BLAISE PASCAL
PT 2020-2021

TD 11 – Électromagnétisme

Champ magnétique statique et lentement variable

Difficulté d'analyse et compréhension, initiative requise ;
Difficulté technique et calculatoire ;
Exercice important.

Flasher ce code pour accéder aux corrigés

Questions de cours

11.1 - Rappeler l'équation de Maxwell-Ampère puis démontrer le théorème d'Ampère.

11.2 - Établir l'expression du champ magnétostatique créé par un fil rectiligne parcouru par un courant d'intensité I.

11.3 - Établir l'expression du champ magnétostatique créé par un cylindre d'axe (Oz) parcouru par une densité volumique de courant $\vec{j} = J_0 \vec{e}_z$ uniforme.

11.4 - Établir l'expression du champ magnétostatique créé en tout point de l'espace par un solénoïde d'axe (Oz) formé de n spires par unité de longueur et parcouru par un courant d'intensité I. Pour mener le calcul à son terme, le champ doit être partiellement fourni par l'interrogateur :
- ▷ ou bien on admettra que le champ à l'extérieur du solénoïde est uniformément nul ;
- ▷ ou bien on admettra que le champ sur l'axe du solénoïde vaut $\mu_0 n I \vec{e}_z$.

11.5 - Établir l'expression de l'inductance d'une bobine de grande longueur, assimilée à un solénoïde infini. Le champ magnétostatique sera rappelé sans démonstration par l'étudiant. La méthode utilisée sera choisie par l'interrogateur : ou bien par le flux propre, ou bien par l'énergie magnétique.

Exercice 1 : Cylindre parcouru par un courant inhomogène

1 | 1 |

- ▷ *Théorème d'Ampère ;*
- ▷ *Coordonnées cylindriques.*

On considère un câble cylindrique de rayon R et d'axe z parcouru par un courant d'intensité I réparti de façon non uniforme au sein du câble,

$$\vec{j}(r) = J_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \vec{e}_z \,.$$

1 - Exprimer J_0 en fonction de I.

2 - Calculer le champ magnétostatique créé par ce câble en tout point de l'espace.

3 - Vérifier que le champ trouvé obéit bien à l'équation de Maxwell-Ampère.

Donnée : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial B_z}{\partial \theta} - \frac{\partial B_\theta}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r B_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial B_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_z$

Exercice 2 : Plan parcouru par un courant

2 | 1

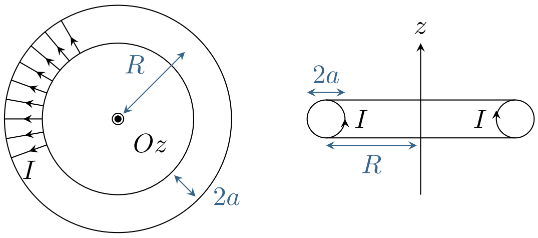
- ▷ *Théorème d'Ampère ;*
- ▷ *Coordonnées cartésiennes ;*
- ▷ *Utilisation avancée des propriétés de symétrie.*

Entre les deux plans $z = -a$ et $z = +a$ existe un courant de densité volumique uniforme $\vec{j} = j_0 \vec{u}_x$. Calculer le champ magnétique en tout point de l'espace et le représenter graphiquement. On pourra montrer par des arguments de symétrie que le champ magnétique est nul dans le plan $z = 0$.

Exercice 3 : Bobine torique

2 | 1 |

▷ *Théorème d'Ampère ;*
▷ *Coordonnées cylindriques.*



Une bobine torique est un enroulement de fil conducteur sur un support en forme de tore, c'est-à-dire la forme d'une bouée. Le support torique est caractérisé par un rayon moyen R autour de son axe de symétrie (Oz) et une section circulaire de rayon $a < R$.

L'enroulement comporte $N \gg 1$ spires que l'on modélisera par des spires planes circulaires de rayon a. Le nombre de spires est suffisamment grand pour que l'on puisse considérer les spires comme continûment réparties le long du tore. On note I le courant circulant dans cette bobine. On se place en coordonnées cylindriques d'axe (Oz).

Montrer que le champ magnétostatique créé par cette bobine s'écrit $\vec{B} = B(r,z)\,\vec{e}_\theta$, et le calculer en tout point M, en distinguant les cas selon que M se trouve à l'intérieur ou à l'extérieur de la bobine.

Exercice 4 : Fil conducteur creux

oral banque PT | 2 | 2

▷ *Théorème d'Ampère ;*
▷ *Principe de superposition.*

Un fil conducteur épais de rayon R et d'axe $\vec{u}_z$ est parcouru par un courant de densité $j\,\vec{u}_z$ uniforme.

1 - Déterminer le champ $\vec{B}_0$ en tout point M de l'espace.

2 - Exprimer $\vec{B}_0$ en fonction de $\vec{u}_z$ et $\overrightarrow{OM}$.

On suppose maintenant que le fil est creux et présente une cavité cylindrique parallèle à l'axe du cylindre mais décentrée par rapport à cet axe. Dans le reste du cylindre, la densité de courant est toujours égale à j.

3 - Calculer le champ magnétique dans la cavité.

Exercice 5 : Solénoïdes imbriqués

oral CCINP PSI | 2 | 1 |

▷ *Inductance propre et inductance mutuelle ;*
▷ *Couplage inductif ;*
▷ *Théorème de superposition.*

Deux solénoïdes $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ de même axe (Oz), de même longueur ℓ et de rayons r_1 et $r_2 > r_1$ sont emboîtés l'un dans l'autre, voir figure 1. Ils présentent tous deux le même nombre de spires N. On suppose que la longueur ℓ est très supérieure aux rayons.

La bobine intérieure est parcourue par un courant $i_1(t) = I\cos(\omega t)$, avec $I = 1\,\mathrm{A}$, avec ω une pulsation suffisamment basse pour que l'ARQS magnétique s'applique [1]. La bobine extérieure est en court-circuit.

1 - Sachant que le champ est nul à l'extérieur, déterminer le champ à l'intérieur d'un solénoïde infini.

2 - Déterminer les coefficients d'induction propre L_1, L_2, et le coefficient d'induction mutuelle M.

3 - En négligeant les résistances internes des fils, déterminer le courant $i_2(t)$ parcourant la bobine extérieure. Quelle est son amplitude ?

4 - Que vaut le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde central ?

1. Ce qui a pour conséquence pratique ici de pouvoir appliquer le théorème d'Ampère exactement comme en statique bien que i_1 soit variable.

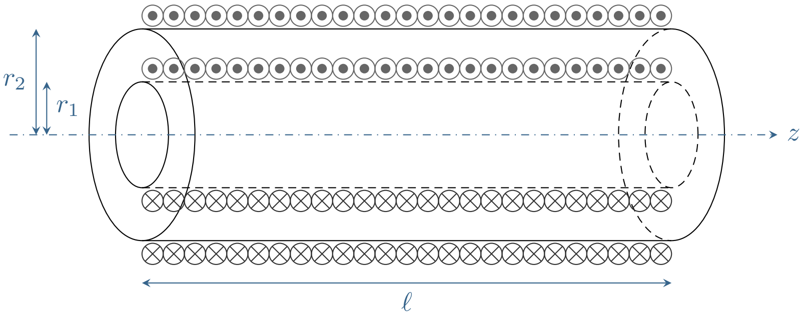


Figure 1 – Solénoïdes imbriqués.

Exercice 6 : Manipulation des équations de Maxwell

1 | 2

▷ *Équations de Maxwell.*

On suppose que règne dans l'espace le champ électromagnétique

$$\begin{cases} \vec{E}(M,t) = f(z)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\,\vec{e}_x \\ \vec{B}(M,t) = g(z)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\,\vec{e}_y \end{cases}$$

où τ est une constante de temps et f, g deux fonctions que l'on cherche à déterminer. On suppose que l'espace est vide de charges et de courants.

1 - Vérifier que la forme de ces deux champs est compatible avec les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Thomson.

2 - Montrer que l'équation de Maxwell-Faraday impose une relation entre $g(z)$ et $f'(z)$.

3 - Montrer que l'équation de Maxwell-Ampère impose une relation entre $f(z)$ et $g'(z)$.

4 - En déduire une équation différentielle vérifiée par f. La résoudre en supposant que $\vec{E}(z{=}0, t{=}0) = E_0\,\vec{e}_x$ et que le champ électrique est nul en $z \to +\infty$ à tout instant.

5 - En déduire l'expression complète du champ électromagnétique.

Exercice 7 : Chauffage par induction

1 | 2 |

▷ *Équations de Maxwell ;*
▷ *Puissance volumique d'effet Joule ;*
▷ *Intégration de dérivées partielles.*

On étudie dans cet exercice un dispositif modèle permettant de chauffer un cylindre métallique par induction électromagnétique, potentiellement jusqu'à une température supérieure à sa température de fusion. Il s'agit d'une bobine parcourue par un courant alternatif $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$ de forte intensité. Au centre de cette bobine est placé un cylindre conducteur, qui est le métal à chauffer, de conductivité électrique γ. Ce principe est par exemple utilisé dans des dispositifs de soudure électromagnétique.

1 - Faire un schéma du dispositif et donner sans calcul l'expression du champ créé par la bobine. Pour simplifier, on négligera tout effet de bord, ce qui revient à l'assimiler à un solénoïde infini.

2 - Justifier qu'un champ électrique apparaît au sein de la bobine. En déduire qualitativement pourquoi le métal placé au centre chauffe.

On peut montrer que le champ électrique induit dans le métal est de la forme $\vec{E} = E_\theta(r,t)\,\vec{e}_\theta$.

3 - Exprimer $\vec{E}$ en fonction notamment de r et I_0.

4 - En déduire la densité de courant induite dans le matérieau, puis l'expression de la puissance volumique dissipée par effet Joule. Où le métal va-t-il fondre en premier ?

Donnée : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = \left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A_z}{\partial \theta} - \dfrac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\dfrac{\partial A_r}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \dfrac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_z$

Exercice 8 : Émission radioactive 2 | 2

▷ *Équations de Maxwell.*

Un amas d'atomes radioactifs, supposé ponctuel, émet à partir de l'instant $t = 0$ des particules α avec une vitesse constante v_0. On suppose la distribution de la direction d'émission isotrope. On rappelle que les particules α sont des noyaux d'hélium ${}^4_2\mathrm{He}$, et on admet qu'à l'instant t la charge électrique de l'amas vaut

$$q(t) = Q_0 \left(\mathrm{e}^{-t/\tau} - 1\right) \qquad \text{avec} \qquad Q_0 > 0\,.$$

1 - Vérifier qualitativement la cohérence de la loi $q(t)$.

2 - Montrer par étude des symétries que le champ magnétique est nul en tout point de l'espace.

3 - Calculer le champ électrique $\vec{E}(M,t)$ en tout point M de l'espace. On pourra l'exprimer en fonction de $t - r/v_0$.

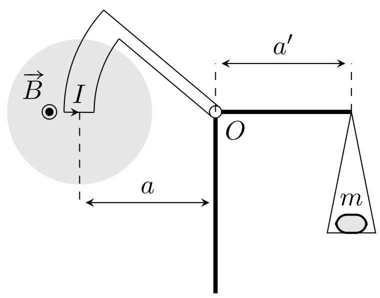
4 - Déterminer les densités volumiques de charge $\rho(M,t)$ puis de courant $\vec{j}(M,t)$.

Donnée : En coordonnées sphériques, on donne pour un champ $\vec{A} = A_r(r,t)\vec{u}_r$

$$\mathrm{div}\,\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = \vec{0}\,.$$

Exercice 9 : Balance de Cotton Mines PSI 2016 | 3 | 2

▷ *Force de Laplace ;*
▷ *Moment cinétique.*



La balance de Cotton est un dispositif ancien, développé au tout début du XXe siècle par Aimé Cotton pour mesurer avec précision des champs magnétiques. Elle est constituée de deux bras rigidement liés l'un à l'autre en O. La partie de gauche comprend sur sa périphérie un conducteur métallique qui est parcouru par un courant et dont une partie est placée dans le champ magnétique uniforme et permanent à mesurer, représenté par la zone grisée. Dans cette partie, les conducteurs aller et retour sont des arcs de cercle de centre O, reliés par une portion horizontale de longueur L. Le partie droite comporte un plateau sur lequel est déposée une masse m afin d'équilibrer la balance.

La balance peut tourner sans frottement dans le plan de la figure autour du point O. À vide, c'est-à-dire sans champ magnétique ni masse m, la position du plateau est ajustée afin que la balance soit à l'équilibre avec le bras de droite parfaitement horizontal.

1 - Montrer que le moment en O des forces de Laplace s'exerçant sur les parties en arc de cercle est nul.

2 - À l'équilibre, en présence de courant et de champ magnétique, établir l'expression du moment en O des forces de Laplace.

3 - En déduire la relation entre la masse m à poser sur le plateau pour retrouver la configuration d'équilibre et le champ magnétique B, à exprimer en fonction de a, a' , ℓ, I et de l'intensité de la pesanteur g.

4 - La sensibilité de la balance étant de $\delta m = 0{,}05\,\mathrm{g}$, en déduire la plus petite valeur de B mesurable pour $a = a' = 25\,\mathrm{cm}$, $L = 5\,\mathrm{cm}$ et $I = 5\,\mathrm{A}$. En comparant cette valeur avec une ou des références connues, conclure quant à l'utilisabilité de la balance.