



# Statique des fluides

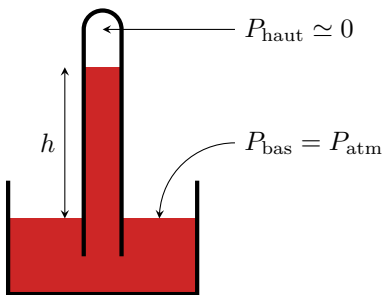
## Relation de l'hydrostatique

### Exercice 1 : Blaise Pascal à Rouen

💡 2 | ✂️ 0



▷ Relation de l'hydrostatique.



1 La relation de l'hydrostatique entre le haut et le bas de la colonne donne

$$P_{\text{haut}} + \rho gh = P_{\text{bas}} \quad \text{soit} \quad \rho gh = P_{\text{atm}}$$

On en déduit la hauteur de la colonne,

$$h = \frac{P_{\text{atm}}}{\rho g} \simeq 10 \text{ m},$$

ce qui est conforme à l'observation de Blaise Pascal.

2 Il n'y a en réalité pas de vide en haut de la colonne : le bouillonnement est dû à la vaporisation du vin lorsque la pression en haut de colonne devient inférieure à sa pression de vapeur saturante. La chambre barométrique contient donc du vin à l'état de vapeur, et pas du vide.

3 Supposons le tonneau suffisamment petit pour que la pression  $y$  soit uniforme. Compte tenu des symétries, la force de pression  $y$  est nulle, mais sur un petit élément de surface  $dS$  du tonneau la force s'écrit

$$d\vec{F}_P = P dS \vec{n} = (P_{\text{atm}} + \rho_0 g H) dS \vec{n},$$

car toute l'eau contenue dans le tonneau se trouve sous une hauteur totale  $H$ . Lorsque la hauteur d'eau dans la colonne augmente, la pression peut suffisamment augmenter dans le tonneau pour lui faire dépasser sa limite de rupture et le faire exploser.

4 Si la même masse avait été versée dans un entonnoir bien plus large, la hauteur d'eau aurait été bien plus faible et le tonneau n'aurait pas risqué d'exploser.

↪ finalement, cette expérience montre que la pression ne dépend que de la hauteur d'eau, et pas du tout de la masse totale.

### Exercice 2 : Ressort et tube en U

oral banque PT | 💡 2 | ✂️ 2



▷ Lien entre mécanique des fluides et des solides ;  
▷ Relation de l'hydrostatique ;  
▷ Force exercée par un ressort.

Introduisons un axe  $z$  vertical ascendant dont l'origine est située à la position initiale du bouchon, représentée en pointillés sur la figure de l'énoncé.

1 Dans la situation initiale, les forces de pression exercées sur et sous le bouchon se compensent. Le bouchon n'est donc soumis qu'à son poids et à la force de rappel du ressort, qui se compensent à l'équilibre,

$$m\vec{g} - k \Delta\ell_0 (-\vec{u}_z) = \vec{0} \quad \text{d'où} \quad \Delta\ell_0 = \frac{mg}{k}.$$

La force de rappel d'un ressort s'écrit de façon tout à fait générale

$$\vec{F}_r = -k \Delta \ell \vec{u}_{\text{sortant}}$$

où  $\vec{u}_{\text{sortant}}$  est le vecteur sortant du ressort, c'est-à-dire dirigé du ressort vers le bouchon au niveau du point d'attache : ici, le bouchon est sous le ressort et l'axe  $z$  orienté vers le haut, donc  $\vec{u}_{\text{sortant}} = -\vec{u}_z$ .

Cette expression est à connaître et à utiliser telle quelle, avant de d'exprimer  $\Delta \ell$  et  $\vec{u}_{\text{sortant}}$  en fonction du système de coordonnées choisi et de l'orientation des axes. Surtout, **surtout**, **SURTOUT** on n'essaye **pas** d'avoir l'air intelligent en devinant les signes à partir d'un schéma : le sens de la force change si le ressort est comprimé ou étiré, et il est quasiment impossible de s'en tirer sans erreur.

**2** Les forces de pression ne se compensent plus : le bouchon subit sur la face supérieure une force  $P_{\text{atm}} S(-\vec{u}_z)$  orientée vers le bas, et sur la face inférieure une force  $PS\vec{u}_z$  orientée vers le haut. Par ailleurs, l'allongement du ressort est plus faible que précédemment et vaut désormais  $\Delta \ell_0 - \Delta z$ .

On ne connaît donc pas le signe de l'allongement, si bien qu'on ne connaît pas le sens de la force exercée par le ressort ... mais heureusement cela ne nous empêche pas de connaître parfaitement son expression !

L'équation d'équilibre devient donc en projetant

$$-mg + k(\Delta \ell_0 - \Delta z) - P_{\text{atm}}S + PS = 0.$$

**3** La seule inconnue dans l'équation précédente est la pression  $P$ , que l'on va relier à  $\rho$  par la loi de l'hydrostatique. Pour ce faire, le plus simple est d'exprimer la pression  $P_0$  en  $z = 0$  (c'est-à-dire au niveau de la ligne pointillée) en raisonnant sur les deux branches,

$$P_0 = P_{\text{atm}} + \rho gh = P + \rho g \Delta z,$$

ce qui conduit à

$$P = P_{\text{atm}} + \rho g(h - \Delta z).$$

De la question précédente on déduit alors

$$-mg + k(\Delta \ell_0 - \Delta z) - P_{\text{atm}}S + (P_{\text{atm}} + \rho g(h - \Delta z))S = 0$$

$$\text{soit} \quad -mg + k(\Delta \ell_0 - \Delta z) + \rho g(h - \Delta z)S = 0$$

$$\text{et ainsi} \quad \rho g(h - \Delta z)S = mg - k(\Delta \ell_0 - \Delta z).$$

En remplaçant  $\Delta \ell_0$  par son expression, il vient

$$\rho g(h - \Delta z)S = k \Delta z$$

et finalement

$$\rho = \frac{k \Delta z}{g(h - \Delta z)S}.$$

**4** La section vaut  $S = \pi d^2/4$ . Numériquement,

$$\rho = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3},$$

c'est donc de l'eau qui a été ajoutée dans le tube.

## Résultante des forces pressantes

### Exercice 3 : Force de pression sur un tube à essais

oral banque PT | 💡 2 | ✂ 2 | ⊕



- ▷ Relation de l'hydrostatique ;
- ▷ Résultante des forces de pression ;
- ▷ Intégration par découpage mésoscopique.

1 Comme l'axe ( $Oz$ ) est orienté vers le bas, alors le champ de pression hydrostatique dans un fluide incompressible s'écrit

$$P(z) = -\rho g z + A \quad \text{avec} \quad A = \text{cte.}$$

En notant  $P_0$  la pression atmosphérique,

$$P(z=H) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CL}}}{=} P_0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{expr}}}{=} -\rho g H + A \quad \text{d'où} \quad A = P_0 + \rho g H,$$

d'où on conclut

$$P(z) = P_0 + \rho g(H - z).$$

2 La force de pression subie par une surface élémentaire du tube centrée sur un point  $M$  est dirigée selon la normale sortante au tube et ne dépend que de la profondeur  $z$  du point  $M$ . On raisonne sur la figure 1.

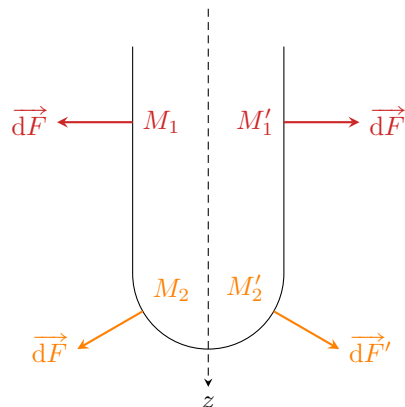


Figure 1 – Direction des forces de pression au sein du tube à essais.

- **Portion cylindrique** : raisonnons temporairement en coordonnées **cylindriques**. La force de pression est en tout point  $M$  dirigée par  $\vec{e}_r$ . Ainsi, pour deux points  $M_1$  et  $M'_1$  situés à la surface du tube à une même profondeur  $z$  mais à deux angles  $\theta$  et  $\theta' = \theta + \pi$ , la force a même norme mais sens opposé. Ce raisonnement étant valable pour chaque point de la surface du tube, on en déduit que la résultante des forces de pression sur la portion cylindrique est nulle.

- **Portion hémisphérique** : raisonnons maintenant en coordonnées **sphériques**, ce qui change la définition de l'angle  $\theta$ . La force de pression est en tout point  $M$  encore une fois dirigée par  $\vec{e}_r$  ... mais comme le système de coordonnées n'est plus le même, ce n'est plus le même vecteur. Ainsi, pour deux points  $M_2$  et  $M'_2$  situés à la surface du tube à une même profondeur  $z$  mais à deux angles  $\varphi$  et  $\varphi' = \varphi + \pi$ , il y a une compensation des composantes horizontales, alors que les composantes verticales (selon  $\vec{e}_z$ ) s'ajoutent. Ce raisonnement étant valable pour chaque point de la surface du tube, on en déduit que la résultante des forces de pression sur la portion hémisphérique est dirigée selon  $\vec{e}_z$ .

- **Conclusion** : la résultante des forces de pression subie par le tube est dirigée selon  $\vec{e}_z$ .

3 Il est suffisant de s'intéresser au fond du tube en raisonnant en coordonnées sphériques. Une élément de surface  $dS$  de normale  $\vec{e}_r$  subit la force pressante exercée par l'eau, de pression  $P(z)$ , et la force pressante exercée par l'air, de pression uniforme  $P_0$  et de sens opposé à la précédente. Ainsi,

$$\vec{dF} = (P(z) - P_0) dS \vec{e}_r$$

d'où on déduit

$$\begin{aligned} dF_z &= (P(z) - P_0) dS \vec{e}_r \cdot \vec{e}_z \\ &= \rho g(H - z) \cos \theta dS \\ &= \rho g(H - R \cos \theta) \cos \theta dS \end{aligned} \quad (1)$$

• **Première méthode : découpage mésoscopique.**

Cette force est uniforme en tout point d'une couronne sphérique comprise entre les angles  $\theta$  et  $\theta + d\theta$ . La résultante sur cette couronne, dont la surface  $dS_c$  est donnée, vaut donc

$$dF_{z,c} = \rho g(H - R \cos \theta) \cos \theta dS_c = \rho g(H - R \cos \theta) \cos \theta \times 2\pi R^2 \sin \theta d\theta$$

En sommant ces forces pour chacune des couronnes élémentaires,  $\theta$  allant de 0 à  $\pi/2$ , on en déduit

$$\begin{aligned} F_z &= 2\pi R^2 \rho g \int_0^{\pi/2} (H - R \cos \theta) \cos \theta \sin \theta d\theta \\ &= 2\pi R^2 H \rho g \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta - 2\pi R^3 \rho g \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \\ &= 2\pi R^2 H \rho g \times \left( -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) - 2\pi R^3 \rho g \left( -\frac{0^3}{3} + \frac{1^3}{3} \right) \\ &= \pi R^2 H \rho g - \frac{2\pi}{3} R^3 \rho g \\ F_z &= \pi R^2 \rho g \left( H - \frac{2}{3} R \right) \end{aligned}$$

ce qui conduit en fin de compte à

$$\vec{F} = \pi R^2 \rho g \left( H - \frac{2}{3} R \right) \vec{e}_z.$$

On constate que la force subie par le tube est la même que s'il avait un fond plat sous une hauteur d'eau  $H - 2R/3$ .

• **Deuxième méthode : expression de la surface élémentaire en coordonnées sphériques.**

Le vecteur déplacement élémentaire a pour expression en coordonnées sphériques

$$d\vec{M} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{e}_\varphi$$

et comme la surface élémentaire considérée est de normale  $\vec{e}_r$  et de rayon  $r = R$  alors sa surface est

$$dS = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi.$$

La surface  $dS$  intervenant dans l'équation (1) est quelconque, on peut donc réutiliser directement l'expression de  $dF_z$  pour sommer :

$$\begin{aligned} F_z &= \iint \rho g(H - R \cos \theta) \cos \theta dS \\ &= \iint \rho g(H - R \cos \theta) \cos \theta R^2 \sin \theta d\theta d\varphi \\ &= R^2 \rho g \times \int_0^{\pi/2} (H - R \cos \theta) \cos \theta \sin \theta d\theta \times \int_0^{2\pi} d\varphi \\ F_z &= 2\pi R^2 \rho g \int_0^{\pi/2} (H - R \cos \theta) \cos \theta \sin \theta d\theta \end{aligned}$$

ce qui nous ramène exactement au cas précédent.

*Bien qu'étant sans doute plus rassurante car plus automatique, le fait que l'énoncé fournisse l'aire d'une couronne sphérique montre clairement que ce n'est pas la seconde méthode qu'il faut privilégier.*

**Exercice 4 : Entonnoir retourné**

- ▷ Résultante des forces de pression.
- ▷ Intégration en coordonnées sphériques.

**1** L'entonnoir est soumis à quatre forces : son poids, la force de réaction de la table (qui s'annule à la limite du soulèvement), la force de pression exercée par l'air et celle exercée par l'eau. L'entonnoir se soulève lorsque la force de pression exercée par l'eau devient suffisante pour compenser le poids et la force exercée par l'air. Or si on suppose la pression partout égale à  $P_0$  dans l'eau, les deux forces pressantes de l'air et de l'eau sont égales et le poids ne peut jamais être compensé. Il faut donc traduire le fait que la pression est supérieure dans l'eau que dans l'air.

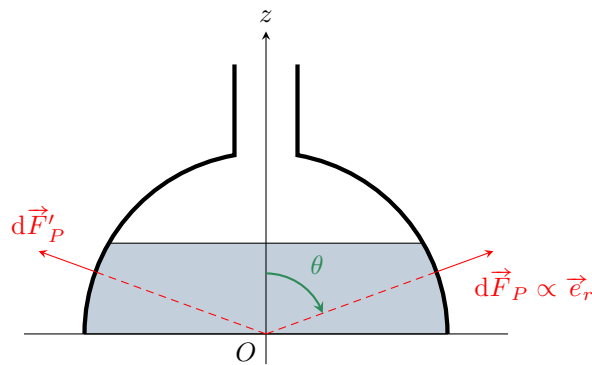
Le champ de pression est donné par la loi de l'hydrostatique. L'axe  $z$  étant vers le haut,

$$\frac{dP}{dz} = -\mu_0 g \quad \text{soit} \quad \int_{P_0}^{P(z)} dP = -\mu_0 g \int_h^z dz$$

si bien que

$$P(z) = P_0 - \mu_0 g(z - h) = P_0 + \mu_0 g(h - z).$$

**2** On raisonne en coordonnées sphériques de centre  $O$  au fond de l'entonnoir. Tout plan contenant l'axe ( $Oz$ ) est plan de symétrie du système. En deux points  $M$  et  $M'$  de l'entonnoir symétriques par rapport à ce plan, voir figure 2, les composantes  $z$  de la force de pression (radiale) s'ajoutent et les autres se compensent. La force pressante exercée par l'eau sur l'entonnoir est donc dirigée selon  $\vec{e}_z$ .



**Figure 2 – Direction de la force subie par l'entonnoir.**

*Attention dans le calcul aux très nombreux pièges qui viennent de la définition de l'angle  $\theta$  en sphériques. Dès que vous utilisez ces coordonnées dans un calcul un peu compliqué, je vous recommande de refaire au brouillon le schéma « de base » des coordonnées et de la base locale, à retrouver dans la fiche outils d'analyse vectorielle.*

Autour du point  $M$ , l'élément mésoscopique qui subit la force pressante est de normale  $\vec{e}_r$  et donc de surface  $dS = R d\theta \times R \sin \theta d\varphi$ . La composante utile de la force infinitésimale qu'il subit est donc

$$\begin{aligned} dF_{P,z} &= P(z) \times R^2 \sin \theta d\theta d\varphi \times \vec{e}_r \cdot \vec{e}_z \\ &= \mu_0 g(h - R \cos \theta) \times R^2 \sin \theta d\theta d\varphi \times \cos \theta \end{aligned}$$

Le terme en  $P_0$  disparaît car il se compense entre l'air et l'eau. L'angle  $\theta$  est compris entre  $\theta_h$  tel que  $\cos \theta_h = h/R$  et  $\pi/2$ . La résultante s'écrit donc

$$\begin{aligned} F_z &= \mu_0 g R^2 \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{\theta=\theta_h}^{\theta=\pi/2} (h - R \cos \theta) \sin \theta \cos \theta d\theta d\varphi \\ &= \mu_0 g R^2 \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} d\varphi \int_{\theta=\theta_h}^{\theta=\pi/2} (h - R \cos \theta) \sin \theta \cos \theta d\theta \end{aligned}$$

Le plus simple pour calculer l'intégrale en  $\theta$  est de poser  $X = \cos \theta$  et donc  $dX = -\sin \theta d\theta$ , le signe permettant d'inverser les bornes

$$F_z = \mu_0 g R^2 \times 2\pi \times \int_{X_{\pi/2}=0}^{X_h=h/R} (h - RX) X dX.$$

Pour procéder à un changement de variable dans les différentielles (c'est-à-dire dans les éléments infinitésimaux), il est en général plus naturel de commencer par calculer la dérivée puis de la traiter comme une fraction de différentielle :

$$\frac{dX}{d\theta} = -\sin \theta \quad \text{donc} \quad dX = -\sin \theta d\theta.$$

Le calcul de l'intégrale conduit alors à

$$F_z = 2\pi \mu_0 g R^2 \left[ \frac{hX^2}{2} - \frac{RX^3}{3} \right]_0^{h/R} = 2\pi \mu_0 g R^2 \left( \frac{h^3}{2R^2} - \frac{Rh^3}{3R^3} \right)$$

et finalement

$$\vec{F} = \pi \mu_0 g \frac{h^3}{3} \vec{e}_z.$$

**3** Lorsque  $h = h_c$ , la force  $\vec{F}$  devient suffisante pour compenser à elle seule le poids de l'entonnoir, soit

$$\pi \mu_0 g \frac{h_c^3}{3} = mg \quad \text{d'où} \quad h_c = \sqrt[3]{\frac{3m}{\pi \mu_0}}$$

Pour un entonnoir de 100 g, on obtient  $h_c \simeq 5$  cm : l'expérience est parfaitement réalisable !

## Exercice 5 : Aquarium

💡 3 | ✂ 2



- ▷ Relation de l'hydrostatique.
- ▷ Résultante des forces de pression.
- ▷ Intégration par découpage mésoscopique.

**1** L'axe ( $Oz$ ) est ascendant et l'eau est un liquide incompressible de masse volumique  $\rho$ , donc le champ de pression est donné par

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g \quad \text{soit} \quad \int_{P_0}^{P(z)} dP = -\rho g \int_H^z dz$$

si bien que

$$P(z) = P_0 - \rho g(z - H) = P_0 + \rho g(H - z).$$

**2** De la trigonométrie élémentaire donne

$$z = R \sin \alpha.$$

On a donc

$$\frac{dz}{d\alpha} = R \cos \alpha \quad \text{d'où} \quad dz = R \cos \alpha d\alpha.$$

Pour procéder à un changement de variable dans les différentielles (c'est-à-dire dans les éléments infinitésimaux), il est en général plus naturel de commencer par calculer la dérivée puis de la traiter comme une fraction de différentielle.

**3** On assimile la portion de hublot à un rectangle de côtés  $2R \cos \alpha$  et  $dz$ , voir figure 3. Sa surface vaut donc

$$dS = 2R \cos \alpha \times dz = 2R \cos \alpha \times R \cos \alpha d\alpha \quad \text{soit} \quad dS = 2R^2 \cos^2 \alpha d\alpha.$$

**4** Notons  $\vec{n}$  le vecteur unitaire normal au hublot dirigé de l'eau vers l'air. La bande de hublot comprise entre les ordonnées  $z$  et  $z + dz$  subit côté air une force  $-P_0 dS \vec{n}$  et côté eau une force  $+P(z) dS \vec{n}$ . La résultante de ces forces s'écrit

$$\vec{dF}(z) = (P(z) - P_0) dS \vec{n} = \rho g(H - z) dS \vec{n}.$$

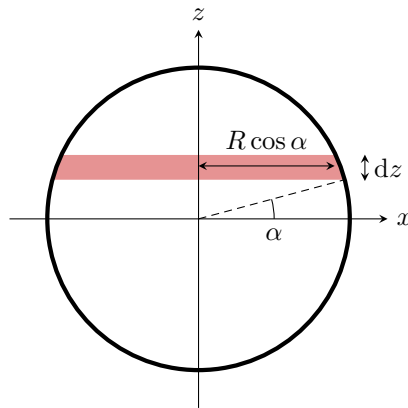


Figure 3 – Découpage mésoscopique du hublot.


En privilégiant la variable  $\alpha$ , on en déduit

$$\begin{aligned}
 \vec{F} &= \int_{-R}^R d\vec{F}(z) \\
 &= \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \rho g (H - R \sin \alpha) \times 2R^2 \cos^2 \alpha d\alpha \vec{n} \\
 &= 2\rho g H R^2 \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos^2 \alpha d\alpha \vec{n} - 2\rho g R^3 \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \sin \alpha \cos^2 \alpha d\alpha \vec{n} \\
 &= 2\rho g H R^2 \times \frac{\pi}{2} \vec{n} + \vec{0} \\
 \boxed{\vec{F}} &= \pi \rho g H R^2 \vec{n}
 \end{aligned}$$

**5** L'expression de la force s'avère être identique à celle qu'on aurait obtenue si le hublot était soumis à une pression uniforme, égale à la pression au centre. Cela peut se comprendre par symétrie : une bande mésoscopique de hublot située à  $z > 0$  subit un écart de pression  $-\rho g z$  par rapport à la bande centrale ... mais la bande située en  $z' = -z$  subit un écart de pression opposé. Ces deux écarts se compensent donc lorsque l'on calcule la résultante.

### Exercice 6 : Oscillations d'un flotteur

oral ATS | 💡 1 | ✂ 2

- 
 ▷ Lien entre mécanique des fluides et des solides.  
 ▷ Résultante des forces de pression.  
 ▷ Oscillateur harmonique.

Dans tout l'exercice, on étudie le mouvement du cylindre dans le référentiel terrestre, supposé galiléen.

Deux approches sont possibles dans le bilan des forces :

- ▷ ou bien prise en compte explicite des forces de pression sur la face supérieure et inférieure du cylindre (il y a compensation par symétrie sur les faces latérales) ;
- ▷ ou bien prise en compte de la poussée d'Archimède.

⚠️ ⚠️ ⚠️ **Attention !** Ces deux approches sont incompatibles : la poussée d'Archimède, par définition, EST la résultante des forces de pression.

La pression dans l'eau est donnée par la loi de l'hydrostatique,

$$P(z) = P_{\text{atm}} + \rho_0 g z.$$

#### **1** Première approche : forces de pression.

Bilan des forces :

- ▷ Force de pression sur la face supérieure, supposée émergée :  $+P_{\text{atm}} S \vec{e}_z$  ;
- ▷ Force de pression sur la face inférieure, supposée immergée :  $-(P_{\text{atm}} + \rho_0 g z) S \vec{e}_z$  ;
- ▷ Poids du flotteur :  $\rho S H \vec{e}_z$ .

Le cylindre étant à l'équilibre ( $z = z_0 = \text{cte}$ ), d'après le théorème de la résultante cinétique projeté sur l'axe vertical,

$$0 = P_{\text{atm}}S - (P_{\text{atm}} + \rho_0 g z_0)S + \rho H S g \quad \text{soit} \quad 0 = -\rho_0 g z_0 S + \rho H S g \quad \text{d'où} \quad \boxed{z_0 = \frac{\rho}{\rho_0} H.}$$

### Deuxième approche : poussée d'Archimède.

Bilan des forces :

- ▷ Poussée d'Archimède : le volume de cylindre immergé dans l'eau vaut  $Sz$ , donc en négligeant l'effet de l'air la poussée d'Archimède s'écrit  $-\rho_0 Sz g \vec{e}_z$
- ▷ Poids du flotteur :  $\rho SH g \vec{e}_z$ .

Le TRC donne cette fois

$$0 = -\rho_0 S z_0 g + \rho SH g$$

ce qui est bien sûr la même équation que précédemment.

**2** On impose cette fois  $z = H$  car le cylindre est totalement immergé, mais il faut prendre en compte la force  $F$  exercée sur le flotteur dans le bilan des forces. Le TRC, toujours à l'équilibre, donne désormais

$$0 = -\rho_0 SH g + \rho SH g + F \quad \text{d'où} \quad \boxed{F = (\rho_0 - \rho)HSg.}$$

**3** Le TRC (cette fois hors équilibre) s'écrit

$$\rho HS \frac{d^2 z}{dt^2} = -\rho_0 Sz g + \rho SH g.$$

En introduisant  $\varepsilon$  via la relation  $z = z_0 + \varepsilon$  et en simplifiant avec l'expression de  $z_0$ , il vient

$$\rho HS \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} = -\rho_0 g S \varepsilon$$

et ainsi

$$\frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} + \frac{\rho_0 g}{\rho H} \varepsilon = 0.$$

On identifie l'équation du mouvement d'un oscillateur harmonique de pulsation propre


$$\omega_0^2 = \frac{\rho_0 g}{\rho H}$$

d'où on déduit la période

$$\boxed{T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\rho H}{\rho_0 g}}.}$$

## Exercice 7 : Plaque pivotante

oral banque PT | 💡 3 | ✂ 2

-  ▷ Lien entre mécanique des fluides et des solides.
- ▷ Résultante des forces de pression.
- ▷ Moment cinétique.

**1** La pression est donnée par la loi de l'hydrostatique. Comme l'axe ( $Oy$ ) est ascendant, elle s'écrit

$$\frac{dP}{dy} = -\rho g \quad \text{soit} \quad \int_{P_0}^{P(y)} dP = -\rho g \int_h^y dy$$

si bien que

$$\boxed{P(y) = P_0 - \rho g(y - h) = P_0 + \rho g(h - y).}$$

**2** La pression dans l'eau sur la plaque horizontale est uniforme et vaut

$$\boxed{P_h = P(y=0) = P_0 + \rho gh.}$$



Elle vaut simplement  $P_0$  côté air. La résultante des forces de pression s'en déduit directement

$$\vec{F}_h = -P_h ab \vec{e}_y + P_0 ab \vec{e}_y \quad \text{soit} \quad \boxed{\vec{F}_h = -\rho gh ab \vec{e}_y.}$$

Pour calculer le moment, on procède par découpage mésoscopique : on décompose la plaque horizontale en fines bandes de largeur  $dx$  et de longueur  $b$  dans la direction  $z$ . La force pressante sur chacune de ces bandes vaut

$$d\vec{F}_h = -\rho gh b dx \vec{e}_y$$

et son bras de levier autour de l'axe ( $Oz$ ) est simplement égal à l'abscisse  $x$  de la bande, d'où un moment résultant

$$d\mathcal{M}_h = -x \times \rho gh b dx$$

avec un signe  $-$  car la force tend à faire tourner les plaques dans le sens horaire autour de l'axe  $Oz$ . Le moment résultant s'obtient par sommation,

$$\mathcal{M}_h = \int_0^a -x \rho gh b dx = -\rho gh b \int_0^a x dx = -\rho gh b \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^a$$

et ainsi

$$\boxed{\mathcal{M}_h = -\rho gh \frac{ba^2}{2}.}$$

*Le résultat est ici identique à celui qu'on aurait obtenu en considérant que la force  $\vec{F}_h$  était appliquée au centre de la plaque. Cela est dû au fait que la pression est uniforme sur la plaque.*

**3** La pression sur la plaque horizontale est toujours uniformément égale à  $P_0$  côté air, mais elle n'est plus uniforme côté eau. Une bande verticale de plaque de hauteur  $dy$  située entre  $y$  et  $y + dy$  subit une force pressante égale à

$$d\vec{F}_v = -[P_0 + \rho g(h - y)] b dy \vec{e}_x + P_0 b dy \vec{e}_x = \rho g(y - h) b dy \vec{e}_x.$$

La résultante vaut donc

$$\vec{F}_v = \int_0^h \rho g(y - h) b dy \vec{e}_x = \rho gb \left[ \frac{y^2}{2} - hy \right]_0^h \vec{e}_x = \rho gb \left( \frac{h^2}{2} - h^2 \right) \vec{e}_x$$

soit

$$\boxed{\vec{F}_v = -\rho gb \frac{h^2}{2} \vec{e}_x.}$$

Le bras de levier de la force élémentaire  $d\vec{F}_v$  par rapport à l'axe ( $Oz$ ) est égal à  $y$ , et comme cette force tend à faire tourner la plaque dans le sens trigonométrique alors son moment vaut

$$d\mathcal{M}_v = +y \times \rho g(h - y) b dy, .$$

*Attention aux signes : dans le calcul du moment avec le bras de levier, c'est la norme de la force qui intervient, et ici  $h > y$ .*

Le moment résultant vaut

$$\mathcal{M}_v = \int_0^h y \rho g(h - y) b dy = \rho gb \int_0^h y(h - y) dy = \rho gb \left[ \frac{hy^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_0^h = \rho gb \left( \frac{h^3}{2} - \frac{h^3}{3} \right)$$

ce qui donne finalement

$$\boxed{\mathcal{M}_v = \rho gb \frac{h^3}{6}.}$$

**4** Il y a basculement de la plaque dès lors que le moment total des forces de pression autour de ( $Oz$ )  $\mathcal{M}_h + \mathcal{M}_v$  est positif ou nul, c'est-à-dire

$$-\rho gh \frac{ba^2}{2} + \rho gb \frac{h^3}{6} \geq 0 \quad \text{soit} \quad -\frac{a^2}{2} + \frac{h^2}{6} \geq 0$$

et on en déduit la condition de basculement

$$\boxed{h \geq h_0 = a\sqrt{3}.}$$

## Champ de pression

### Exercice 8 : Ballon sonde

inspiré oral banque PT | 💡 2 | ✂ 2 | ⚙



- ▷ Relation de la statique des fluides dans un gaz ;
- ▷ Intégration par séparation de variables ;
- ▷ Poussée d'Archimède.

1 Relation de la statique des fluides ( $z$  vers le haut) :

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g$$

Avec l'équation d'état des gaz parfaits,

$$PV = \frac{m}{M_a} RT \quad \text{d'où} \quad \rho = \frac{M_a P}{RT}$$

En séparant les variables,

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{M_a P}{RT} g \quad \text{soit} \quad \frac{dP}{P} = -\frac{M_a g}{RT_0} \frac{dz}{1 - \alpha z} = \frac{M_a g}{\alpha RT_0} \left( \frac{-\alpha dz}{1 - \alpha z} \right).$$

On intègre ensuite entre l'altitude 0 et l'altitude  $z$ , ce qui donne

$$\ln \frac{P(z)}{P_0} = \frac{M_a g}{\alpha RT_0} \ln \frac{1 - \alpha z}{1}$$

et on trouve enfin en prenant l'exponentielle

$$P(z) = P_0 (1 - \alpha z)^\beta \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{M_a g}{\alpha RT_0}.$$

2 D'après la question précédente, il vient directement

$$\rho(z) = \frac{M_a P(z)}{RT(z)} = \frac{M_a P_0}{RT_0} (1 - \alpha z)^{\beta-1}$$

3 L'hélium est en équilibre thermique et mécanique avec l'atmosphère, c'est-à-dire à même pression et température, donc la loi des gaz parfaits donne

$$n_{\text{He}} = \frac{P(z)V_0}{RT(z)} = \frac{P_0(1 - \alpha z)^\beta V_0}{RT_0(1 - \alpha z)} \quad \text{d'où} \quad m_{\text{He}} = \frac{P_0 V_0 M_{\text{He}}}{RT_0} (1 - \alpha z)^{\beta-1}.$$

4 Le ballon subit son poids  $m_0 \vec{g}$ , celui de la charge  $m \vec{g}$ , celui de l'hélium  $m_{\text{He}} \vec{g}$  et la poussée d'Archimède

$$\vec{\Pi}_A(z) = -\rho(z)V_0 \vec{g}.$$

La masse maximale qu'il peut emporter à l'altitude  $z$  se traduit par une condition d'équilibre : le ballon est immobile car trop lourd pour monter davantage. Ainsi, en projection sur  $\vec{e}_z$ ,

$$m_0 g + m_{\text{max}}(z) g + \frac{P_0 V_0 M_{\text{He}}}{RT_0} (1 - \alpha z)^{\beta-1} g - \frac{M_a P_0}{RT_0} (1 - \alpha z)^{\beta-1} V_0 g = 0$$

soit

$$m_0 + m_{\text{max}}(z) + \frac{P_0 V_0}{RT_0} (M_{\text{He}} - M_a) (1 - \alpha z)^{\beta-1} = 0$$

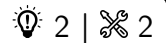
ou encore

$$m_{\text{max}}(z) = \frac{P_0 V_0}{RT_0} (M_a - M_{\text{He}}) (1 - \alpha z)^{\beta-1} - m_0.$$

5 Numériquement, pour  $T_0 = 15^\circ\text{C}$ , je trouve

$$m_{\text{max}}(z=0) = 34 \text{ kg} \quad \text{et} \quad m_{\text{max}}(z=10 \text{ km}) = 11 \text{ kg}.$$

## Exercice 9 : Température et pression au centre du Soleil



- ▷ Relation de la statique des fluides en trois dimensions.
- ▷ Intégration d'un gradient (dérivées partielles).

1 En coordonnées sphériques, la force de gravitation s'écrit

$$\vec{F}_g = -\mathcal{G} \frac{M_0 m}{r^2} \vec{u}_r.$$

Comme  $m = \mu V$ , on en déduit  $\vec{f}_g = \vec{F}_g/V$ ,

$$\vec{f}_g = -\mathcal{G} \frac{M_0 \mu}{r^2} \vec{u}_r.$$

2 Considérons une particule fluide au sein du Soleil, située à une distance  $r_0$  du centre. Comme le Soleil n'est pas ponctuel (...), les couronnes plus externes ( $r > r_0$ ) attirent la particule fluide vers l'extérieur et pas vers le centre. Si  $r_0 = 0$ , on comprend par symétrie que **la résultante de ces forces est nulle**, ce qui est bien cohérent avec l'expression proposée. Au contraire, si  $r = R_S$ , on retrouve la **même expression que pour un corps ponctuel**, ce qui est cohérent avec le théorème de Gauss gravitationnel (cf. cours d'électrostatique).

3 D'après la relation de la statique des fluides,

$$\vec{\text{grad}} p = -\mathcal{G} \frac{\mu M_S}{R_S^3} r \vec{u}_r.$$

### • Rédaction (trop) détaillée :

En projection sur  $\vec{u}_\varphi$ , l'équation donne

$$\frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{d'où} \quad p = F(r, \theta).$$

La pression est une « constante partielle » par rapport à  $\varphi$ , c'est-à-dire une fonction de  $r$  et  $\theta$  seulement.

En projection cette fois sur  $\vec{u}_\theta$ ,

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{\partial F}{\partial \theta} = 0 \quad \text{d'où} \quad p = G(r).$$

La pression n'est donc une fonction que de  $r$ , qui vérifie

$$\frac{dp}{dr} = -\mathcal{G} \frac{\mu M_S}{R_S^3} r.$$

### • Rédaction simple :

Par hypothèse de symétrie sphérique, la pression ne dépend que de  $r$ . Ainsi, en projetant sur  $\vec{u}_r$  on en déduit que  $p$  est solution de l'équation différentielle

$$\frac{dp}{dr} = -\mathcal{G} \frac{\mu M_S}{R_S^3} r.$$

Par intégration, la masse volumique  $\mu$  étant supposée uniforme,

$$p(r) = -\mathcal{G} \frac{\mu M_S}{R_S^3} \frac{r^2}{2} + \text{cte.}$$

En supposant nulle la pression en surface du soleil,

$$p(r=R_S) \underbrace{=}_{\text{CL}} 0 \underbrace{=}_{\text{sol}} -\mathcal{G} \frac{\mu M_S}{R_S^3} \frac{R_S^2}{2} + \text{cte}$$

d'où on déduit

$$p(r) = \mathcal{G} \frac{\mu M_S}{2 R_S^3} (R_S^2 - r^2).$$

Enfin, la masse volumique est donnée par

$$\mu = \frac{M_S}{\frac{4}{3}\pi R^3} = 4,8 \cdot 10^5 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

ce qui permet de remplacer

$$p(r) = \frac{2}{3} \mathcal{G} \mu^2 (R_S^2 - r^2).$$

4 Au centre du Soleil,

$$p(0) = \frac{2}{3} \mathcal{G} \mu^2 R_S^2 = 1,0 \cdot 10^{17} \text{ Pa}.$$

La température se déduit de l'équation d'état d'un gaz parfait,

$$p \frac{V}{m} = \frac{n}{m} RT \quad \text{soit} \quad T = \frac{Mp}{\mu R}.$$

La masse molaire moyenne du Soleil est donnée par  $M = 0,92 M_H + 0,08 M_{He} = 1,25 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$ , d'où

$$T(0) = \frac{Mp(0)}{\mu R} = 3 \cdot 10^7 \text{ K}.$$

Le modèle proposé donne des valeurs surestimées d'un facteur 2 ou 3, mais dont les ordres de grandeur sont malgré tout convenables compte tenu du modèle utilisé. En effet, les hypothèses de masse volumique uniforme et de gaz parfait semblent assez audacieuses.

### Exercice 10 : Modèle de Janssen d'un milieu granulaire

oral Centrale PSI | 💡 3 | ✂ 2



▷ Obtention d'une équation différentielle par découpage mésoscopique.

1 La définition de  $m_{\text{app}}$  peut se réécrire comme

$$m_{\text{app}} g = S(P(z=h) - P_{\text{atm}})$$

où  $S = \pi D^2/4$  est la surface du fond du cylindre.  $SP(h=0)$  est la force exercée au fond du cylindre, et  $SP_{\text{atm}}$  celle qui existe en l'absence de sable : la masse apparente  $m_{\text{app}}$  correspond donc à la masse équivalente qui exercerait la même force que le sable si elle y était posée. Si le sable se comportait exactement comme un solide,  $m_{\text{app}}$  correspondrait à la masse de sable déposée.

2 Raisonnons à hauteur  $h$  fixée. Dans un modèle de fluide en équilibre hydrostatique, la pression dépend de  $z$  descendant par

$$P(z) = A + \mu g z$$

avec  $A$  une constante qui se déduit de la condition limite,

$$P(z=0) \underbrace{=}_{\text{sol}} A \underbrace{=}_{\text{CL}} P_{\text{atm}} \quad \text{d'où} \quad A = P_{\text{atm}}.$$

Ainsi, au fond du cylindre en  $z = h$ ,

$$P(h) = P_{\text{atm}} + \mu g h,$$

d'où on déduit la masse apparente

$$m_{\text{app}} = \frac{\pi D^2}{4} \mu h.$$

Dans ce modèle, la pression est donc proportionnelle à  $h$  : ce modèle n'est donc clairement **pas compatible avec les résultats expérimentaux**.

3 Raisonnons sur une tranche mésoscopique de sable, c'est-à-dire un cylindre de rayon  $R$  égal à celui du récipient et compris entre les hauteurs  $z$  et  $z + dz$ , représenté figure 4.

Il est soumis à

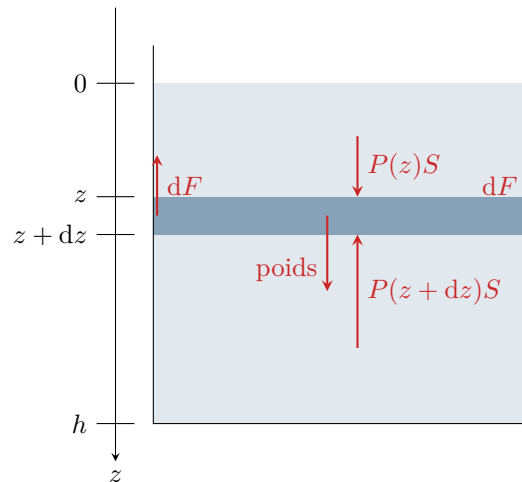


Figure 4 – Tranche mésoscopique de sable étudiée.

- ▷ son poids  $+\mu g S dz \vec{e}_z$
- ▷ la force de pression exercée par le sable situé au dessous  $-P(z+dz)S \vec{e}_z$  ;
- ▷ la force de pression exercée par le sable situé au dessus  $+P(z)S \vec{e}_z$  ;
- ▷ la force exercée par les parois, qui ne s'applique que sur la surface extérieure du cylindre,  $-k(P(z) - P_{\text{atm}}) \times 2\pi R dz \vec{e}_z$ .

L'application du théorème de la résultante cinétique à cette tranche immobile donne en projection

$$\begin{aligned}
 0 &= \mu g S dz - P(z+dz)S + P(z)S - k(P(z) - P_{\text{atm}}) \times 2\pi R dz \\
 0 &= \mu g \pi R^2 dz - \frac{dP}{dz} \pi R^2 dz - k(P(z) - P_{\text{atm}}) \times 2\pi R dz \\
 0 &= \mu g R - R \frac{dP}{dz} - 2k(P - P_{\text{atm}})
 \end{aligned}$$

ce qui s'écrit finalement comme une équation différentielle

$$\frac{dP}{dz} + \frac{2k}{R}P = \mu g + \frac{2k}{R}P_{\text{atm}}.$$

On reconnaît une équation différentielle du premier ordre faisant intervenir une longueur caractéristique  $\lambda = R/2k$ . Une solution particulière de l'équation est

$$P_{\text{part}}(z) = \frac{R}{2k}\mu g + P_{\text{atm}}.$$

La solution générale s'écrit donc

$$P(z) = A e^{-z/\lambda} + \frac{R}{2k}\mu g + P_{\text{atm}}.$$

En  $z = 0$ ,

$$P(0) \underbrace{=}_{\text{sol}} A + \frac{R}{2k}\mu g + P_{\text{atm}} \underbrace{=}_{\text{CL}} P_{\text{atm}} \quad \text{d'où} \quad A = -\frac{R}{2k}\mu g.$$

Ainsi,

$$P(z) = \frac{R}{2k}\mu g (1 - e^{-z/\lambda}) + P_{\text{atm}}.$$

On en déduit la masse apparente via le calcul de  $P(h)$ ,

$$m_{\text{app}} = \frac{\pi D^2}{4} \frac{R}{2k} \mu (1 - e^{-h/\lambda}).$$

Ce modèle prédit bien une masse apparente qui part de 0 si  $h = 0$ , puis qui sature lorsque  $h$  devient suffisamment grand. L'allure de la courbe expérimentale peut tout à fait être celle d'une exponentielle.

En traçant la tangente à l'origine, on peut estimer  $\lambda = 4$  cm, ce qui permet de remonter à la valeur de  $k$ ,

$$k = \frac{R}{2\lambda} = 0,3.$$

4 Le débit du sablier ou de la clepsydre est proportionnel à la différence de pression au niveau de l'orifice d'écoulement, et donc directement proportionnel à la masse apparente. Dans le cas de la clepsydre il diminue linéairement au cours de l'écoulement d'eau, ce qui rend la lecture du temps écoulé peu visible. Au contraire, dans le cas du sablier, il demeure constant lorsque la hauteur de la colonne est suffisamment grande, ce qui est préférable.