


# Champ magnétique statique et lentement variable

## Exercice 1 : Cylindre parcouru par un courant inhomogène



-  ▷ Théorème d'Ampère ;  
▷ Coordonnées cylindriques.

1 Par définition, l'intensité qui parcourt le cylindre vaut

$$I = \iint_{\text{section}} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \iint J_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) dS.$$

Sachant qu'en coordonnées cylindriques  $dS = r dr d\theta$ ,

$$I = 2\pi J_0 \int_0^R \left(r - \frac{r^3}{R^2}\right) dr = 2\pi J_0 \left[\frac{r^2}{2} - \frac{R^4}{4R^2}\right]_0^R = 2\pi J_0 \frac{R^2}{4}$$

d'où on déduit

$$J_0 = \frac{2}{\pi R^2} I.$$

2 Soit  $M$  un point de l'espace où l'on cherche à calculer le champ magnétique.

- **Symétries** : le plan passant par  $M$  et contenant l'axe du cylindre est plan de symétrie de la distribution de courant, donc  $\vec{B}(M)$  est orthogonal à ce plan, c'est-à-dire

$$\vec{B}(M) = B_\theta(M) \vec{e}_\theta.$$

Ceci est cohérent avec le fait que le plan passant par  $M$  et orthogonal à l'axe du cylindre est plan d'antisymétrie de la distribution de courant, si bien que  $\vec{B}$  appartient à ce plan.

- **Invariances** : la distribution de courant est invariante par translation le long de  $(Oz)$  et par rotation autour de cet axe. Le champ  $\vec{B}(M)$  ne dépend donc ni de  $z$  ni de  $\theta$ , c'est-à-dire

$$\vec{B}(M) = B_\theta(r) \vec{e}_\theta.$$

- **Théorème d'Ampère** : on raisonne sur un cercle  $\mathcal{C}$  de rayon  $r$  et de normale  $\vec{e}_z$ .

Circulation de  $\vec{B}$  :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint B_\theta(r) \vec{e}_\theta \cdot dl \vec{e}_\theta = 2\pi r B_\theta(r).$$

Courant enlacé :

- ▷ si  $r \geq R$  :  $I_{\text{enl}} = I$  ;
- ▷ si  $r \leq R$  :

$$I_{\text{enl}} = \iint_{\text{disque}} \vec{j} \cdot d\vec{S} = 2\pi J_0 \int_0^r \left(r' - \frac{r'^3}{R^2}\right) dr' = 2\pi J_0 \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R^2}\right) \quad \text{d'où} \quad I_{\text{enl}} = \frac{2I}{R^2} \left(r^2 - \frac{r^4}{2R^2}\right).$$

Conclusion :

$$2\pi r B_\theta(r) = \begin{cases} \mu_0 I & \text{si } r \geq R \\ \mu_0 \frac{2I}{R^2} \left(r^2 - \frac{r^4}{2R^2}\right) & \text{si } r \leq R \end{cases}$$

soit finalement

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta & \text{si } r \geq R \\ \frac{\mu_0 2I}{2\pi R^2} \left( r - \frac{r^3}{2R^2} \right) \vec{e}_\theta & \text{si } r \leq R \end{cases}$$

3 D'après l'expression donnée et celle de  $\vec{B}$ ,

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rB_\theta)}{\partial r} \vec{e}_z$$

Si  $r \geq R$  alors on constate que  $rB_\theta = \mu_0 I / 2\pi$ , ce qui ne dépend pas de  $r$ , cohérent avec  $\vec{j}(r > R) = \vec{0}$ .

Si  $r \leq R$ , alors

$$rB_\theta = \frac{\mu_0 2I}{2\pi R^2} \left( r^2 - \frac{r^4}{2R^2} \right) \quad \text{donc} \quad \frac{\partial(rB_\theta)}{\partial r} = \frac{\mu_0 2I}{2\pi R^2} \left( 2r - \frac{4r^3}{2R^2} \right) = \frac{\mu_0 4I}{2\pi R^2} \left( r - \frac{r^3}{R^2} \right)$$

ce qui donne bien, en réorganisant,

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \frac{2I}{\pi R^2} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \vec{e}_z = \mu_0 \vec{j}$$

## Exercice 2 : Plan parcouru par un courant

💡 2 | ✂ 1



- ▷ Théorème d'Ampère ;
- ▷ Coordonnées cartésiennes ;
- ▷ Utilisation avancée des propriétés de symétrie.

Raisonnons sur la figure 1. On se place en un point  $M$  quelconque.

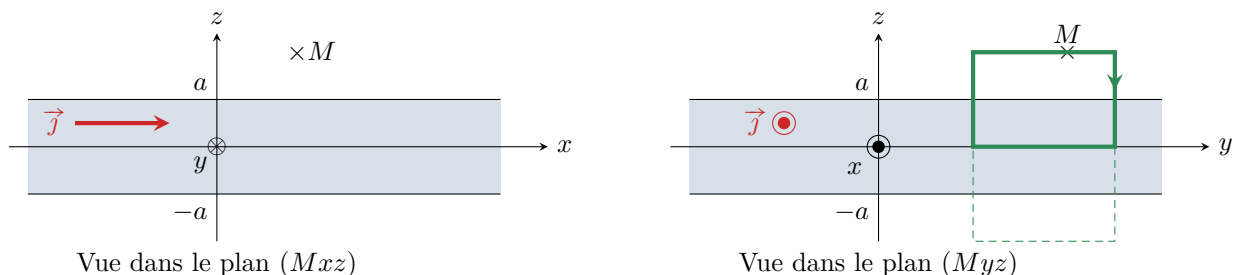


Figure 1 – Plan épais parcouru par un courant.

- **Symétries** : Le plan  $Mxz$  (plan de la figure de gauche) est plan de symétrie de la distribution de courant, donc  $\vec{B}(M)$  est orthogonal à ce plan.

↪ on en déduit  $\vec{B}(M) = B_y(M) \vec{e}_y$ .

Ceci est (heureusement!) cohérent avec le fait que le plan  $(Mxy)$  soit un plan d'anti-symétrie de la distribution de courants, et donc que  $\vec{B}(M)$  soit inclus dans ce plan.

- **Invariances** : la distribution de courant est invariante par toute translation dans les directions  $x$  et  $y$ , donc  $\vec{B}(M)$  ne dépend pas de ces deux variables.

↪ on en déduit  $\vec{B}(M) = B_y(z) \vec{e}_y$ .

- **Choix du contour d'Ampère** : le plus naturel est de raisonner sur un cadre rectangulaire dont les côtés sont respectivement colinéaires aux vecteurs  $\vec{e}_y$  (un côté à la cote  $z$  du point  $M$ , l'autre à discuter) et  $\vec{e}_z$  (circulation nulle). Pour fermer ce rectangle, deux possibilités qui reposent toutes les deux sur le fait que le plan d'équation  $z = 0$  est un plan de symétrie de la distribution de courant.

▷ ou bien on note qu'en  $M'$  symétrique de  $M$  par rapport à ce plan les champs sont antisymétriques, donc ici

$$\vec{B}(M') = B_y(z' = -z) \vec{e}_y = -B_y(z) \vec{e}_y$$

et on complète ainsi le rectangle (même type de raisonnement que pour le plan chargé en électrostatique) : c'est le contour représenté en traits pointillés sur la figure 1 ;

▷ ou bien on note qu'en tout point du plan  $z = 0$  le champ magnétique doit être orthogonal à ce plan, donc porté par  $\vec{e}_z$  ... mais on a déjà montré au préalable que le champ devait être porté par  $\vec{e}_y$ , ce qui impose donc

$$\vec{B}(z=0) = \vec{0},$$

et on complète ainsi le rectangle : c'est le contour représenté en traits épais sur la figure 1

Je choisis ici la deuxième possibilité, en notant  $\ell$  la longueur des côtés parallèles à  $(Oy)$  et  $\ell'$  celle des côtés parallèles à  $(Oz)$ .

• **Application du théorème d'Ampère :**

▷ Circulation du champ :

$$\begin{aligned} \oint_{CA} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} &= \int_{\text{haut}} B_y(z) \vec{e}_y \cdot d\ell \vec{e}_y + \int_{\text{droit}} B_y(z) \vec{e}_y \cdot (-d\ell \vec{e}_z) + \int_{\text{bas}} B_y(z) \vec{e}_y \cdot (-d\ell \vec{e}_y) + \int_{\text{gauche}} B_y(z) \vec{e}_y \cdot d\ell \vec{e}_z \\ &= B_y(z)\ell + 0 + 0 + 0. \end{aligned}$$

▷ Courant enlacé par le contour d'Ampère :

→ si  $z > a$  :

$$I_{\text{enl}} = \iint \vec{j} \cdot (-dS \vec{e}_x) = -j_0 \ell a$$

→ si  $z < a$  : la partie « supérieure » du plan n'est pas enlacée par le contour d'Ampère, donc

$$I_{\text{enl}} = -j_0 \ell z.$$

▷ Conclusion : d'après le théorème d'Ampère,

$$B_y(z)\ell = \begin{cases} -\mu_0 j_0 \ell a & \text{si } z \geq a \\ -\mu_0 j_0 \ell z & \text{si } z \leq a \end{cases}$$

d'où on déduit finalement en tenant compte de l'antisymétrie par rapport au plan  $z = 0$ .

$$\vec{B} = \begin{cases} -\mu_0 j_0 a \vec{e}_y & \text{si } z \geq a \\ -\mu_0 j_0 z \vec{e}_y & \text{si } 0 \leq z \leq a \\ +\mu_0 j_0 z \vec{e}_y & \text{si } -a \leq z \leq 0 \\ +\mu_0 j_0 a \vec{e}_y & \text{si } z \leq -a \end{cases}$$

On peut vérifier qualitativement le sens du champ avec la règle de la main droite ... et on n'oublie surtout pas de conclure sur ce qui se passe pour  $z < 0$  !

### Exercice 3 : Bobine torique



- ▷ Théorème d'Ampère ;
- ▷ Coordonnées cylindriques.

Soit  $M$  un point quelconque de l'espace.

• **Symétries :** le plan  $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$  (plan de la figure de droite de l'énoncé) est un plan de symétrie de la distribution de courant, donc  $\vec{B}(M)$  est orthogonal à ce plan.

$$\rightsquigarrow \vec{B}(M) = B(M) \vec{e}_\theta.$$

• **Invariances :** comme les spires sont supposées réparties continûment, alors la distribution de courant est invariante par rotation autour de l'axe  $Oz$ . Le champ  $\vec{B}(M)$  ne dépend donc pas de  $\theta$ , d'où

$$\vec{B}(M) = B(r, z) \vec{e}_\theta.$$

• **Théorème d'Ampère :**

▷ On raisonne sur un cercle passant par  $M$  et d'axe  $Oz$ , orienté par la règle de la main droite selon l'axe  $Oz$ .

▷ Circulation :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint B(r, z) \vec{e}_\theta \cdot d\ell \vec{e}_\theta = 2\pi r B(r, z).$$

▷ Courant enlacé : en raisonnant sur les schémas on peut facilement comprendre que le courant enlacé vaut

$$I_{\text{enl}} = \begin{cases} NI & \text{si } M \in \text{bobine} \\ 0 & \text{si } M \notin \text{bobine} \end{cases}$$

Il faut toujours se méfier du signe des courants enlacés, qui s'obtient par règle de la main droite avec l'orientation du contour : ici c'est positif.

▷ Conclusion : d'après le théorème d'Ampère,

$$2\pi r B(r, z) = \begin{cases} \mu_0 N I & \text{si } M \in \text{bobine} \\ 0 & \text{si } M \notin \text{bobine} \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \vec{B}(M) = \begin{cases} \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \vec{e}_\theta & \text{si } M \in \text{bobine} \\ \vec{0} & \text{si } M \notin \text{bobine} \end{cases}$$

On peut constater sur cet exemple que la disjonction des cas n'est pas toujours simple à exprimer en fonction des coordonnées.

Par ailleurs, on peut noter que si  $R \gg a$  alors en tout point à l'intérieur de la bobine  $r \simeq R$ . Cela permet d'identifier  $N/2\pi R$  comme étant une densité linéique de spires, et on peut reconnaître le champ à l'intérieur d'un solénoïde droit infini : la courbure du tore devient négligeable.

#### Exercice 4 : Fil conducteur creux

oral banque PT | 💡 2 | ✂️ 2



▷ Théorème d'Ampère ;  
▷ Principe de superposition.

1 Cf. cours :

$$\vec{B}_0(M) = \begin{cases} \frac{\mu_0 j R^2}{2r} \vec{u}_\theta & \text{si } r \geq R \\ \frac{\mu_0 j r}{2} \vec{u}_\theta & \text{si } r \leq R \end{cases}$$

2 Par définition,  $\overrightarrow{OM} = r \vec{u}_r$ . Il faut donc exprimer  $\vec{u}_\theta$  en fonction de  $\vec{u}_z$  et  $\vec{u}_r$ , ce qui se fait grâce au produit vectoriel  $\vec{u}_\theta = \vec{u}_z \wedge \vec{u}_r$ . Ainsi,

$$\vec{u}_\theta = \frac{1}{r} \vec{u}_z \wedge \overrightarrow{OM}.$$

On en déduit

$$\vec{B}_0(M) = \begin{cases} \frac{1}{2} \mu_0 j \frac{R^2}{r^2} \vec{u}_z \wedge \overrightarrow{OM} & \text{si } r \geq R \\ \frac{1}{2} \mu_0 j \vec{u}_z \wedge \overrightarrow{OM} & \text{si } r \leq R \end{cases}$$

3 On applique le principe de superposition : la cavité est vue comme la superposition de deux distributions de courant  $j \vec{u}_z$  et  $-j \vec{u}_z$ . À l'intérieur de la cavité, on a donc

$$\vec{B}_{\text{tot}} = \frac{1}{2} \mu_0 j \vec{u}_z \wedge \overrightarrow{OM} - \frac{1}{2} \mu_0 j \vec{u}_z \wedge \overrightarrow{O'M}$$

avec  $O'$  un point origine sur l'axe du cylindre creux, ce qui se simplifie en

$$\vec{B}_{\text{tot}} = \frac{1}{2} \mu_0 j \vec{u}_z \wedge \overrightarrow{OO'}.$$

Le champ magnétique est donc uniforme à l'intérieur de la cavité.

#### Exercice 5 : Solénoïdes imbriqués

oral CCINP PSI | 💡 2 | ✂️ 1 | ⊗



▷ Inductance propre et inductance mutuelle ;  
▷ Couplage inductif ;  
▷ Théorème de superposition.

1 Cf. cours : pour un solénoïde parcouru par un courant  $i$ , d'axe  $(Oz)$  orienté par la règle de la main droite par rapport au sens de  $i$ , le champ est uniforme à l'intérieur et vaut

$$\vec{B} = \mu_0 n i \vec{e}_z,$$

où  $n$  est le nombre de spires par unité de longueur.

**2** Par hypothèse,  $L \gg r_1$  et  $r_2$ , ce qui justifie d'approximer les solénoïdes comme infinis. En notant  $i_1$  et  $i_2$  les courants qui y circulent et compte tenu de l'orientation des spires, le champ qu'ils créent en leur intérieur vaut

$$\vec{B}_{1,2} = \mu_0 \frac{N}{\ell} i_{1,2} \vec{e}_z.$$

**Inductance propre  $L_1$  :**

▷ Flux créé par  $\mathcal{S}_1$  au travers d'une spire  $s_1$  de  $\mathcal{S}_1$  :

$$\phi_{\mathcal{S}_1 \rightarrow s_1} = \iint_{M \in s_1} \vec{B}_1(M) \cdot dS \vec{e}_z = \pi r_1^2 \mu_0 \frac{N}{\ell} i_1$$

▷ Flux total créé par  $\mathcal{S}_1$  au travers de lui-même :

$$\phi_{\mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_1} = N \phi_{\mathcal{S}_1 \rightarrow s_1} \quad \text{donc} \quad \phi_{\mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_1} = \pi r_1^2 \mu_0 \frac{N^2}{\ell} i_1.$$

▷ Inductance propre : par définition,  $\phi_{\mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_1} = L_1 i_1$  donc

$$L_1 = \pi r_1^2 \mu_0 \frac{N^2}{\ell}.$$

**Inductance propre  $L_2$  :** par la même démarche,

$$L_2 = \pi r_2^2 \mu_0 \frac{N^2}{\ell}.$$

**Inductance mutuelle  $M$  :** comme le champ créé par  $\mathcal{S}_2$  est uniforme à l'intérieur de  $\mathcal{S}_1$  alors que la réciproque n'est pas vrai, il est plus simple de calculer  $M$  à partir du flux créé par  $\mathcal{S}_2$  au travers de  $\mathcal{S}_1$ .

▷ Flux créé par  $\mathcal{S}_2$  au travers d'une spire  $s_1$  de  $\mathcal{S}_1$  :

$$\phi_{\mathcal{S}_2 \rightarrow s_1} = \iint_{M \in s_1} \vec{B}_2(M) \cdot dS \vec{e}_z = \pi r_1^2 \mu_0 \frac{N}{\ell} i_2$$

▷ Flux total créé par  $\mathcal{S}_2$  au travers de  $\mathcal{S}_1$  :

$$\phi_{\mathcal{S}_2 \rightarrow \mathcal{S}_1} = N \phi_{\mathcal{S}_2 \rightarrow s_1} \quad \text{donc} \quad \phi_{\mathcal{S}_2 \rightarrow \mathcal{S}_1} = \pi r_1^2 \mu_0 \frac{N^2}{\ell} i_2.$$

▷ Inductance mutuelle : par définition,  $\phi_{\mathcal{S}_2 \rightarrow \mathcal{S}_1} = M i_2$  donc

$$M = \pi r_1^2 \mu_0 \frac{N^2}{\ell}.$$

**3** Le circuit équivalent est tracé figure 2. Le circuit 1 contient une bobine et un générateur de courant imposant le courant  $i_1$ , le circuit 2 ne contient qu'une bobine court-circuitée. Il y a couplage inductif entre les deux circuits. Compte tenu de la convention récepteur,

$$u_1 = +L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad \text{et} \quad u_2 = +L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

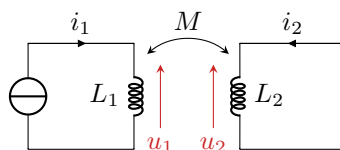


Figure 2 – Circuit électrique équivalent.

D'après la loi des mailles,  $u_2 = 0$  donc

$$\frac{di_2}{dt} = -\frac{M}{L_2} \frac{di_1}{dt}$$

et par intégration

$$i_2 = -\frac{M}{L_2} i_1 + \text{cte.}$$

Comme le solénoïde  $\mathcal{S}_2$  n'est pas relié à un générateur, on peut supposer qu'il n'y a pas de courant continu qui serait physiquement impossible à cause des résistances des fils, même si elles sont faibles. Finalement,

$$i_2(t) = -\frac{M}{L_2} I \cos(\omega t),$$

d'amplitude

$$I_2 = \frac{M}{L_2} I = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 I.$$

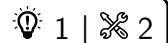
4 D'après le principe de superposition, en un point  $M$  se trouvant à l'intérieur des deux solénoïdes,

$$\vec{B}(M) = \vec{B}_1(M) + \vec{B}_2(M) = \mu_0 \frac{N}{\ell} (i_1 + i_2) \vec{e}_z$$

d'où en remplaçant

$$\vec{B}(M) = \mu_0 \frac{N}{\ell} \left[1 - \frac{M}{L_2}\right] I \cos(\omega t) \vec{e}_z = \mu_0 \frac{N}{\ell} \left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right] I \cos(\omega t) \vec{e}_z.$$

## Exercice 6 : Manipulation des équations de Maxwell



▷ Équations de Maxwell.

1 Par définition,

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0$$

ce qui est conforme à l'équation de Maxwell-Gauss car  $\rho = 0$  par hypothèse. De même,

$$\text{div } \vec{B} = \frac{\partial B_y}{\partial y} = 0$$

ce qui est là aussi conforme à l'équation de Maxwell-Thomson.

2 Compte tenu de la forme des champs,

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = f'(z) e^{-t/\tau} \vec{e}_y \quad \text{et} \quad -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{\tau} g(z) e^{-t/\tau} \vec{e}_y$$

d'où on déduit de l'équation de Maxwell-Faraday

$$f'(z) = \frac{1}{\tau} g(z)$$

3 Compte tenu de la forme des champs,

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = -g'(z) e^{-t/\tau} \vec{e}_x \quad \text{et} \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{1}{\tau} f(z) e^{-t/\tau} \vec{e}_x.$$

d'où on déduit de l'équation de Maxwell-Ampère

$$g'(z) = \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{\tau} f(z) e^{-t/\tau}.$$

4 En dérivant par rapport à  $z$  l'équation obtenue par Maxwell-Faraday, on obtient

$$f''(z) = \frac{1}{\tau} g'(z)$$

et en combinant avec la question précédente on obtient

$$f''(z) - \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{\tau^2} f(z) = 0.$$

Il s'agit d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants portant sur la seule variable  $z$ . Son polynôme caractéristique admet pour racines

$$r_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{\mu_0 \varepsilon_0}{\tau^2}} = \pm \frac{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}{\tau}$$

Dans un cas aussi simple, pas besoin de passer par le discriminant !

La solution particulière est nulle et la solution homogène est

$$f(z) = \alpha \exp\left(-\frac{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}{\tau} z\right) + \beta \exp\left(\frac{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}{\tau} z\right)$$

Les conditions données par l'énoncé imposent que  $\beta = 0$  et que  $f(z=0) = E_0 = \alpha$ . On en déduit :

$$\vec{E} = E_0 \exp\left(-\frac{1}{\tau} (t + \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} z)\right) \vec{e}_x.$$

5 D'après ce qui précède,

$$g(z) = \tau f'(z) = -E_0 \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} \exp\left(-\frac{1}{\tau} (t + \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} z)\right)$$

d'où on déduit

$$\vec{B} = -E_0 \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} \exp\left(-\frac{1}{\tau} (t + \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} z)\right) \vec{e}_y.$$

## Exercice 7 : Chauffage par induction

💡 1 | ✂ 2 | ©



- ▷ Équations de Maxwell ;
- ▷ Puissance volumique d'effet Joule ;
- ▷ Intégration de dérivées partielles.

1 Voir la figure 3. En orientant l'axe  $z$  par rapport au courant  $i$  (règle de la main droite), le champ créé par le solénoïde s'écrit

$$\vec{B} = \mu_0 n i \vec{e}_z$$

avec  $n$  le nombre de spires par unité de longueur. L'expression est identique dans l'ARQS et en magnétostatique.

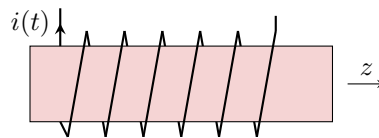


Figure 3 – Dispositif de soudure inductive.

2 L'équation de Maxwell-Faraday indique qu'un champ magnétique dépendant du temps est source de champ électrique. Au sein du métal, ce champ électrique va faire apparaître une densité de courant  $\vec{j}$  et céder de l'énergie au métal par effet Joule.

Une autre justification moins orientée « équations » consisterait à dire que le métal est un conducteur placé dans un champ magnétique variable, et est donc le siège d'un phénomène d'induction. Ce sont les courants induits (les courants de Foucault) qui vont chauffer le matériau par effet Joule.

3 D'après l'équation de Maxwell-Faraday,

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu_0 n \frac{di}{dt} \vec{e}_z = +\mu_0 n I_0 \omega \sin(\omega t) \vec{e}_z$$

et en utilisant le formulaire

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial r E_\theta}{\partial r} \vec{e}_z$$

d'où on déduit

$$\frac{\partial r E_\theta}{\partial r} = \mu_0 n I_0 \omega \sin(\omega t).$$

En intégrant par rapport à  $r$ ,

$$r E_\theta = \mu_0 n I_0 \omega \sin(\omega t) \frac{r^2}{2} + f(t).$$

Comme on intègre une dérivée partielle pour laquelle certaines variables (ici  $t$ ) sont fixées, alors la constante d'intégration est une « constante partielle », c'est-à-dire une fonction des variables fixées.

On montre que la fonction  $f$  est nulle en se plaçant en  $r = 0$  : comme il n'y a « rien de spécial » en ce point, la composante  $E_\theta$  y prend une valeur finie. Finalement,

$$\vec{E} = \frac{1}{2} \mu_0 n r I_0 \omega \sin(\omega t) \vec{e}_\theta.$$

L'analyse des invariances est identique à celle menée en électrostatique. En revanche, celle des symétries est beaucoup plus subtile à cause du champ magnétique variable, et hors de portée en PT : comme c'est  $\operatorname{rot} \vec{E}$  qui intervient dans l'équation de Maxwell-Faraday, alors un plan de symétrie de  $\partial \vec{B} / \partial t$  est plan d'antisymétrie de  $\vec{E}$  ... ce qui est la propriété inverse par rapport à la charge électrique, car  $\rho$  apparaît dans l'équation de Maxwell-Gauss qui porte sur  $\operatorname{div} \vec{E}$ .

4 D'après la loi d'Ohm locale,

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} = \frac{1}{2} \mu_0 \gamma n r I_0 \omega \sin(\omega t) \vec{e}_\theta.$$

On en déduit la puissance volumique dissipée par effet Joule,

$$\mathcal{P} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{1}{4} \gamma \mu_0^2 n^2 r^2 I_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t).$$

Elle est maximale lorsque  $r$  est maximal, c'est donc sur les bords du cylindre que le métal chauffe le plus et qu'il fond en premier.

On retrouve un phénomène d'effet de peau analogue à celui que nous rencontrerons en étudiant les ondes électromagnétiques : dans un conducteur en régime variable, les courants sont repoussés à l'extérieur du matériau.

## Exercice 8 : Émission radioactive

💡 2 | ✂ 2



▷ Équations de Maxwell.

1 L'amas émet des charges positifs, il est donc logique que sa charge soit négative et décroissante. L'allure exponentielle est typique de la radioactivité. À l'instant initial, on a  $q(t=0) = 0$  : aucun atome ne s'est désintégré donc l'amas est neutre.

2 L'émission étant isotrope, le vecteur densité de courant est forcément à symétrie sphérique :  $\vec{j} = j_r(r) \vec{e}_r$ . Ainsi, tout plan contenant  $(OM)$  est plan de symétrie de la distribution de courant, donc  $\vec{B}(M, t)$  doit être orthogonal à chacun de ces plans et est donc forcément nul :

$$\vec{B}(M, t) = \vec{0}.$$

L'équation de Maxwell-Ampère indique qu'un champ électrique variable est également source de champ magnétique : dans un cas plus général, il faut donc également étudier les plans de symétrie de  $\partial \vec{E} / \partial t$ . Cependant, d'après le théorème de superposition, les propriétés de symétrie doivent être vérifiées pour chaque « famille » de sources. Les symétries des courants imposent d'avoir  $\vec{B} = \vec{0}$ , le champ électrique ne pourra donc rien y changer.

3 • **Symétries** : la distribution de charge possède les mêmes symétries que la distribution de courant, mais



comme  $\vec{E}$  doit être inclus dans un plan de symétrie il n'est pas nul mais radial,

$$\vec{E}(M, t) = E_r(M, t) \vec{e}_r.$$

L'équation de Maxwell-Faraday indique qu'un champ magnétique variable est également source de champ électrique : dans un cas plus général, il faut donc également étudier les plans de symétrie de  $\partial \vec{B} / \partial t$  ... mais ce n'est pas la peine ici car  $\vec{B} = \vec{0}$ , tout se passe exactement comme en statique.

• **Invariances** : à tout instant la distribution de charge est invariante par rotation autour de l'amas, donc  $\vec{E}$  ne dépend que de  $r$ .

• **Théorème de Gauss**, qui s'applique aussi en régime variable : on raisonne sur une sphère de rayon  $r$  centré sur l'amas.

▷ calcul du flux :  $\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 E_r.$

▷ calcul de la charge intérieure : il faut un temps  $r/v_0$  pour qu'une particule  $\alpha$  sorte de la sphère de rayon  $r$ , donc la charge contenue dans la sphère à un instant  $t$  est la charge de l'amas à l'instant  $t - r/v_0$ .

$$Q_{\text{int}} = q \left( t - \frac{r}{v_0} \right)$$

• **Conclusion** :

$$\vec{E}(r, t) = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \exp\left(-\frac{1}{\tau} \left( t - \frac{r}{v_0} \right)\right) \vec{e}_r.$$

4 D'après l'équation de Maxwell-Gauss,

$$\begin{aligned} \rho(r, t) &= \epsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{Q_0}{4\pi} \frac{d}{dr} \left[ \exp\left(-\frac{t}{\tau} + \frac{r}{v_0\tau}\right) \right] \\ &= \frac{Q_0}{4\pi r^2} \times \frac{1}{v_0\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau} + \frac{r}{v_0\tau}\right) \end{aligned}$$

$$\rho(r, t) = \frac{Q_0}{4\pi v_0\tau r^2} \exp\left(-\frac{t}{\tau} + \frac{r}{v_0\tau}\right)$$

D'après l'équation de Maxwell-Ampère,

$$\begin{aligned} \vec{j}(r, t) &= \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ &= \vec{0} - \frac{Q_0}{4\pi r^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \exp\left(-\frac{t}{\tau} + \frac{r}{v_0\tau}\right) \right] \vec{e}_r \\ &= -\frac{Q_0}{4\pi r^2} \times -\frac{1}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau} + \frac{r}{v_0\tau}\right) \vec{e}_r \end{aligned}$$

$$\vec{j}(r, t) = \frac{Q_0}{4\pi \tau r^2} \exp\left(-\frac{t}{\tau} + \frac{r}{v_0\tau}\right) \vec{e}_r.$$

On retrouve  $\vec{j} = \rho v_0 \vec{e}_r$  ... on aurait pu s'y attendre !

## Exercice 9 : Balance de Cotton

Mines PSI 2016 | 3 | 2



- ▷ Force de Laplace ;  
▷ Moment cinétique.

Introduisons des coordonnées cylindriques de centre  $O$  et d'axe  $Oz$  tel que  $\vec{B} = B \vec{e}_z$ .

1 Les parties circulaires ont pour centre  $O$ , si bien que l'élément de courant  $I d\vec{\ell}$  est porté par  $\pm \vec{e}_\theta$  ( $\oplus$  pour le conducteur aller et  $\ominus$  pour le retour) et la force de Laplace élémentaire  $I d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$  par  $\pm \vec{e}_r$ . Toutes ces forces sont donc des forces centrales de centre  $O$ , dont le moment en  $O$  est donc nul.

2 Sur la partie rectiligne de longueur  $L$ , la force de Laplace vaut

$$\vec{F}_L = -IL \vec{e}_r \wedge B \vec{e}_z = ILB \vec{e}_\theta$$

Cette force s'applique au milieu du segment rectiligne, son bras de levier vaut donc  $a$ , d'où

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_L) = a \vec{e}_r \wedge ILB \vec{e}_\theta \quad \text{soit} \quad \boxed{\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_L) = aILB \vec{e}_z.}$$

**3** Le bras gauche de la balance est soumis à la force de Laplace et à son propre poids. Le bras droit de la balance est soumis à son propre poids et à celui de la masse  $m$  additionnelle qui a été déposée sur le plateau. L'énoncé indique qu'à vide la balance est équilibrée, ce qui veut dire que les moments en  $O$  du poids de chaque bras se compensent. Comme la balance est de nouveau à l'équilibre, le moment du poids de la masse  $m$  doit exactement compenser celui des forces de Laplace, c'est-à-dire

$$-a'mg \vec{e}_z + aILB \vec{e}_z = \vec{0} \quad \text{d'où} \quad \boxed{B = \frac{a'mg}{aIL}.}$$

**4** La plus petite valeur de champ magnétique mesurable est celle pour laquelle  $m = \delta m$ , c'est-à-dire

$$\boxed{B_{\min} = \frac{a' \delta m g}{a I L} = 2 \text{ mT}.}$$

À titre de comparaison, le champ magnétique terrestre a pour norme  $5 \cdot 10^{-5} \text{ T}$  et n'est pas mesurable avec la balance, mais le champ créé par un aimant permanent « basique » est de l'ordre de 100 mT. **La balance de Cotton est donc tout à fait utilisable.**