

Réflexion et absorption des ondes électromagnétiques

- 💡 Difficulté d'analyse et compréhension, initiative requise ;
- ✂ Difficulté technique et calculatoire ;
- ⊗ Exercice important.

Flasher ce code pour
accéder aux corrigés



Questions de cours

Seuls les étudiants du groupe de TD PT* seront interrogés en colle sur les questions marquées d'une étoile, car elles sont plus techniques et/ou moins essentielles ... mais tous les étudiants sont bien sûr invités à les travailler !

(★) **19.1** - Montrer qu'un conducteur ohmique excité à basse fréquence ($f \lesssim 10^{14}$ Hz) peut être considéré localement neutre. Montrer que le courant de déplacement peut y être négligé devant le courant de conduction.

19.2 - Écrire sans démonstration les équations de Maxwell simplifiées dans un conducteur ohmique excité en basse fréquence. En déduire l'équation de propagation pour le champ électrique ou magnétique, au choix de l'interrogateur.

19.3 - En partant de l'équation de propagation (rappelée par l'interrogateur), établir la relation de dispersion complexe dans un conducteur ohmique. Définir l'épaisseur de peau. En déduire l'expression du champ électrique d'une pseudo-OPPH et l'interpréter physiquement.

19.4 - Considérons un conducteur parfait occupant le demi-espace $x > 0$, sur lequel est envoyé une onde incidente

$$\vec{E}_i = \underline{E}_0 e^{i(\omega t - kx)} \vec{e}_y.$$

Déterminer l'onde réfléchie en la cherchant sous la forme

$$\vec{E}_r = \underline{E}'_0 e^{i(\omega t + kx)} \vec{e}_y.$$

En déduire le coefficient de réflexion en amplitude.

Le calcul est légèrement différent de celui du cours, car un peu moins général : pour alléger le calcul, on admet ici directement que l'onde réfléchie a la même polarisation que l'onde incidente, ce qui permet de n'utiliser qu'une seule projection de la relation de passage.

(★) **19.5** - Déterminer les solutions de l'équation de d'Alembert à variables séparées s'écrivant sous la forme

$$\vec{E}(x, t) = f(x) g(t) \vec{e}_y.$$

19.6 - Considérons une cavité électromagnétique formée par deux plans conducteurs situés en $x = 0$ et $x = L$. On cherche ses modes propres sous la forme

$$\vec{E}(x, t) = E_0 \sin(kx + \psi) \cos(\omega t + \varphi) \vec{e}_y.$$

Déterminer les valeurs possibles de k et ψ .

Effet de peau

Exercice 1 : Blocage d'appel

oral banque PT | 💡 1 | ✂️ 2 | 🚫



▷ Effet de peau.

Un téléphone émet un appel, reçu par un second téléphone. On place une plaque de métal devant le second téléphone : il ne reçoit plus l'appel. On modélise la plaque comme occupant tout le demi-espace $z > 0$, l'onde se propageant dans le vide $z < 0$.

- 1 - Donner l'ordre de grandeur de la longueur d'onde et de la fréquence d'une onde téléphonique. On admet que cette fréquence permet de traiter le métal dans l'ARQS.
- 2 - Établir l'équation différentielle vérifiée par \vec{E} dans le métal. Comparer cette équation à celle dans le vide. Commenter physiquement.
- 3 - Trouver les solutions de l'équation précédente de la forme $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \underline{k}z)}$, avec \underline{k} complexe. Ces solutions sont-elles des ondes planes progressives monochromatiques ?
- 4 - Identifier une distance caractéristique. La calculer numériquement, justifier le modèle de plaque semi-infinie, et interpréter l'expérience.

Exercice 2 : Transparence ultra-violette des métaux

adapté oral banque PT | 💡 3 | ✂️ 2



▷ Écriture complexe des équations de Maxwell ;
▷ Relation de dispersion complexe.

Cet exercice a pour but d'étudier la propagation d'une onde électromagnétique *de haute fréquence* à l'intérieur d'un métal, pour laquelle ni la loi d'Ohm statique ni l'ARQS ne sont valables. On se place en régime sinusoïdal forcé de pulsation ω .

Les porteurs de charge dans ce métal sont des électrons de charge $-e$, de masse m_e , présents en densité volumique N . Considérons le mouvement d'un électron de conduction du métal, sous l'effet de la force de Lorentz électrique (force magnétique négligeable) et d'une force de friction modélisant les interactions avec le réseau cristallin,

$$\vec{f} = -\frac{m_e}{\tau} \vec{v}.$$

- 1 - Établir l'expression de la vitesse complexe de l'électron \underline{v} . En déduire que le métal possède une conductivité complexe

$$\underline{\gamma} = \frac{\gamma_0}{1 + i\omega\tau}$$

où γ_0 est une constante dont on donnera l'expression.

- 2 - Écrire l'équation de conservation de la charge complexe. En déduire que le métal reste localement neutre, même à haute fréquence.
- 3 - Écrire les équations de Maxwell complexes dans le métal pour une OPPH quelconque $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \underline{k} \cdot \vec{r})}$.
- 4 - Établir la relation de dispersion sous la forme

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - i\mu_0 \underline{\gamma} \omega.$$


- 5 - En déduire que, pour un domaine de pulsation à préciser, l'onde peut être transmise au travers du métal sans être absorbée.
- 6 - Expliquer le titre de l'exercice.

Données :

- ▷ dans un métal usuel, $\gamma_0 = 5 \cdot 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$ et $\tau = 10^{-14} \text{ s}$;
- ▷ perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$;
- ▷ double produit vectoriel : $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$.

Exercice 3 : Approche énergétique de l'effet de peau

oral banque PT | 💡 3 | ✂️ 2

- 
- ▷ Effet de peau ;
 - ▷ Vecteur de Poynting ;
 - ▷ Bilan de puissance.


Considérons un conducteur électrique semi-infini de conductivité γ et dans lequel règne un champ

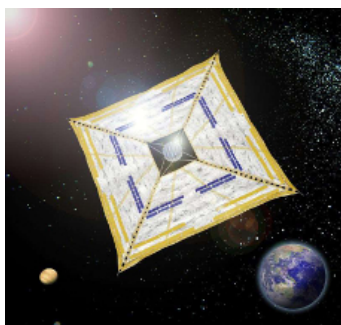
$$\vec{E} = E_0 e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \alpha z)} \vec{u}_x.$$

- 1 - S'agit-il d'une onde plane ? D'une onde progressive ? Que représente α ? Quelles sont la direction et le sens de propagation ? La polarisation ?
- 2 - Calculer le champ \vec{B} associé.
- 3 - Exprimer la moyenne temporelle du vecteur de Poynting.
- 4 - Effectuer un bilan de puissance pour une tranche de conducteur de surface S et de longueur dz . Déterminer la puissance cédée par unité de volume dans le conducteur.
- 5 - Établir une autre expression de la puissance cédée à partir de la loi d'Ohm locale.
- 6 - À partir des deux expressions obtenues, déduire la distance sur laquelle pénètre l'onde avant d'être atténuée.

Réflexion des ondes**Exercice 4 : Voile solaire**

oral banque PT | 💡 2 | ✂️ 2

- 
- ▷ Réflexion sur un conducteur parfait ;
 - ▷ Force de Lorentz.



Une voile solaire est un dispositif de propulsion permettant de se déplacer dans l'espace à la manière d'un voilier. Les photons émis par le Soleil entrent en collision avec la voile et lui cèdent leur quantité de mouvement, ce qui lui permet d'avancer. Compte tenu de la faible propulsion générée, le procédé ne permet pas de quitter la surface d'une planète (même dénuée d'atmosphère, et donc de friction). Il est en revanche utilisable sur un appareil ayant déjà atteint la vitesse de satellisation minimale, voire la vitesse de libération. Plusieurs prototypes de petite taille ont déjà été placés en orbite ou sont en cours de développement, comme par exemple le démonstrateur IKAROS, dont une vue d'artiste est représentée ci-contre, lancé en 2010 par l'agence spatiale japonaise.

On considère une voile solaire de surface S modélisée par un conducteur parfait. Le rayonnement solaire est assimilé à une onde plane progressive monochromatique (OPPM) de polarisation rectiligne. On suppose que la normale à la surface S est colinéaire à la direction de propagation de l'OPPM.

- 1 - Proposer une expression du champ électrique complexe de l'OPPM incidente sur la voile. En déduire l'onde réfléchie.
- 2 - Calculer la densité surfacique de courant sur la voile.
- 3 - Proposer une expression pour la force surfacique moyenne à laquelle est soumise la voile et la calculer. Commenter sa direction et son sens.

Données :

- ▷ les champs \vec{E} et \vec{B} sont nuls dans un conducteur parfait ;
- ▷ relations de passage à l'interface entre deux milieux (1) et (2), de normale \vec{n} orientée de (1) vers (2) :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n} \quad \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n} \iff \vec{j}_s = \vec{n} \wedge \left(\frac{\vec{B}_2 - \vec{B}_1}{\mu_0} \right),$$

où σ et \vec{j}_s sont respectivement les densités surfaciques de charge et de courant à l'interface.

Exercice 5 : Onde électromagnétique confinée

oral Mines-Ponts PSI | 💡 1 | ✂️ 2 | Ⓜ️



- ▷ Réflexion sur un conducteur parfait ;
- ▷ Cavité électromagnétique.

On rappelle que les champs \vec{E} et \vec{B} sont nuls dans un conducteur parfait. On donne les relations de passage à l'interface entre deux milieux 1 et 2 :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \quad \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \quad \mu_0 \vec{j}_s = \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \wedge (\vec{B}_2 - \vec{B}_1),$$

où σ et \vec{j}_s sont respectivement les densités surfaciques de charge et de courant à l'interface.

1 - On considère un champ électrique dans le vide de la forme $\vec{E}_i = E_0 e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_x$. Montrer que $\omega = kc$.

2 - On place un conducteur parfait semi-infini en $z > 0$. Montrer que les relations de passage pour \vec{E} impliquent l'existence d'une onde réfléchie et donner son expression. Donner la nature de l'onde totale.

3 - En déduire le champ magnétique à partir d'une équation de Maxwell.

4 - Qu'impliquent les relations de passage pour \vec{B} ? Interpréter.

On ajoute un deuxième conducteur parfait en $z = -L$.

5 - Déterminer les ondes pouvant exister entre les deux conducteurs et leurs caractéristiques. On introduira un entier n .

6 - Quelle est la puissance moyenne traversant une surface $z = \text{cte}$?

Exercice 6 : Réflexion à l'interface entre deux milieux transparents

💡 2 | ✂️ 2



- ▷ Réflexion d'une onde électromagnétique ;
- ▷ Vecteur de Poynting.

L'objectif de cet exercice est d'étudier la réflexion d'une onde électromagnétique entre deux milieux isolants parfaitement transparents (verre, eau, plexiglas, etc.). De tels milieux sont appelés *milieux diélectriques*. La propagation des ondes électromagnétiques y obéit exactement aux mêmes relations que dans le vide, à condition de remplacer la célérité c par c/n où n est l'indice optique du milieu.

Dans un milieu d'indice n_1 , on envoie une onde incidente de la forme

$$\vec{E}_i = E_0 e^{i(\omega t - k_1 z)} \vec{e}_x.$$

En $z = 0$ se trouve une interface avec un milieu d'indice n_2 , voir figure 1. Lorsque l'onde incidente l'atteint, elle est partiellement réfléchie et partiellement transmise. On cherche les ondes transmises et réfléchies sous la forme

$$\vec{E}_r = \underline{r} E_0 e^{i(\omega t + k_1 z)} \vec{e}_x \quad \text{et} \quad \vec{E}_t = \underline{t} E_0 e^{i(\omega t - k_2 z)} \vec{e}_x.$$

Les constantes \underline{r} et \underline{t} sont appelées coefficient de réflexion et transmission en amplitude pour le champ électrique.

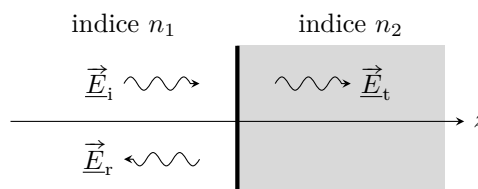


Figure 1 – Transmission et réflexion à une interface entre deux milieux diélectriques.

Donnée : relations de passage au niveau de l'interface

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z \quad \text{et} \quad \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{e}_z,$$

avec σ et \vec{j}_s les densités surfaciques de charge et de courant à l'interface.

1 - Exprimer k_1 et k_2 en fonction notamment de la pulsation et des indices optiques.

- 2 - Justifier les expressions des ondes transmises et réfléchies. Quelles sont les hypothèses permettant de les écrire sous cette forme ?
- 3 - Écrire les relations de passage en fonction de \underline{r} et \underline{t} en admettant qu'il n'y a ni charge ni courant de surface.
- 4 - En déduire les expressions de \underline{r} et \underline{t} en fonction des indices des deux milieux.
- 5 - Exprimer les trois vecteurs de Poynting incident, réfléchi et transmis en moyenne temporelle.
- 6 - Par analogie, définir un coefficient de réflexion et de transmission en énergie à l'interface. Les calculer. Que vaut la somme des deux coefficients ? Interpréter physiquement.

Exercice 7 : Guide d'ondes

oral banque PT | 💡 2 | ✂ 2 | Ⓜ



- ▷ Relation de structure ;
- ▷ Exploitation des conditions aux limites.

Un guide d'onde est constitué de deux plans parfaitement conducteurs situés en $y = 0$ et $y = a$ entre lesquels est confinée une onde électromagnétique de la forme

$$\vec{E} = [A e^{ik_2 y} + B e^{-ik_2 y}] e^{i(\omega t - k_1 x)} \vec{e}_z.$$

Donnée : On rappelle la relation de passage pour le champ électrique à l'interface entre deux milieux 1 et 2,

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{u},$$

avec \vec{u} le vecteur normal dirigé de 1 vers 2.

- 1 - Montrer que cette onde est une superposition de deux ondes planes progressives sinusoïdales (OPPS) dont on exprimera les vecteurs d'onde notés \vec{k}_\pm .
- 2 - Que valent les champs dans un conducteur parfait ? Établir une relation entre A et B et une condition sur k_2 dépendant d'un entier n .
- 3 - Déterminer l'inclinaison θ_\pm des deux OPPS avec l'axe du guide en fonction de leur longueur d'onde λ et a .
- 4 - En déduire que toutes les ondes ne peuvent pas se propager dans le guide.
- 5 - Exprimer l'onde totale. Commenter sa structure dans les directions x et y .

Exercice 8 : Guide d'ondes (bis)

inspiré oral banque PT | 💡 3 | ✂ 2



- ▷ Exploitation des conditions aux limites ;
- ▷ Résolution par séparation des variables ;
- ▷ Vecteur de Poynting.

Une cavité vide, supposée invariante par translation selon \vec{u}_y et \vec{u}_z , est taillée dans un conducteur occupant les demi-espaces $x < 0$ et $x > a$. On souhaite utiliser cette cavité comme guide d'onde : on s'intéresse à la propagation dans cette cavité d'une onde électromagnétique sous la forme

$$\vec{E}(M, t) = f(x) e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_y.$$

- 1 - Déterminer $f(x)$ et la relation entre ω et k .
- 2 - Montrer que l'onde ne peut se propager que si ω est supérieure à une pulsation de coupure ω_c à exprimer.
- 3 - On appelle modes propagatifs du guide les différentes ondes pouvant se propager dans le guide pour une pulsation donnée. Pour quel intervalle de pulsation le guide d'onde est-il monomode, c'est-à-dire qu'il n'y existe qu'un seul mode propagatif ? Même question pour un guide multimode, possédant plusieurs modes propagatifs ?
- 4 - Le champ magnétique dans le guide s'écrit

$$\vec{B}(M, t) = -\frac{k}{\omega} E_0 \sin \frac{n\pi x}{a} e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_x + i \frac{n\pi}{a\omega} E_0 \cos \frac{n\pi x}{a} e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_z.$$

Déterminer l'expression du vecteur de Poynting instantané et interpréter physiquement chacune de ses composantes.