies pour la figure 2 « ne tombent pas rond » pour éviter des effets de périodicité qui ne se rencontrent pas en pratique et qui viendraient masquer les phénomènes.*

- **Un même échantillonnage de différents signaux**

Plusieurs signaux analogiques différents peuvent produire le même signal échantillonné.

⇝ voir figure 3.

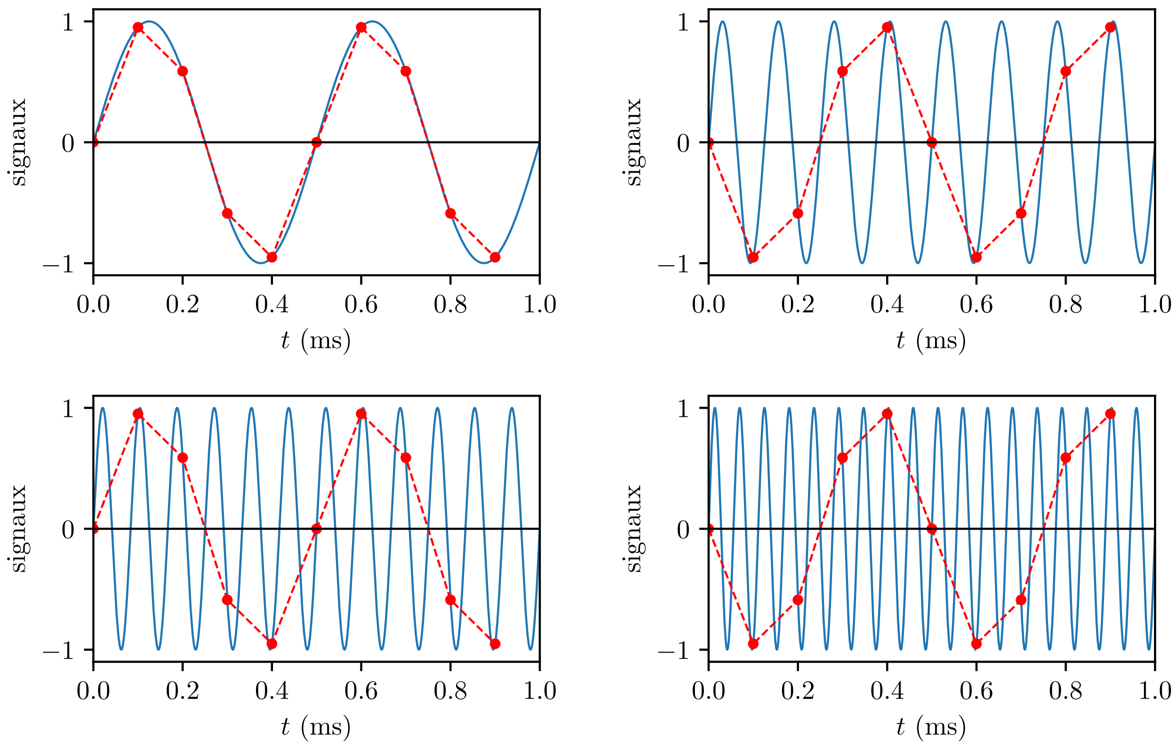


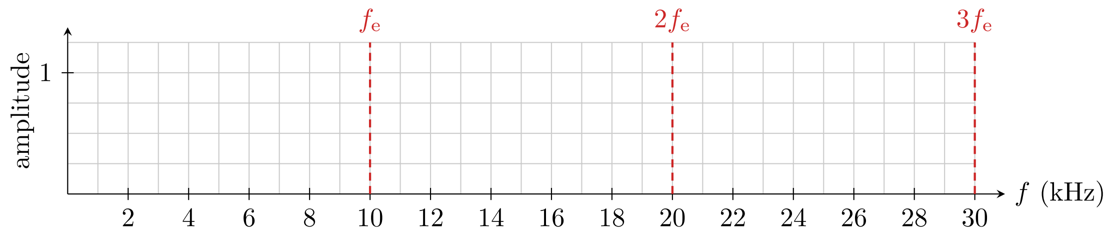
Figure 3 – **Un même échantillonnage de différents signaux.** La fréquence d'échantillonnage est choisie à $f_e = 10{,}0\,\text{kHz}$. La fréquence des signaux correspondant aux différentes figures vaut respectivement 2,0, 8,0, 12,0 et 18,0 kHz.

II.B - Spectre d'un signal échantillonné

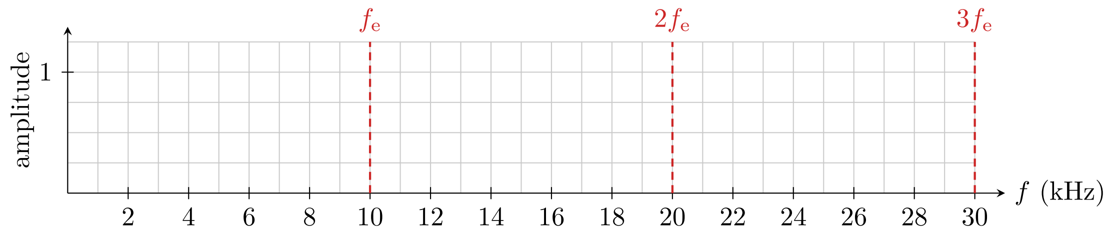
- **Simulation numérique : exemple d'un signal harmonique**

Simulons maintenant l'échantillonnage à la fréquence $f_e = 10\,\text{kHz}$ d'un signal sinusoïdal de fréquence f_0 variable, et le calcul de son spectre. La fonction disponible dans le module `fft` de la bibliothèque `numpy` (`numpy.fft.fft`) utilise l'algorithme de transformée de Fourier rapide (FFT en anglais), comme tous les logiciels d'acquisition et traitement de données.

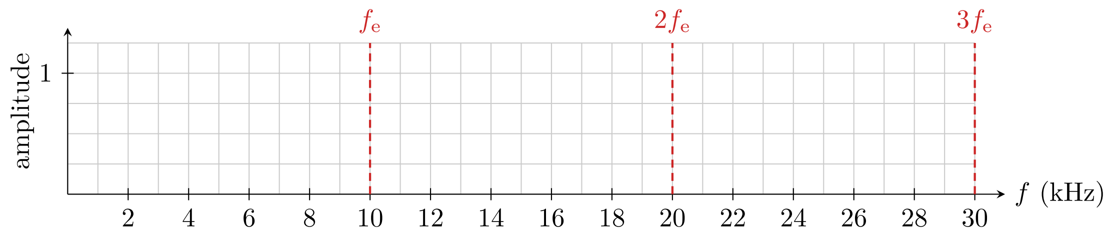
$f_0 = 1\,\text{kHz}$



$f_0 = 2\,\text{kHz}$



$f_0 = 4\,\text{kHz}$



Observation :

Le spectre d'un signal sinusoïdal échantillonné fait apparaître des pics à la fréquence du signal (logique), mais aussi aux fréquences des autres signaux sinusoïdaux qui auraient donné les mêmes échantillons. Ces fréquences sont de la forme $kf_e \pm f_0$ avec k un entier.

Espace 2

Remarque : On constate un enrichissement spectral entre le signal analogique et le signal échantillonné : l'échantillonnage n'est pas une opération invariante temporellement. En revanche, il s'agit bien d'une opération linéaire : les échantillons d'un signal somme sont bien la somme des échantillons des signaux pris séparément.

- **Cas général**

D'après le théorème de Fourier, n'importe quel signal périodique peut s'écrire comme une somme de signaux sinusoïdaux,

$$s(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(2\pi n f_0 t + \varphi_n)\,.$$

Par linéarité de l'échantillonnage, chacune des composantes harmoniques subit le même phénomène de réplication lors du processus d'échantillonnage, et il se retrouve donc sur le spectre du signal complet comme représenté figure 4.

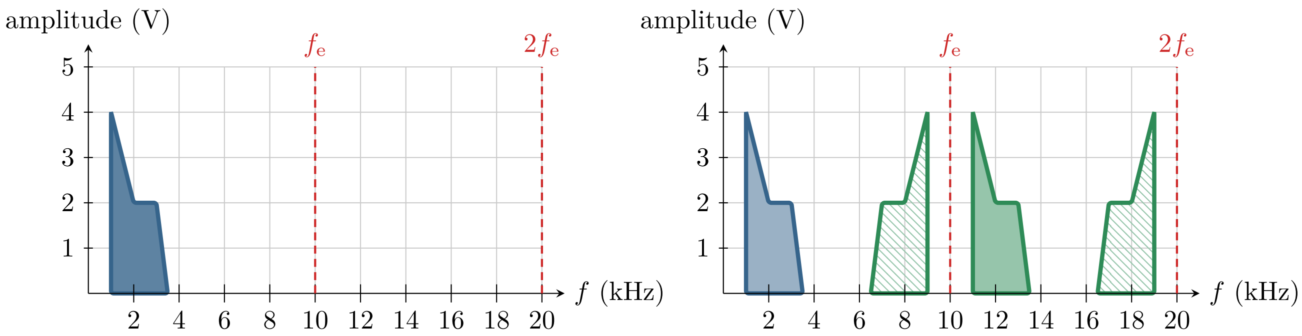


Figure 4 – Spectre d'un signal quelconque échantillonné. Le signal possède un spectre compris entre 1 et 3,5 kHz et il est échantillonné avec la fréquence $f_e = 10\,\text{kHz}$. La figure de gauche représente le spectre du signal analogique, celle de droite le spectre du signal échantillonné, présentant des répliques du spectre.

L'échantillonnage d'un signal entraîne une réplication périodique de son spectre :
toute composante de fréquence f est répliquée aux fréquences $kf_e \pm f$, k entier.

Remarque subtile : On raisonne ici comme si le spectre du signal échantillonné était parfaitement continu, donc analogique ... mais comme il ne peut en pratique qu'être calculé numériquement, il n'en est rien : il est forcément discrétisé. Ceci peut faire apparaître d'autres phénomènes, en particulier des « fuites spectrales », qui seront discutées au paragraphe II.D.

Une première difficulté posée par ces répliques du spectre se rencontre lors de la reconstruction du signal à partir du signal échantillonné : en raison de la réplication du spectre, le signal reconstruit diffère fortement du signal analogique.

⇝ solution simple :
filtrer le signal reconstruit avec un passe bas de fréquence de coupure $f_e/2$

Espace 3

Si le filtre est idéal, le spectre en sortie du passe-bas est identique à celui du signal analogique, et le signal reconstitué est fidèle à l'original.

- **Repliement spectral**

Une seconde difficulté, beaucoup plus embarrassante, intervient lorsque les spectres du signal et de ses répliques se recouvrent, si bien qu'ils ne peuvent plus être distingués : c'est le cas de la figure 5.

$\rightsquigarrow$ le spectre et ses répliques sont impossibles à séparer.

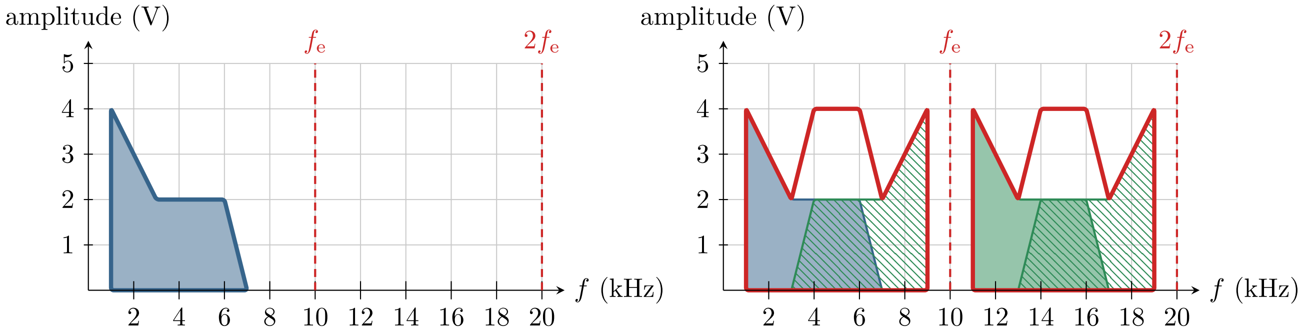


Figure 5 – Spectre d'un signal quelconque échantillonné en présence de recouvrement spectral. Le signal possède un spectre compris entre 1 et 7 kHz et il est échantillonné avec la fréquence $f_e = 10\,\mathrm{kHz}$. La figure de gauche représente le spectre du signal analogique. La figure de droite représente la construction du spectre du signal échantillonné, en tenant compte du recouvrement spectral.

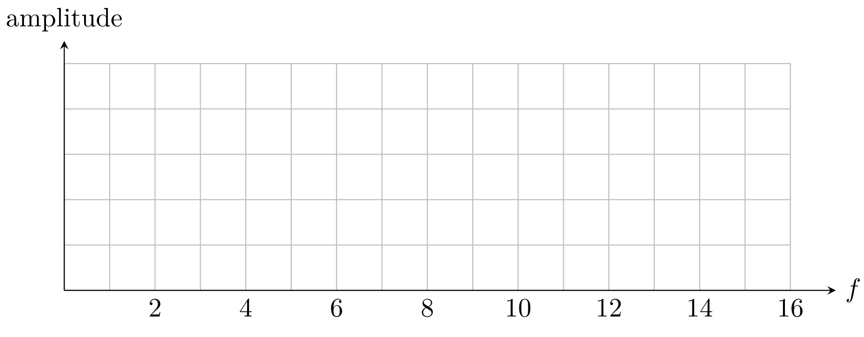
On appelle **repliement spectral** ou **aliasing** le phénomène de recouvrement du spectre du signal analogique et de ses répliques lors du processus d'échantillonnage.
Ce phénomène n'est pas corrigeable par filtrage a posteriori et doit être anticipé en amont de l'acquisition.

Exercice C1 : Échantillonnage d'un signal créneau

Considérons un signal créneau de fréquence $f_0 = 2\,\mathrm{kHz}$, décrit par ses premières harmoniques :

$$s(t) = A\sin(2\pi f_0 t) + \frac{A}{3}\sin(2\pi\, 3f_0 t) + \frac{A}{5}\sin(2\pi\, 5f_0 t) + \frac{A}{7}\sin(2\pi\, 7f_0 t)\,.$$

Les suivantes sont supposées négligeables. Ce signal est échantillonné à $f_e = 15\,\mathrm{kHz}$. Représenter le spectre du signal échantillonné entre 0 et 15 kHz. A-t-on repliement spectral ?



II.C - Critère de Nyquist-Shannon

Pour que le signal numérisé contienne les mêmes informations que le signal analogique, le repliement de spectre est à éviter absolument. Si le spectre du signal est connu a priori, on peut choisir en conséquence la fréquence d'échantillonnage.

Il ne faut qu'aucune composante du spectre ne se recouvre avec sa réplique.
Cas le pire : pour $f_{\max}$, dont la réplique se trouve à $f_e - f_{\max}$
Conséquence : il faut avoir $f_{\max} < f_e - f_{\max}$ soit $f_e > 2f_{\max}$.

Espace 4

Critère de Nyquist-Shannon :

Pour éviter le repliement spectral, la fréquence d'échantillonnage doit être telle que $f_\mathrm{e} > 2f_\mathrm{max}$.

Cependant, les limites intrinsèques des composants (ou des outils de traitement numérique) font qu'il n'est pas toujours possible de respecter le critère de Shannon.

$\rightsquigarrow$ solution pour éviter le repliement de spectre :

éliminer les fréquences qui vont être susceptibles de donner du recouvrement de spectre avant l'échantillonnage : placer un filtre passe-bas de fréquence de coupure $f_\mathrm{e}/2$ AVANT l'échantillonneur bloqueur. Un tel filtre est appelé **filtre anti repliement**.

Espace 5

Inconvénient : ce n'est pas directement le signal analogique qui est numérisé, et la perte des hautes fréquences du spectre peut entraîner une perte d'information.

II.D - Durée d'acquisition et fenêtre de calcul

Rappelons que l'on considère un signal échantillonné à la fréquence f_e. La durée totale d'acquisition T_a est relié au nombre d'échantillons par

$$T_\mathrm{a} = N_\mathrm{e} T_\mathrm{e} = \frac{N_\mathrm{e}}{f_\mathrm{e}}\,.$$

Expérimentalement, les spectres sont souvent calculés à partir d'une portion seulement du signal numérisé : on parle alors de **fenêtre de calcul**. Les résultats qui suivent sont alors identiques, en interprétant T_a comme la longueur de la fenêtre de calcul.

> ***Remarque :*** *Cette portion de signal peut même parfois être lissée, notamment au niveau des bords, pour éviter certains effets parasites sur le spectre. Ce traitement est appelé* ***fenêtrage du signal****. L'oscilloscope propose diverses options : fenêtre rectangulaire, de Hamming, etc. Chaque type de fenêtrage affecte le spectre calculé, ce qui présente différents avantages et inconvénients.*

II.D.1 - Résolution du spectre

Comme nous l'avons déjà mentionné aux paragraphes précédents, le spectre du signal échantillonné contient des répliques du spectre du signal analogique réparties périodiquement, avec une période f_e. Il y a donc une redondance d'informations, qui ne nécessitent pas d'être calculées. L'algorithme de transformée de Fourier rapide, utilisé par tous les logiciels, ne calcule ces valeurs que sur la première période en utilisant les N_e échantillons :

Un spectre calculé numériquement ne contient que N_e fréquences comprises entre 0 et f_e.

> ***Remarque :*** *on peut comprendre qualitativement que le spectre du signal échantillonné ne peut contenir plus que N_e fréquences : cela voudrait dire que le calcul du spectre aurait* rajouté *de l'information par rapport aux N_e échantillons, ce qui est bien sûr impossible.*

La discrétisation du spectre contraint sa résolution, c'est-à-dire l'écart entre deux fréquences consécutives contenues dans le spectre :

La **résolution** d'un spectre calculé numériquement est gouvernée par la durée d'acquisition,

$$\Delta f = \frac{f_\mathrm{e}}{N_\mathrm{e}} = \frac{1}{T_\mathrm{a}}$$

Espace 6

Pour obtenir un spectre précis, l'acquisition doit être longue et contenir un grand nombre de périodes.

Exercice C2 : Fréquences présentes dans un spectre numérique

Considérons un signal échantillonné à 100 kHz pendant 500 µs. Combien d'échantillons auront été enregistrés ? Quelles seront les fréquences présentes dans le spectre du signal échantillonné ?

La période d'échantillonnage est de $1 \cdot 10^{-5}$ s, donc $N_e = T_a/T_e = 50$.
La résolution spectrale est de $\Delta f = 1/T_a = 2 \cdot 10^3$ Hz = 2 kHz. Les fréquences présentes dans le spectre du signal échantillonné sont donc 0, 2, 4, 6, ..., 100 kHz. Il y a 50 fréquences, autant que d'échantillons, ce qui est normal.

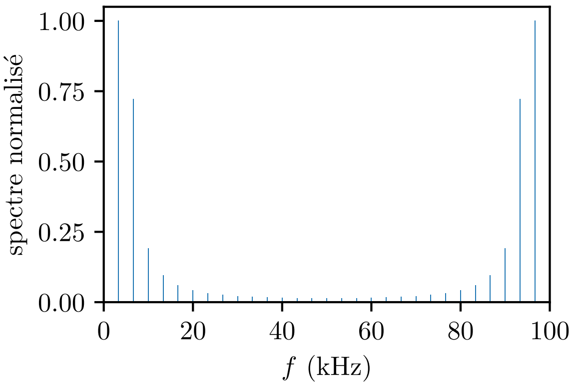
Espace 7

II.D.2 - Fuite spectrale

> *Ce paragraphe ne figure pas au programme et n'est donc officiellement pas à retenir. Il n'est discuté que pour expliquer une « recette » bien connue et bien utile !*

On simule numériquement l'échantillonnage à la fréquence $f_e = 100$ kHz d'un signal harmonique de fréquence $f_0 = 5$ kHz pendant diverses durées T_a. Les figures ci-dessous représentent les spectres obtenus numériquement.

- **Mise en évidence du phénomène**



Prenons pour commencer $T_a = 1{,}5\,T_0$. Alors que l'on doit obtenir un unique pic à 5 kHz (et sa réplique à 95 kHz), on en observe plusieurs dont les principaux sont à 3,3 et 6,7 kHz !

S'agit-il de recouvrement spectral ?

Shannon vérifié donc non

Espace 8

Interprétation de l'écart entre deux pics successifs :

$$\Delta f = \frac{1}{T_a} = \frac{2}{3} f_0 = 3{,}3\,\text{kHz}.$$

Espace 9

Interprétation du phénomène :

5 kHz ne correspond à aucune fréquence présente dans le spectre numérique, qui sont toutes des multiples de Δf, et du coup il déborde sur les côtés.

Espace 10

Lorsqu'une fréquence présente dans le spectre du signal analogique
ne correspond à aucune fréquence du spectre numérique,
le pic correspondant se retrouve « éclaté » en plusieurs pics séparés de Δf autour de la fréquence absente.

Ce phénomène est appelé **fuite spectrale**.

- **Règle du nombre entier de périodes**

Pour éviter la fuite spectrale,
un spectre numérique doit toujours être calculé sur un nombre entier de périodes.

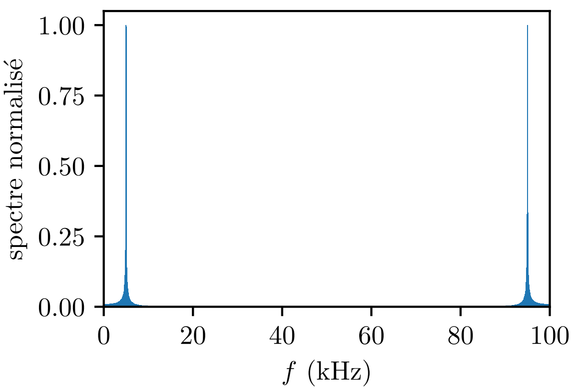
Interprétation :

si $T_a = N_0 T_0$, alors $\Delta f = 1/N_0 T_0 = f_0/N_0$. Ainsi, toutes les harmoniques qui ont pour fréquence nf_0 se retrouvent dans les fréquences du spectre numérique.

Espace 11

Le calcul du spectre par un logiciel type LatisPro inclut une étape de sélection automatique de périodes, ce qui permet de minimiser les phénomènes de fuite spectrale.

- **Comment minimiser le phénomène si la période est inconnue ?**



Considérons l'acquisition du même signal pour $T_a = 100{,}5\,T_0$: le pic principal est désormais évasé à la base, mais semble bien centré autour de 5 kHz.

Interprétation :

augmenter T_a diminue Δf, donc davantage de fréquences sont disponibles autour de la fréquence réelle dans le spectre numérique.

Espace 12

III - Quantification et résolution

Commençons par nous intéresser à l'étape de quantification. On appelle **pas** ou **quantum de quantification** l'écart (en volt) entre deux valeurs binaires successives. L'influence du pas de quantification sur le signal numérisé est représenté figure 6.

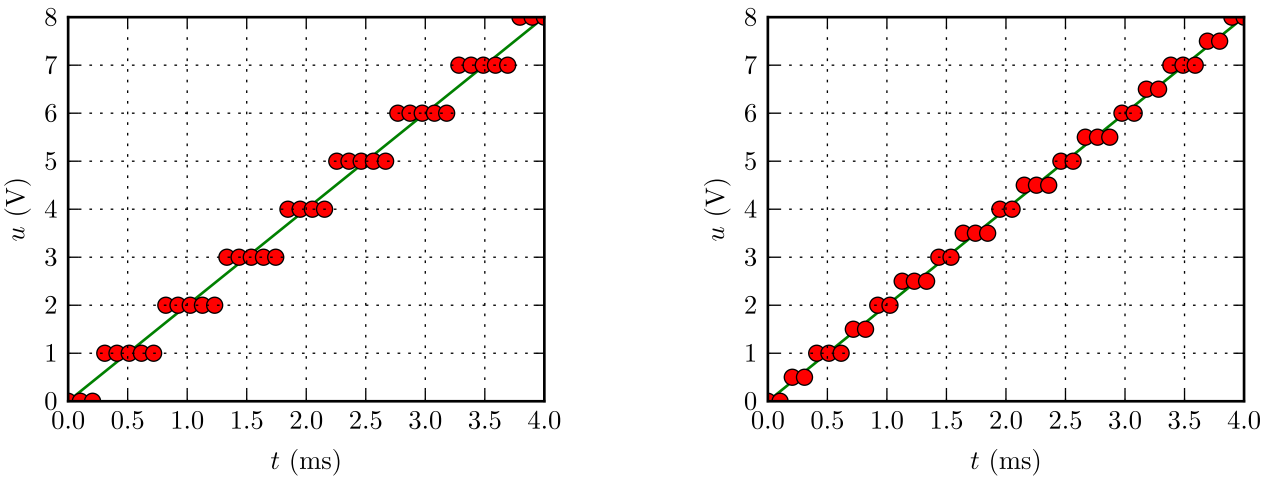


Figure 6 – Deux exemples de numérisation d'une même tension. Le signal analogique est représenté en trait plein bleu, le signal numérisé par les points verts. Dans les deux cas la période d'échantillonnage est de 0,1 ms. Sur la figure de gauche le pas de quantification vaut 1 V alors qu'il vaut 0,5 V sur la figure de droite.

Le pas de quantification est déterminé par le calibre et la résolution de l'acquisition. Ces deux paramètres sont généralement indépendants l'un de l'autre.

▷ Le **calibre** C donne la gamme de valeurs $\pm C$ que le signal numérisé est susceptible de prendre. Il doit être supérieur à la valeur maximale du signal analogique, sans quoi le signal numérisé fait apparaître un phénomène de saturation. La valeur $2C$, c'est-à-dire la largeur de l'intervalle de valeurs permises, est la **tension de pleine échelle** du CAN.

▷ La **résolution** N indique le nombre de bits sur lequel le signal numérisé est codé : 2^N valeurs sont possibles dans l'intervalle $[-C, +C]$, ou autrement dit cet intervalle est divisé en $2^N - 1$ intervalles de largeur identique.

$\rightsquigarrow$ pas de quantification : $p = \dfrac{2C}{2^N - 1} \simeq \dfrac{C}{2^{N-1}}$

Espace 13

> ***Exemples :*** *La résolution d'un CD audio est de 16 bits. Celle d'un pixel d'un appareil numérique reflex (un pixel correspond à une couleur) est de 14 ou 16 bits, mais si elle est comprimée au format jpeg la résolution n'est plus que 8 bits.*