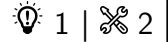




Conduction électrique

Exercice 1 : Charge d'une sphère



- ▷ Bilan de charge ;
- ▷ Potentiel électrostatique ;
- ▷ Résistance d'un fil conducteur.

1 La charge totale de la sphère à un instant donné vaut $Q(t) = 4\pi a^2 \sigma(t)$. Entre t et $t + dt$, une charge $I dt$ se dépose sur la sphère. Ainsi, par conservation de la charge,

$$Q(t + dt) = Q(t) + I dt \quad \text{soit} \quad \cancel{Q(t)} + \frac{dQ}{dt} dt = \cancel{Q(t)} + I dt$$

« L'équation différentielle » vérifiée par σ est donc

$$4\pi a^2 \frac{d\sigma}{dt} = I$$

d'où on déduit

$$\sigma(t) = \frac{I}{4\pi a^2} t.$$

en supposant la sphère complètement déchargée à l'instant initial.

2 En négligeant l'influence du fil comme le sous-entend l'énoncé, la distribution de charge est à symétrie sphérique. Ainsi,

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V = -\frac{dV}{dr} \vec{e}_r \quad \text{d'où} \quad \frac{dV}{dr} = -\frac{\sigma a^2}{\varepsilon_0 r^2}$$

Par séparation de variable et intégration entre l'infini et la surface de la sphère, on en déduit

$$\int_0^{V_s} dV = \frac{\sigma a^2}{\varepsilon_0} \int_{\infty}^a \frac{-1}{r^2} dr \quad \text{soit} \quad V_s = \frac{\sigma a^2}{\varepsilon_0} \left[\frac{1}{r} \right]_{\infty}^a$$

et ainsi

$$V_s = \frac{\sigma a}{\varepsilon_0}.$$

3 La tension aux bornes du fil orienté en convention récepteur est donc $U = V_0 - V_s$, qui dépend du temps car σ donc V_s en dépendent. On en déduit que le courant qui le parcourt dépend lui aussi du temps et vaut

$$I = \frac{U}{R} = \frac{V_0 - \frac{\sigma(t)a}{\varepsilon_0}}{\ell/\gamma S} = \frac{\gamma S V_0}{\ell} - \frac{\gamma S a}{\varepsilon_0 \ell} \sigma(t).$$

Le bilan de charge établi précédemment prend maintenant la forme

$$4\pi a^2 \frac{d\sigma}{dt} = I(t) = \frac{\gamma S V_0}{\ell} - \frac{\gamma S a}{\varepsilon_0 \ell} \sigma(t).$$

On en déduit l'équation différentielle vérifiée par σ ,

$$\frac{d\sigma}{dt} + \underbrace{\frac{\gamma S}{4\pi \varepsilon_0 a \ell}}_{=1/\tau} \sigma = \frac{\gamma S V_0}{4\pi a^2 \ell}.$$

Une solution particulière σ_∞ de cette équation est

$$0 + \frac{\gamma S}{4\pi\epsilon_0 a \ell} \sigma_\infty = \frac{\gamma S V_0}{4\pi a^2 \ell} \quad \text{soit} \quad \sigma_\infty = \frac{\epsilon_0 V_0}{a}.$$

La forme générale des solutions est donc

$$\sigma(t) = A e^{-t/\tau} + \frac{\epsilon_0 V_0}{a}.$$

Comme la charge initiale est nulle, on en déduit directement $A = -\epsilon_0 V_0/a$ d'où

$$\sigma(t) = \frac{\epsilon_0 V_0}{a} (1 - e^{-t/\tau}).$$

Exercice 2 : Gravure ionique



- ▷ *Mouvement d'une charge dans un potentiel;*
- ▷ *Conservation de la charge;*
- ▷ *Équation de Poisson.*

1 L'ion n'est soumis qu'à la force de Lorentz électrique, qui dérive de l'énergie potentielle $E_p = eV(x)$. Son énergie mécanique est donc constante, et comme l'ion part sans vitesse de la grille de potentiel nul on en déduit

$$E_m = \frac{1}{2} m v^2 + eV \underset{\text{CI}}{=} 0$$

On en déduit qu'en tout x la vitesse s'écrit

$$v(x) = \sqrt{-\frac{2eV(x)}{m}} = \sqrt{\frac{2e|V(x)|}{m}}.$$

Comme $|V_1| > |V_0|$, alors $v(x_1) > v(x_0)$ donc le cation est accéléré entre la grille 0 et la grille 1. De même, comme $|V_2| < |V_1|$ alors le cation ralentit entre la grille 1 et la grille 2.

2 La situation est unidimensionnelle, donc le vecteur densité de courant \vec{j} ne dépend que de x . En régime stationnaire, l'équation de conservation de la charge se simplifie en

$$\text{div } \vec{j} = \frac{dj_x}{dx} = 0 \quad \text{soit} \quad j_x = J_0 = \text{cte} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\vec{j} = J_0 \vec{e}_x}.$$

3 D'après l'équation de Poisson dans ce cas unidimensionnel,

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{soit} \quad \frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{\rho(x)}{\epsilon_0} = 0.$$

Comme tous les cations ont la même charge e , la densité de courant et la densité de charge sont reliées par $J_0 = n(x) e v(x)$, d'où

$$\frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{J_0}{\epsilon_0 v(x)} = 0.$$

Enfin, la conservation de l'énergie mécanique d'un ion donne

$$\frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{J_0}{\epsilon_0} \sqrt{\frac{m}{-2eV}} = 0.$$

4 En identifiant la solution donnée par l'énoncé en $x = x_1$, on obtient

$$V(x_1) = V_1 = -\left(\frac{3x_1}{2}\right)^{4/3} \left(\frac{J_0}{\epsilon_0}\right)^{2/3} \left(\frac{m}{2e}\right)^{1/3}$$

On en déduit alors

$$\begin{aligned}
 V_1^3 &= -\left(\frac{3x_1}{2}\right)^4 \left(\frac{J_0}{\varepsilon_0}\right)^2 \left(\frac{m}{2e}\right) \\
 \left(\frac{J_0}{\varepsilon_0}\right)^2 &= -\frac{2e}{m} V_1^3 \left(\frac{2}{3x_1}\right)^4 \\
 J_0 &= \varepsilon_0 \sqrt{-\frac{2e}{m} V_1^3 \left(\frac{2}{3x_1}\right)^2} \\
 J_0 &= \frac{4}{9} \frac{\varepsilon_0}{x_1^2} \sqrt{\frac{2e}{m}} |V_1|^3 \\
 \boxed{J_0} &= \underbrace{\frac{4}{9} \frac{\varepsilon_0}{x_1^2} \sqrt{\frac{2e}{m}}}_{=k} |V_1|^{3/2} .
 \end{aligned}$$

5 La charge électrique totale Q_{tot} atteignant le substrat pendant Δt est reliée d'une part au nombre de cations, et d'autre part à l'intensité du faisceau,

$$Q_{\text{tot}} = Ne = I \Delta t \quad \text{d'où} \quad Ne = J_0 S \Delta t \quad \text{soit} \quad \boxed{N = \frac{J_0 S}{e} \Delta t = \frac{k |V_1|^{3/2} S}{e} \Delta t .}$$

En approximant le potentiel au niveau du substrat à celui de la grille 2 très proche, on déduit de la question 1 que la vitesse des ions lorsqu'ils atteignent le substrat vaut

$$v_s = \sqrt{\frac{2e |V_2|}{m}} .$$

Ainsi, le dispositif envisagé permet bien de contrôler le nombre de cations via la grille 1 et leur vitesse par l'intermédiaire de la grille 2.

Exercice 3 : Diode à vide

inspiré oral banque PT | 💡 2 | ✂ 2



▷ Équation de Poisson ;

▷ Mouvement d'une charge dans un potentiel ;

1 Un problème physique est dit à symétrie cylindrique lorsqu'il est invariant par toute rotation autour de l'axe (Oz).

2 L'espace entre les deux électrodes est vide, donc d'après l'équation de Poisson,

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0 \quad \text{d'où} \quad \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right) = 0 .$$

Par une première intégration, on trouve

$$r \frac{dV}{dr} = A = \text{cte} \quad \text{soit} \quad \frac{dV}{dr} = \frac{A}{r}$$

et une deuxième intégration donne

$$V(r) = A \ln r + B \quad \text{avec} \quad A, B = \text{cte} .$$

Les constantes se trouvent avec les conditions aux limites,

$$\begin{cases}
 V(r=R_A) \underbrace{=}_{\text{CL}} 0 \underbrace{=}_{\text{calcul}} A \ln R_A + B \\
 V(r=R_C) \underbrace{=}_{\text{CL}} U_0 \underbrace{=}_{\text{calcul}} A \ln R_C + B
 \end{cases}$$

Par soustraction, il vient

$$U_0 = A \ln \frac{R_C}{R_A} \quad \text{d'où} \quad A = \frac{U_0}{\ln(R_C/R_A)} ,$$

et on en déduit

$$B = -\frac{U_0}{\ln(R_C/R_A)} \ln R_A$$

Finalement,

$$V(r) = \frac{U_0}{\ln(R_C/R_A)} \ln r - \frac{U_0}{\ln(R_C/R_A)} \ln R_A \quad \text{d'où} \quad \boxed{V(r) = \frac{\ln(r/R_A)}{\ln(R_C/R_A)} U_0.}$$

3 Un électron est une particule chargée négativement, qui se déplace donc vers les zones de potentiel le plus élevé : pour que la diode soit passante, il faut que les électrons émis à l'anode migrent vers la cathode, soit $U_0 > 0$. Au contraire, si $U_0 < 0$ les électrons resteront bloqués au voisinage de l'anode et ne rejoindront jamais la cathode.

4 Le système étant par hypothèse à symétrie cylindrique, la vitesse d'un électron ne peut dépendre que de r . Sa vitesse initiale est nulle par hypothèse et il n'est soumis qu'à la force de Lorentz électrique, $\vec{F} = -e\vec{E}$, car son poids est négligeable. Comme V ne dépend que de r alors $\vec{E} = -\text{grad} V$ est porté par \vec{e}_r , et une double intégration du PFD appliqué à un électron montre que sa vitesse est nécessairement radiale également.

La force de Lorentz dérive de l'énergie potentielle $E_p = -eV$. Comme l'électron n'est soumis qu'à cette seule force conservative, son énergie mécanique est une constante du mouvement. En l'exprimant en $r = R_A$, on obtient

$$E_m = \frac{1}{2}mv(r=R_A)^2 - eV(r=R_A) = 0.$$

En l'exprimant en r quelconque,

$$E_m = \frac{1}{2}mv(r)^2 - eV(r) = \frac{1}{2}mv(r)^2 - \frac{\ln(r/R_A)}{\ln(R_C/R_A)} eU_0.$$

Par conservation de l'énergie mécanique, on en déduit

$$\frac{1}{2}mv(r)^2 = \frac{\ln(r/R_A)}{\ln(R_C/R_A)} eU_0$$

et ainsi

$$\boxed{v(r) = \sqrt{\frac{2eU_0}{m} \frac{\ln(r/R_A)}{\ln(R_C/R_A)}}.}$$

On constate que ce résultat n'a pas de sens si $U_0 < 0$, ce qui signifie physiquement que l'électron ne peut pas atteindre la sphère de rayon r .

5 Compte tenu de la symétrie cylindrique, le vecteur densité de courant s'écrit

$$\vec{j} = j(r) \vec{e}_r \quad \text{avec} \quad j(r) = -n(r) e v(r).$$

L'intensité (orientée de la cathode vers l'anode, en sens opposé au mouvement des électrons) traversant un cylindre de rayon r est indépendante du rayon (conservation de la charge) et est reliée à j par

$$I = \iint \vec{j} \cdot (-dS \vec{e}_r) = 2\pi r H j(r).$$

Ainsi,

$$I = 2\pi r H n(r) e v(r) \quad \text{soit} \quad n(r) = \frac{I}{2\pi r H e v(r)}$$

et ainsi

$$\boxed{n(r) = \frac{I}{2\pi r H e} \sqrt{\frac{m}{2eU_0} \frac{\ln(R_C/R_A)}{\ln(r/R_A)}}.}$$

Exercice 4 : Chute ohmique dans un électrolyseur

- ▷ Bilan de charge ;
- ▷ Loi d'Ohm locale et intégrale ;
- ▷ Coordonnées cylindriques.

1 Procédons à un bilan de charge pour une couche cylindrique comprise entre les rayons r et $r + dr$ pendant une durée infinitésimale dt . Le courant électrique est dirigé vers l'extérieur des cylindres. Ainsi,

- ▷ par la face cylindrique de rayon r , une charge électrique $I(r) dt$ entre dans le système ;
- ▷ par la face cylindrique de rayon $r + dr$, une charge électrique $I(r + dr) dt$ sort du système.

En notant Q la charge totale contenue entre les deux cylindres, le bilan de charge s'écrit donc

$$Q(t + dt) = Q(t) + I(r) dt - I(r + dr) dt.$$

En régime stationnaire, la charge totale contenue dans le système est par définition constante. Ainsi,

$$0 = I(r) - I(r + dr) = -\frac{dI}{dr}.$$

Comme la dérivée est nulle, on en déduit que l'intensité I traversant une surface cylindrique de rayon r est indépendante de r .

2 Par définition, l'intensité est le flux du vecteur densité de courant. En raisonnant sur une surface cylindrique,

$$I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} = j(r) \times 2\pi r h \quad \text{d'où} \quad j(r) = \frac{I}{2\pi r h}.$$

D'après la loi d'Ohm locale,

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad \text{d'où} \quad \vec{E} = \frac{I}{2\pi \sigma r h} \vec{e}_r.$$

3 Le champ électrique peut être relié à la tension imposée entre les deux électrodes par l'intermédiaire du potentiel. En effet, compte tenu de la géométrie particulière,

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V = -\frac{dV}{dr} \vec{e}_r \quad \text{d'où} \quad \frac{dV}{dr} = -\frac{I}{2\pi \sigma r h}.$$

On intègre par séparation des variables entre $r = r_2$ et $r = r_1$,

$$\int_{V(r_2)}^{V(r_1)} dV = -\frac{I}{2\pi \sigma h} \int_{r_2}^{r_1} \frac{dr}{r}$$

ce qui donne

$$U = -\frac{I}{2\pi \sigma h} \ln \frac{r_1}{r_2} \quad \text{soit} \quad U = \frac{I}{2\pi \sigma h} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Par identification avec la loi d'Ohm intégrale, on en déduit

$$R = \frac{1}{2\pi \sigma h} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

4 La puissance dissipée par effet Joule dans la solution vaut

$$\mathcal{P} = RI^2 = \frac{I^2}{2\pi \sigma h} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

On peut également l'obtenir en intégrant la densité volumique de puissance Joule,

$$p = \vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{j(r)^2}{\sigma} = \frac{1}{4\pi^2 r^2 h^2 \sigma} I^2$$

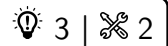
soit en intégrant sur l'espace compris entre les deux électrodes,

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \iiint p \, d\tau = \iiint \frac{1}{4\pi^2 r^2 h^2 \sigma} I^2 \times r \, dr \, d\theta \, dz \\ &= \frac{1}{4\pi^2 h^2 \sigma} \times \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} \times \int_0^{2\pi} d\theta \times \int_0^h dz \\ &= \frac{1}{4\pi^2 h^2 \sigma} \times \ln \frac{r_2}{r_1} \times 2\pi \times h \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{P} = \frac{I^2}{2\pi\sigma h} \ln \frac{r_2}{r_1} .}$$

On montre dans le cours d'électrochimie que la tension totale à imposer aux bornes de l'électrolyseur se décompose en trois contributions : une contribution thermodynamique (liée à l'écart des potentiels de Nernst), une contribution cinétique (surtensions à vide et à courant non nul) et une contribution ohmique. La tension U considérée dans cet exercice correspond à cette dernière contribution, mais comme les deux autres ne sont pas prises en compte, elle ne correspond en réalité pas directement à la tension imposée par le générateur à l'électrolyseur.

Exercice 5 : Mesure de salinité



- ▷ Loi d'Ohm ;
- ▷ Modèle microscopique.

1 Étudions le mouvement de l'ion dans le référentiel terrestre, supposé galiléen. Il est soumis à la force de Lorentz électrique et la force \vec{F} . Ainsi, d'après le théorème de la résultante cinétique,

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = z_i e \vec{E} - \alpha_i r_i \vec{v}_i ,$$

ce qui se réécrit sous la forme

$$\frac{d\vec{v}_i}{dt} + \frac{\alpha_i r_i}{m_i} \vec{v}_i = \frac{z_i e}{m_i} \vec{E} .$$

La durée du régime transitoire est donnée (en ordre de grandeur) par le temps caractéristique apparaissant dans cette équation,

$$\boxed{\tau_i = \frac{m_i}{\alpha_i r_i} ,}$$

alors que la vitesse limite en est la solution particulière constante,

$$\boxed{\vec{v}_{i\infty} = \frac{z_i e}{\alpha_i r_i} \vec{E} .}$$

2 Par définition, la densité volumique de courant dû aux ions de type i est reliée à leur vitesse limite par

$$\vec{j}_i = n_i z_i e \vec{v}_{i\infty}$$

avec n_i la densité volumique d'ions, c'est-à-dire le nombre d'ions par unité de volume, qui est relié à la concentration molaire c_i par $n_i = N_A c_i$. On en déduit

$$\vec{j}_i = N_A c_i \frac{(z_i e)^2}{\alpha_i r_i} \vec{E}$$

Ainsi, la densité volumique totale de courant dans la solution vaut

$$\vec{j} = \sum_i \vec{j}_i = N_A e^2 \left(\sum_i \frac{z_i^2}{\alpha_i r_i} c_i \right) \vec{E}$$

ce qui permet d'identifier la conductivité

$$\boxed{\sigma = N_A e^2 \sum_i \frac{z_i^2}{\alpha_i r_i} c_i .}$$

On constate que la charge z_i intervient au carré dans l'expression : les cations et les anions contribuent donc **de la même façon** à la conductivité, alors qu'on aurait pu imaginer que leurs effets se compensent. On retrouve la **loi de Kohlrausch** reliant la conductivité d'une solution à la concentration des ions, que vous connaissez depuis le lycée sous la forme

$$\sigma = \sum_i \Lambda_i c_i \quad \text{avec} \quad \Lambda_i = \mathcal{N}_A e^2 \frac{z_i^2}{\alpha_i r_i},$$

où Λ_i est la conductivité molaire ionique de l'ion i .

3 La résistance de la portion de solution entre les électrodes est celle d'un conducteur unidimensionnel de longueur ℓ et de section A , elle vaut donc

$$R = \frac{\ell}{\sigma A}.$$

Un conductimètre **impose une tension** aux bornes de la cellule de conductimétrie puis **mesure le courant** qui traverse la solution. Une opération d'**étalonnage** donne le rapport ℓ/A (souvent appelé constante de cellule en chimie), ce qui permet de remonter à la conductivité σ .

4 La cellule fonctionne de manière analogue à un condensateur : lorsqu'une tension est imposée, des charges sont apportées par le générateur et vont se regrouper sur les électrodes. Les ions sont alors **attirés par l'électrode de charge opposée** à la leur, sur laquelle **ils vont s'accumuler**. Ce faisant, la charge résultante sur l'électrode **diminue jusqu'à s'annuler** si bien que la solution n'est plus traversée par aucun courant alors même qu'une tension est toujours appliquée à ses bornes.

On parle alors d'**écranage** (du mot « écran ») par les ions de la charge portée par l'électrode.

5 Une tension alternative est plus appropriée car les ions sont alternativement attirés par l'une ou l'autre électrode, ce qui **empêche le phénomène d'accumulation** et d'écranage discuté précédemment. Cependant, la conductivité est définie en régime permanent : le régime transitoire du mouvement des ions doit toujours rester **de durée négligeable** devant la période des variations de tensions. Quantitativement, cela se traduit par

$$\forall i, \quad \tau_i f \ll 1.$$

6 Notons V le volume d'un échantillon contenant $m_0 = 1$ kg d'eau de mer, ρ_0 sa masse volumique et m la masse totale d'ions qu'il contient. Par définition de la salinité S ,

$$S = \frac{m}{m_0} = \frac{m}{\rho_0 V}.$$

De plus,

$$m = \sum_i m_i = \sum_i c_i V M_i \quad \text{soit} \quad S = \frac{1}{\rho_0} \sum_i c_i M_i.$$

avec M_i la masse molaire de l'ion i . On définit x_i la proportion de l'ion i dans la solution : en notant c la concentration totale en ions de la solution, on a

$$c = \sum_i c_i \quad \iff \quad x_i = \frac{c_i}{c}.$$

Les proportions des différents types d'ions sont indépendantes de l'échantillon considéré, c'est-à-dire que seule la concentration totale c varie. Ainsi,

$$S = \frac{1}{\rho_0} \sum_i c_i M_i = c \frac{\sum_i x_i M_i}{\rho_0} = A c \quad \text{et} \quad \sigma = \sum_i \Lambda_i c_i = c \sum_i \Lambda_i x_i = B c$$

avec A et B sont deux constantes caractéristiques de l'eau de mer mais indépendantes de l'échantillon.

Pour bien comprendre, on peut voir que chacun des termes $x_i M_i$ ou $\Lambda_i x_i$ est indépendant de l'échantillon, donc leur somme l'est forcément.

Ainsi, la salinité s'exprime par

$$S = \frac{A}{B} \sigma = \frac{\sum_i x_i M_i}{\rho_0 \sum_i \Lambda_i c_i} \sigma.$$

Mesurer la conductivité σ_0 d'une solution de salinité S_0 connue permet de s'affranchir du rapport A/B : la salinité S d'une solution d'eau de mer de conductivité mesurée σ vaut

$$S = \frac{S_0}{\sigma_0} \sigma.$$