BLAISE PASCAL
PT 2020-2021

TD 3 – Mécanique des fluides

Bilans d'énergie des écoulements en conduite

Difficulté d'analyse et compréhension, initiative requise ;
Difficulté technique et calculatoire ;
Exercice important.

Flasher ce code pour accéder aux corrigés

Questions de cours

3.1 - Démontrer le bilan d'énergie mécanique d'un écoulement stationnaire en conduite.

> *La démonstration est notoirement très longue : les étudiants doivent non seulement faire un effort d'apprentissage* **mais aussi de concision** *dans la présentation. Les points clés de la démonstration sont les suivants :*
> ▷ *passage du système ouvert à un système fermé (comment $\delta\Sigma_e$ et $\delta\Sigma_s$ sont ils construits ?)*
> ▷ *bilan de masse pour montrer que $\delta m_e = \delta m_s$;*
> ▷ *les deux écritures de la variation d'énergie mécanique $dE_{m,f}$;*
> ▷ *l'expression du travail de transvasement en fonction des pressions ;*
> ▷ *le passage à une écriture en termes d'énergie massique ou de puissance.*

3.2 - Énoncer sans démonstration le « vrai » théorème de Bernoulli en indiquant les hypothèses sur l'écoulement et sa signification physique. Retrouver l'évolution des champs de pression et de vitesse dans un dispositif type Venturi.

> *Par « vrai » théorème de Bernoulli, j'entends celui pour un écoulement parfait. Bien que très classique, le dispositif de Venturi n'est pas à connaître et pourra donc être rappelé si besoin. Je n'attends pas de longs calculs : l'étudiant doit combiner la conservation du débit et le théorème de Bernoulli pour montrer qu'un resserrement de section entraîne une hausse de vitesse et une chute de pression.*

3.3 - Écrire sans démonstration le théorème de Bernoulli généralisé en présence de pièces mobiles et de pertes de charge. L'interrogateur précisera la dimension voulue (puissance, pression, etc.), si l'écriture concerne une puissance ou un travail indiqué, et si les pertes de charge doivent s'exprimer sous forme de pression ou de hauteur. L'objectif est de jongler sans erreur avec les dimensions des différents termes.

> ***Exemples :***
> ▷ *Écriture en énergie massique, pertes de charge en hauteur d'eau équivalente :*
>
> $$\left(\frac{P_s}{\rho} + \frac{{v_s}^2}{2} + g z_s\right) - \left(\frac{P_e}{\rho} + \frac{{v_e}^2}{2} + g z_e\right) = w_i - g\,\Delta h^\star \,.$$
>
> ▷ *Écriture homogène à une pression :*
>
> $$\left(P_s + \frac{1}{2}\rho {v_s}^2 + \rho g z_s\right) - \left(P_e + \frac{1}{2}\rho {v_e}^2 + \rho g z_e\right) = \rho w_i - \Delta p^\star \,.$$
>
> ▷ *etc.*

Exercice 1 : Écritures du théorème de Bernoulli

1 | 0 |

▷ *Homogénéité.*

Parmi les écritures ci-dessous du théorème de Bernoulli, indiquer lesquelles sont justes, lesquelles sont fausses, et pourquoi. Pour chaque écriture juste, préciser sa dimension (pression, énergie massique, puissance, etc.). On note les pertes de charge $\Delta p > 0$ (homogène à une pression) ou $\Delta h > 0$ (homogène à une hauteur).

1 - $\dfrac{p_\mathrm{s}}{\rho} + \dfrac{1}{2}v_\mathrm{s}^2 + gz_\mathrm{s} = \dfrac{p_\mathrm{e}}{\rho} + \dfrac{1}{2}v_\mathrm{e}^2 + gz_\mathrm{e}$

2 - $p_\mathrm{s} + \dfrac{1}{2}\rho v_\mathrm{s}^2 + gz_\mathrm{s} = p_\mathrm{e} + \dfrac{1}{2}\rho v_\mathrm{e}^2 + gz_\mathrm{e}$

3 - $\left(\dfrac{p_\mathrm{s}}{\rho} + \dfrac{1}{2}v_\mathrm{s}^2 + gz_\mathrm{s}\right) - \left(\dfrac{p_\mathrm{e}}{\rho} + \dfrac{1}{2}v_\mathrm{e}^2 + gz_\mathrm{e}\right) = -\Delta p$

4 - $D_\mathrm{m}\left(\dfrac{p_\mathrm{s}}{\rho} + \dfrac{1}{2}v_\mathrm{s}^2 + gz_\mathrm{s}\right) - D_\mathrm{m}\left(\dfrac{p_\mathrm{e}}{\rho} + \dfrac{1}{2}v_\mathrm{e}^2 + gz_\mathrm{e}\right) = \mathcal{P}_\mathrm{i}$

5 - $\left(\dfrac{p_\mathrm{s}}{\rho} + \dfrac{1}{2}v_\mathrm{s}^2 + gz_\mathrm{s}\right) - \left(\dfrac{p_\mathrm{e}}{\rho} + \dfrac{1}{2}v_\mathrm{e}^2 + gz_\mathrm{e}\right) = -g\,\Delta h$

6 - $\left(\dfrac{p_\mathrm{s}}{\rho} + \dfrac{1}{2}v_\mathrm{s}^2 + z_\mathrm{s}\right) - \left(\dfrac{p_\mathrm{e}}{\rho} + \dfrac{1}{2}v_\mathrm{e}^2 + z_\mathrm{e}\right) = w_\mathrm{i}$

7 - $D_\mathrm{m}\left(\dfrac{p_\mathrm{s}}{\rho} + \dfrac{1}{2}v_\mathrm{s}^2 + gz_\mathrm{s}\right) - D_\mathrm{m}\left(\dfrac{p_\mathrm{e}}{\rho} + \dfrac{1}{2}v_\mathrm{e}^2 + gz_\mathrm{e}\right) = w_\mathrm{i}$

8 - $\left(\dfrac{p_\mathrm{s}}{\rho g} + \dfrac{v_\mathrm{s}^2}{2g} + z_\mathrm{s}\right) - \left(\dfrac{p_\mathrm{e}}{\rho g} + \dfrac{v_\mathrm{e}^2}{2g} + z_\mathrm{e}\right) = -\Delta h$

9 - $D_\mathrm{m}\left(\dfrac{p_\mathrm{s}}{\rho} + \dfrac{1}{2}v_\mathrm{s}^2 + gz_\mathrm{s}\right) - D_\mathrm{m}\left(\dfrac{p_\mathrm{e}}{\rho} + \dfrac{1}{2}v_\mathrm{e}^2 + gz_\mathrm{e}\right) = D_\mathrm{m} g\,\Delta h$

10 - $D_V\left(p_\mathrm{s} + \dfrac{1}{2}\rho v_\mathrm{s}^2 + \rho g z_\mathrm{s}\right) - D_V\left(p_\mathrm{e} + \dfrac{1}{2}\rho v_\mathrm{e}^2 + \rho g z_\mathrm{e}\right) = \mathcal{P}_\mathrm{i} - D_V\,\Delta p$

11 - $\left(p_\mathrm{s} + \dfrac{1}{2}\rho v_\mathrm{s}^2 + \rho g z_\mathrm{s}\right) - \left(p_\mathrm{e} + \dfrac{1}{2}\rho v_\mathrm{e}^2 + \rho g z_\mathrm{e}\right) = \rho w_\mathrm{i}$

Exercice 2 : Débitmètre de Venturi

1 | 1

▷ *Écoulement parfait.*

Un débitmètre de Venturi est un dispositif, représenté figure 1, qui permet de mesurer le débit d'un écoulement permanent incompressible dans une conduite. Il s'agit d'imposer un rétrécissement de section et de mesurer grâce à un manomètre différentiel la différence de pression entre deux prises de pression placées en amont et au cœur du resserrement de section.

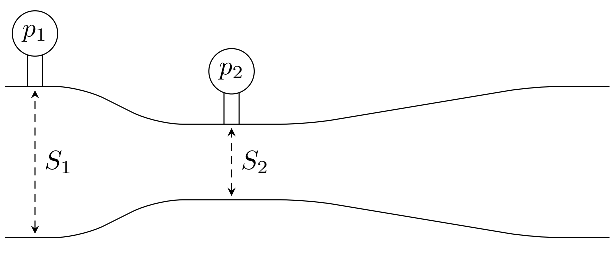


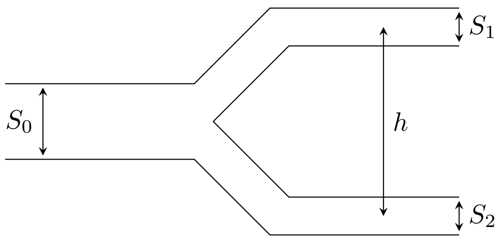
Figure 1 – Débitmètre de Venturi.

1 - Comment évolue la vitesse débitante entre les deux sections S_1 et S_2 où sont placées les prises de pression ? En déduire le signe de $\Delta p = p_1 - p_2$.

2 - Exprimer le débit volumique dans la conduite en fonction notamment de Δp et du rapport des sections.

Exercice 3 : Fourche hydraulique 2 | 1

- *Système à plusieurs sorties ;*
- *Écoulement parfait.*

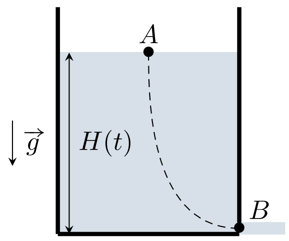


On considère une conduite d'eau avec un Y de séparation telle que $S_1 = S_2 = S_0/2$. Le système n'est pas horizontal : on note h la dénivellation entre les deux sorties, supposées toutes les deux à l'air libre.

Exprimer les vitesses v_1 et v_2 en fonction de h et de la vitesse d'entrée v_0.

Exercice 4 : Formule de Torricelli 2 | 2 |

- *Écoulement parfait ;*
- *Conservation du volume ;*
- *Intégration par séparation de variables.*



Soit un réservoir cylindrique de section S, initialement rempli d'eau avec une hauteur H_0. On perce au point B, au fond de ce réservoir, un orifice de section $s \ll S$, par lequel il se vide. On suppose étudier la vidange dans une approximation de régime quasi-stationnaire.

1 - Montrer que $v_B \gg v_A$.

2 - En appliquant la relation de Bernoulli, montrer que le débit volumique sortant du cylindre s'exprime par $D_V = s\sqrt{2gH(t)}$. Cette relation est appelée « relation de Torricelli », publiée [1] par Evangelista Torricelli en 1644 en conclusion ses travaux pour les fontainiers de Florence. Torricelli est également connu pour l'invention du baromètre.

3 - En exploitant la conservation du volume, établir l'équation différentielle en $H(t)$ qui régit la vidange du réservoir.

4 - En déduire le temps T nécessaire pour vider intégralement le réservoir.

5 - En fonction de la façon dont l'orifice est percé, on peut observer des écarts significatifs aux relations établies précédemment. Quelle peut en être l'origine ?

Exercice 5 : Vase de Mariotte oral banque PT | 2 | 3

- *Écoulement parfait ;*
- *Conservation de la masse ;*
- *Intégration par séparation de variables.*

On remplit à ras bord un réservoir de hauteur H et de section S (dispositif ① sur la figure 2) avec de l'eau de masse volumique ρ. L'eau s'écoule dans une conduite de section $s \ll S$ puis tombe dans un bécher initialement vide placé sur une balance. La pression extérieure $P_0 = 1\,\text{bar}$.

1 - Rappeler la relation de Bernoulli et ses hypothèses d'application.

2 - Déterminer le débit D_1 du fluide en sortie du tuyau, puis la masse $m_1(t)$ contenue dans le bécher au cours du temps.

On considère maintenant le dispositif ② de la figure 2. Le réservoir est fermé, mais un tuyau permet l'entrée d'air.

3 - Expliquer qualitativement pourquoi le mouvement du fluide est inchangé. On pourra penser à montrer qu'en régime permanent la pression à la base du tuyau est environ égale à la pression atmosphérique.

4 - On constate expérimentalement que $m_2(t) = at$. Expliquer.

5 - Que se passe-t-il lorsque le bas de l'arrivée d'air se retrouve émergée ?

1. Mais sans doute établie par d'autres quelques années auparavant ...

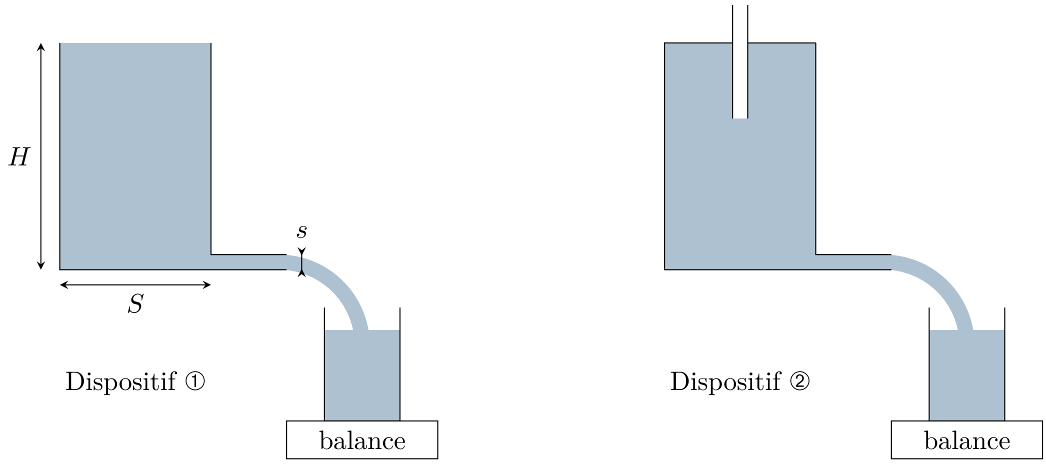


Figure 2 – Vase de Mariotte.

Exercice 6 : Sonde de Pitot moyennée

3 | 1

- *Analyse d'un document vidéo ;*
- *Écoulement parfait ;*
- *Théorème de Bernoulli dans un écoulement externe.*

Les sondes de Pitot sont des capteurs de vitesse basés sur une mesure de pression différentielle. La vidéo (QR-code ci-contre) en présente une utilisation pour la mesure de d'écoulements industriels en conduite. On modélise une telle sonde par le dispositif présenté figure 3.

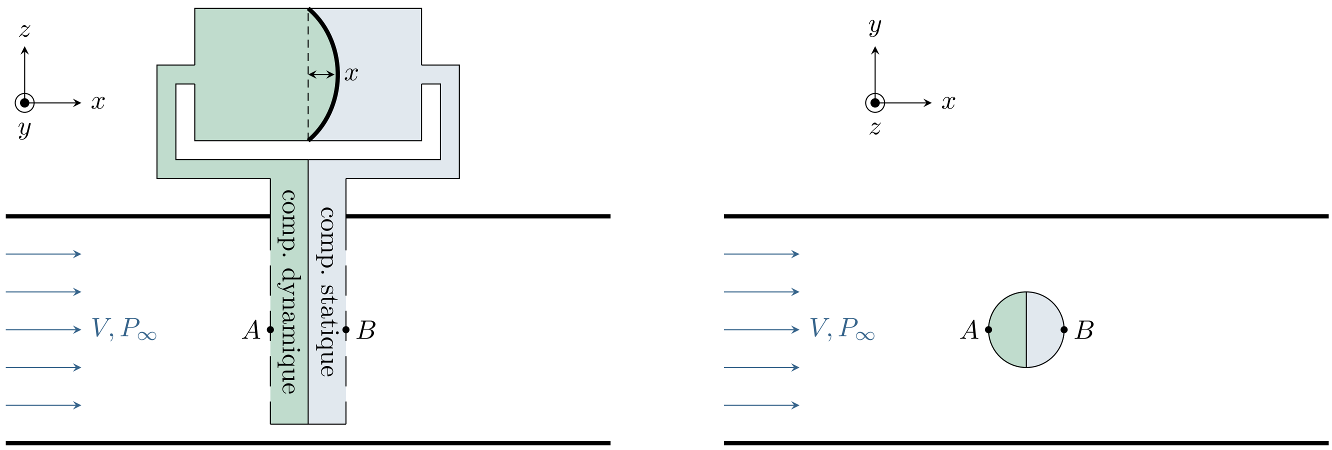


Figure 3 – Sonde de Pitot moyennée. Les deux compartiments de la sonde sont représentés en couleur pour mieux les visualiser, mais ils contiennent le même fluide que la conduite.

L'écoulement dans la conduite est supposé parfait, incompressible et stationnaire. On néglige les variations d'altitude dans la conduite et dans la sonde, si bien que la pression et la vitesse sont uniformes dans toute section de la conduite. On note V la vitesse débitante et P_∞ la pression dans l'écoulement loin de la sonde.

La membrane est de surface S supposée constante. Le décalage du centre de la membrane est noté x, et on admet que l'élasticité de la membrane tend à la ramener vers sa position de repos avec une force de rappel élastique linéaire $\vec{f} = -kx\,\vec{e}_x$.

1 - Citer quelques avantages des sondes de Pitot moyennées présentées dans la vidéo.

2 - Représenter en vue de dessus (schéma de droite de la figure 3) l'allure des lignes de courant de l'écoulement au voisinage de la sonde de Pitot.

3 - À partir du tracé précédent, justifier qualitativement que le point A est un point d'arrêt : $v_A = 0$. Exprimer la pression P_A en ce point.

4 - Justifier qualitativement qu'au point B, $v_B = 0$ et $P_B \simeq P_\infty$.

5 - Écrire la condition d'équilibre de la membrane.

6 - En déduire l'expression de la vitesse d'écoulement en fonction du déplacement de la membrane.

Exercice 7 : Château d'eau — écrit PT 2015 | 2 | 1

- *Pertes de charge ;*
- *Prise de pression hydrostatique (tubes piézométriques) ;*
- *Puissance indiquée.*

On s'intéresse à une alimentation domestique en eau via un château d'eau. Le château d'eau est modélisé par un réservoir ouvert sur l'atmosphère, haut de $H = 20\,\mathrm{m}$ et de section maximale $S_0 = 25\,\mathrm{m}^2$, voir figure 1. Ce réservoir débouche sur une canalisation horizontale de section $s = 1{,}0 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^2$. Cette canalisation alimente une installation domestique qui comporte un robinet ouvrant sur l'air atmosphérique par une ouverture de même section s.

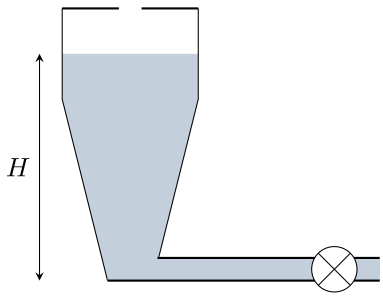


Figure 4 – **Schéma général.**

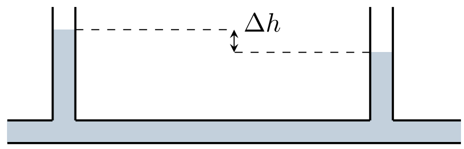


Figure 5 – **Mesure de perte de charge.**

1 - Justifier que la vitesse d'écoulement de l'eau au niveau de la surface libre est négligeable devant la vitesse dans la canalisation.

2 - Calculer numériquement la vitesse de l'eau en sortie du robinet en négligeant les pertes de charge.

3 - Calculer numériquement le débit volumique.

4 - La canalisation horizontale est le lieu d'une perte de charge régulière. Expliquer ce que cela signifie et en donner les causes. Exprimer le théorème de Bernoulli en introduisant un coefficient K caractéristique de cette perte de charge.

5 - Sur la canalisation horizontale on place deux tubes verticaux remplis d'eau séparés de $10\,\mathrm{m}$. On mesure une différence de hauteur d'eau $\Delta h = 2{,}0\,\mathrm{cm}$, voir figure 5. En déduire la perte de charge linéaire due au tuyau d'alimentation.

6 - Quelle est désormais la vitesse de l'eau en sortie du robinet situé à $1{,}0\,\mathrm{km}$ du chateau d'eau ?

7 - On souhaite retrouver la vitesse déterminée au début de l'exercice. On installe pour cela une pompe. Déterminer la puissance qu'elle doit fournir.

Exercice 8 : Alimentation d'un robinet par un récupérateur d'eau de pluie — 2 | 1

- *Pertes de charge et diagramme de Moody ;*
- *Puissance indiquée.*

Pour lutter contre la diminution des ressources en eau, une solution de plus en plus développée consiste à récupérer l'eau de pluie pendant la période hivernale, la stocker dans une cuve de récupération, et l'utiliser par exemple pour alimenter les chasses d'eau ou les robinets extérieurs. On dispose d'un récupérateur d'eau de pluie relié à un robinet extérieur par une conduite en PVC de diamètre $D = 15\,\mathrm{mm}$ et de longueur $L = 30\,\mathrm{m}$. Le robinet est situé à $h_1 = 1\,\mathrm{m}$ au dessus du sol. L'installation est équipée d'une pompe qui permet de garantir un débit suffisant pour remplir un arrosoir de $15\,\mathrm{L}$ en $30\,\mathrm{s}$. La cuve de récupération est enterrée dans le sol, sa sortie se trouvant à une profondeur $h_2 = 2{,}50\,\mathrm{m}$. Le niveau d'eau dans la cuve est égal à $H = 1{,}5\,\mathrm{m}$, le dessus de la cuve se trouvant porté à pression atmosphérique grâce à un regard.

On tient compte d'une perte de charge régulière dans la conduite, donnée par la perte de pression

$$\Delta p = \lambda \frac{\mu L V^2}{2D}\,.$$

Le coefficient de perte de charge λ dépend à la fois du nombre de Reynolds de l'écoulement et des rugosités, qui sont pour le PVC de hauteur caractéristique $e = 1{,}5\,\mu\text{m}$.

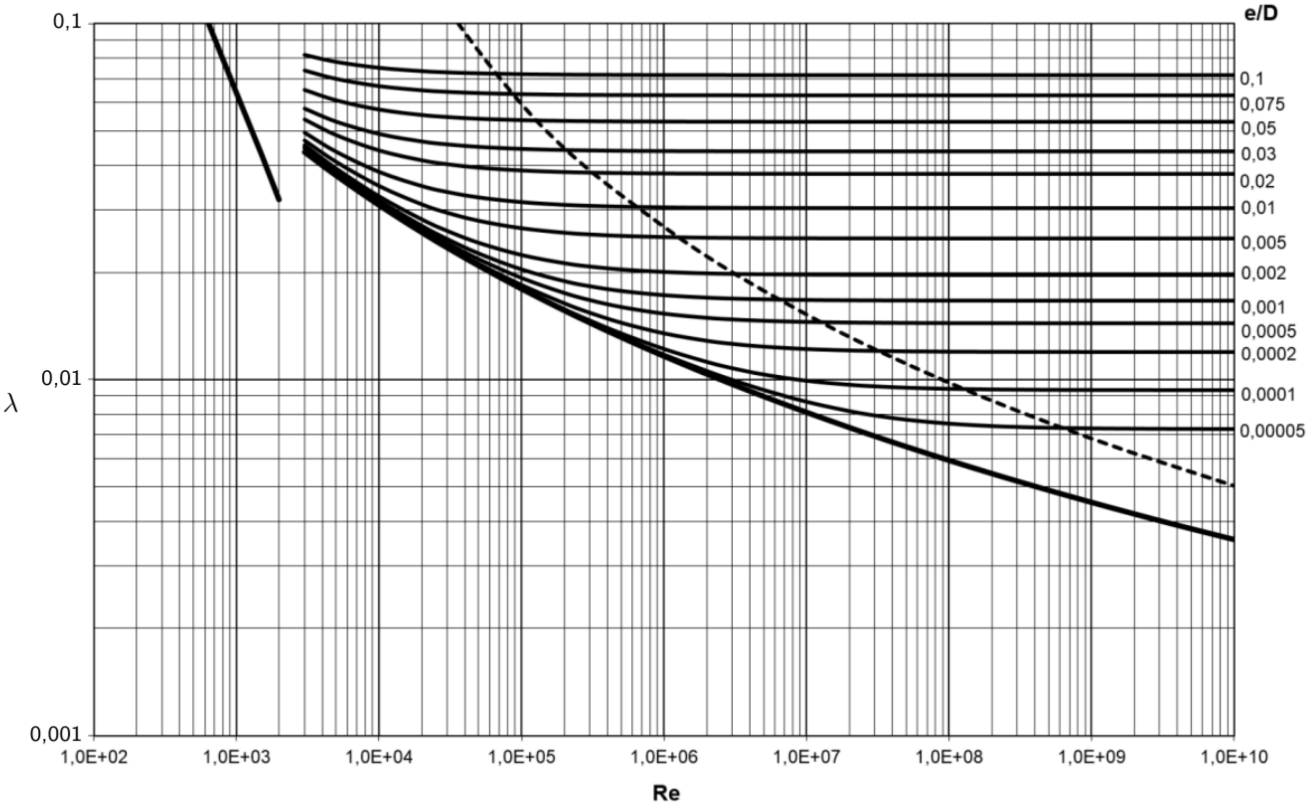


Figure 6 – **Abaque de Moody.**

1 - Calculer la vitesse débitante V dans la conduite et le nombre de Reynolds de l'écoulement, défini par

$$Re = \frac{\mu V D}{\eta}\,.$$

2 - En utilisant l'abaque donnée figure 6, déterminer le coefficient de perte de charge λ puis la valeur numérique de la chute de pression Δp.

3 - En déduire la puissance indiquée que la pompe doit fournir à l'eau pour maintenir le débit.

4 - La pompe a un rendement de 60 %, en déduire la puissance électrique consommée lorsque le robinet est ouvert.

5 - Les valeurs obtenues ici sont en fait sous-estimées. Quel phénomène négligé ici permet de l'expliquer ?

Données : masse volumique $\mu = 1{,}0 \cdot 10^3\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$; viscosité $\eta = 1{,}0 \cdot 10^{-3}\,\text{Pa}\cdot\text{s}$.

Exercice 9 : Écoulement cryogénique — oral banque PT | 💡 2 | ✂ 2

- ▷ *Calcul de débit par intégration ;*
- ▷ *Pertes de charge ;*
- ▷ *Puissance indiquée.*

On étudie une conduite cryogénique horizontale, parfaitement calorifugée, de rayon $R = 5\,\text{cm}$ et de longueur $L = 1\,\text{km}$. On y fait circuler de l'azote liquide à 77 K, de masse volumique $\rho = 8{,}0 \cdot 10^2\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ et de viscosité dynamique $\eta = 1{,}7 \cdot 10^{-4}\,\text{Pa}\cdot\text{s}$. Le débit volumique est $D_\text{v} = 10\,\text{L}\cdot\text{s}^{-1}$.

On note ΔP la différence de pression entre l'entrée et la sortie de la conduite. La vitesse du fluide dans la conduite dépend de la coordonnée radiale r selon

$$v(r) = \frac{\Delta P}{4\eta L}(R^2 - r^2)\,.$$

1 - Représenter le profil de vitesse et en déduire la nature de l'écoulement.

2 - Calculer le débit massique D_m et l'exprimer en fonction notamment de ΔP.

3 - Calculer la perte de charge ΔP_c dans la conduite. Que serait-elle si la conduite était verticale ?

4 - Déterminer la puissance $\mathcal{P}$ à fournir pour compenser cette perte de charge.

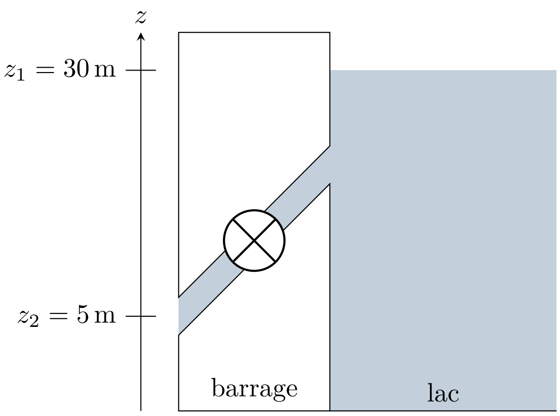
On remplace l'azote par de l'hélium superfluide, de viscosité nulle, c'est-à-dire tel que la vitesse de l'écoulement est uniforme sur toute section de la conduite.

5 - Quelle conséquence cela a-t-il sur la puissance à fournir ? Commenter.

> *Il y a en fait une incohérence dans l'énoncé : avec les valeurs proposées, le nombre de Reynolds est trop grand pour que l'écoulement soit laminaire et le profil de vitesse parabolique ne peut pas décrire l'écoulement. Plus généralement, de nombreux écoulements industriels sont turbulents et ceux qui peuvent être décrits par le profil de Poiseuille sont assez rares. Cela n'empêche pas de faire l'exercice, mais les applications numériques manquent de pertinence.*

Exercice 10 : Production d'énergie hydroélectrique — oral banque PT | 2 | 2 |

▷ *Puissance indiquée ;*
▷ *Pertes de charge.*



L'eau d'un lac de retenue d'un barrage s'écoule par une conduite où se trouve une turbine. La conduite a un diamètre de sortie $D = 2{,}5\,\mathrm{m}$ et le débit volumique vaut $Q_\mathrm{vol} = 25\,\mathrm{m^3 \cdot s^{-1}}$.

1 - Définir physiquement la notion de débit volumique.

2 - Donner sans calcul la vitesse à la surface du lac. Calculer la vitesse en sortie de la conduite.

3 - En appliquant la relation de Bernoulli, calculer la puissance maximale disponible sur la turbine.

4 - Le rendement est en pratique de 60 %, ce qui donne une puissance en sortie de turbine de 3,5 MW. Commenter les écarts et quantifier ce phénomène.