Mécanique 5 – Travaux dirigés — Langevin-Wallon, PTSI 2017-2018

Mouvement des particules chargées dans un champ électromagnétique

Exercices

Exercices des chapitres précédents [◊◊◊]

Le mouvement dans un champ électrique uniforme stationnaire sans champ magnétique est analogue à celui d'une chute libre : se reporter au TD M1, notamment l'exercice 4.

Exercice 1 : Sélecteur de vitesse [♦◊◊]

Une particule de masse m et charge q pénètre avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$ dans une zone où existent un champ électrique $\vec{E} = E_0 \vec{u}_y$ et un champ magnétique $\vec{B} = B_0 \vec{u}_z$ uniformes et stationnaire.

1 - À quelle condition le vecteur vitesse de la particule reste-t-il inchangé ?

2 - Expliquer comment ce dispositif peut être adapté en sélecteur de vitesse.

Exercice 2 : Analyse de mouvements [♦◊◊]

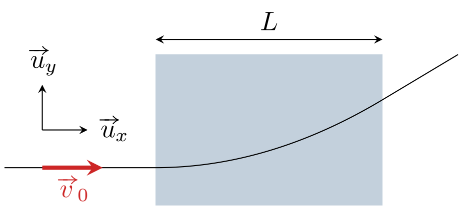
On considère un point matériel de charge $q > 0$ et de masse m, de vitesse initiale $\vec{V_0}$ à l'entrée d'une zone où règnent un champ électrique $\vec{E}$ ou un champ magnétique $\vec{B}$. On suppose ces champs uniformes et indépendants du temps, et on néglige toute autre force que celles provoquées par ces champs.

1 - La particule décrit une droite et possède une accélération constante a.
***1.a* -** Déterminer la direction et la norme du ou des champs qui provoquent cette trajectoire.
***1.b* -** Déterminer la position du point matériel en fonction du temps.

2 - La particule décrit une trajectoire circulaire de rayon R_0 dans un plan (xOy).
***2.a* -** Déterminer la direction du ou des champs qui provoquent cette trajectoire.
***2.b* -** Déterminer la norme du champ en fonction de V_0 et R_0. Il est suggéré d'utiliser les coordonnées polaires.

Annales de concours

Exercice 3 : Détermination d'un champ électrique [oral banque PT, ♦♦◊]



Un électron de masse m, d'énergie cinétique $E_{c0} = 80\,\mathrm{keV}$ pénètre à vitesse $\vec{v}_0$ horizontale dans une cavité de longueur $L = 1\,\mathrm{m}$ où règne un champ électrique uniforme de norme E_0 constante.

1 - Déterminer la direction et le sens du champ électrostatique $\vec{E}_0$.

2 - Lors de sa traversée, l'énergie cinétique de l'électron varie de $|\Delta E_c| = 10\,\mathrm{keV}$. Quel est le signe de ΔE_c ?

3 - Déterminer la norme E_0.

4 - Évaluer l'angle de déviation de la trajectoire en sortie de la zone de champ.

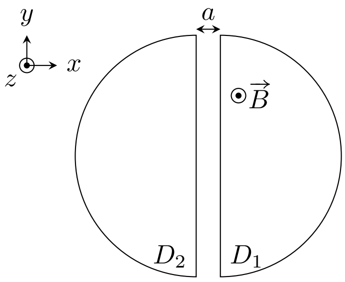
Données : $m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$; $1\,\mathrm{eV} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$.

Exercice 4 : Cyclotron [inspiré CCP PC 2014 et oral banque PT, ♦♦◊]

Un cyclotron est formé de deux enceintes demi-cylindriques D_1 et D_2, appelées « dees » en anglais, séparées d'une zone étroite d'épaisseur a. Les dees sont situés dans l'entrefer d'un électroaimant qui fournit un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B\,\vec{e}_z$, de norme $B = 1{,}5\,\mathrm{T}$. Une tension harmonique u d'amplitude $U_\mathrm{m} = 200\,\mathrm{kV}$ est appliquée entre les deux extrémités de la bande intermédiaire, si bien qu'il y règne un champ électrique orienté selon $\vec{e}_x$.

On injecte des protons au sein de la zone intermédiaire avec une vitesse initiale négligeable.

Données : masse d'un proton $m = 1{,}7 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$.



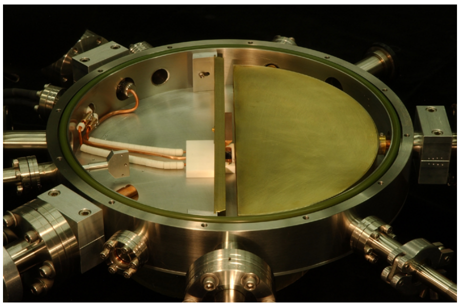


Figure 1 – Étude d'un cyclotron. Schéma de principe et photo du cyclotron de l'université de Rutgers, qui mesure une trentaine de centimètres de diamètre.

1 - Montrer qu'à l'intérieur d'un dee la norme de la vitesse des protons est constante.

2 - En déduire le rayon de courbure R de la trajectoire des protons ayant une vitesse v ainsi que le temps que passe un proton dans un dee.

3 - Quelle doit être la fréquence f de la tension pour que le proton soit accéléré de façon optimale à chaque passage entre les dee ? Pour simplifier, on pourra supposer $a \ll R$. Justifier le choix d'une tension harmonique au lieu, par exemple, d'une tension créneau.

4 - Exprimer en fonction de n la vitesse v_n puis le rayon R_n de la trajectoire d'un proton après n passages dans la zone d'accélération. Le demi-cercle $n = 1$ est celui qui suit la première phase d'accélération.

5 - Calculer numériquement le rayon de la trajectoire après un tour (donc un passage dans chaque dee), puis après dix tours.

Le rayon de la dernière trajectoire décrite par les protons accélérés avant de bombarder une cible est $R_N = 35\,\mathrm{cm}$.

6 - Déterminer l'énergie cinétique du proton avant le choc contre la cible proche du cyclotron puis le nombre de tours parcourus par le proton.

Exercice 5 : Électron dans un champ électromagnétique [ENAC 2016, ♦♦◊]

> *L'épreuve écrite du concours ENAC est un QCM sans calculatrice. Pour chaque question, entre 0 et 2 propositions sont justes.*

Un électron de masse $m_\mathrm{e} \simeq 10^{-30}\,\mathrm{kg}$ et de charge $e \simeq -2 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$ pénètre, avec un vecteur vitesse $\vec{v}_0$, dans une région où règnent un champ électrostatique $\vec{E}$ et un champ magnétostatique $\vec{B}$ uniformes, orthogonaux entre eux et à $\vec{v}_0$. Précisément, dans la base directe $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ du repère cartésien $Oxyz$ (x, y et z sont les coordonnées cartésiennes de l'électron), $\vec{E} = E\vec{e}_x$, $\vec{B} = B\vec{e}_y$ et $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_z$, E, B et v_0 étant positifs. L'origine O du repère cartésien est prise à l'endroit où l'électron pénètre dans la région des champs. La norme v_0 de sa vitesse est de $1000\,\mathrm{km \cdot s^{-1}}$.

1 - On considère dans un premier temps que $B = 0$, de sorte que l'électron n'est soumis qu'au champ électrique $\vec{E}$. Quelle est l'équation vectorielle du mouvement ? Dans les propositions ci-dessous, $\vec{a}$ est le vecteur accélération.

(a) $\vec{a} = \dfrac{e\vec{E}}{m_\mathrm{e}}$. (b) $\vec{a} = \dfrac{\vec{E}}{em_\mathrm{e}}$. (c) $\vec{a} = -em_\mathrm{e}\vec{E}$. (d) $\vec{a} = -\dfrac{e\vec{E}}{m_\mathrm{e}}$.

2 - Quelles sont la nature et l'équation de la trajectoire de l'électron ?

(a) La trajectoire est une portion de parabole d'équation $\dfrac{eE}{m_\mathrm{e}}\left(\dfrac{z}{v_0}\right)^2$.

(b) La trajectoire est une portion de droite d'équation $\dfrac{eE}{m_\mathrm{e}}\dfrac{z}{v_0}$.

(c) La trajectoire est une portion de parabole d'équation $\dfrac{-eE}{2m_\mathrm{e}}\left(\dfrac{z}{v_0}\right)^2$.

(d) La trajectoire est une portion de droite d'équation $\dfrac{-eE}{2m_\mathrm{e}}\dfrac{z}{v_0}$.

3 - On place un écran d'observation parallèlement au plan Oxy en $z_0 = 0{,}2\,\mathrm{m}$. Sachant que $E = 10\,\mathrm{V \cdot m^{-1}}$, calculer l'abscisse x_e de l'impact de l'électron sur l'écran.

(a) $x_\mathrm{e} \simeq 4\,\mathrm{mm}$. (b) $x_\mathrm{e} \simeq -4\,\mathrm{mm}$. (c) $x_\mathrm{e} \simeq 4\,\mathrm{cm}$. (d) $x_\mathrm{e} \simeq -4\,\mathrm{cm}$.

4 - On considère maintenant $E = 0$ et $B \neq 0$, l'électron pénètre donc dans une zone où règne un champ magnétostatique uniforme. Donner l'expression de la force de Lorentz $\vec{F}_\mathrm{L}$ qui s'exerce sur l'électron au moment où il pénètre dans la région du champ [1].

(a) $\overrightarrow{F}_\mathrm{L} = v_0 \overrightarrow{B}$. (b) $\overrightarrow{F}_\mathrm{L} = -e \overrightarrow{v}_0 \times \overrightarrow{B}$. (c) $\overrightarrow{F}_\mathrm{L} = e \overrightarrow{v}_0 \times \overrightarrow{B}$. (d) $\overrightarrow{F}_\mathrm{L} = e v_0 \overrightarrow{B}$.

5 - Parmi les affirmations proposées, quelles sont celles qui sont exactes ?

(a) La trajectoire de l'électron est rectiligne de vecteur vitesse constant.

(b) La trajectoire de l'électron est parabolique.

(c) La trajectoire de l'électron est circulaire de rayon $R_\mathrm{c} = \dfrac{m_\mathrm{e} v_0}{eB}$.

(d) La trajectoire de l'électron est circulaire de rayon $R_\mathrm{c} = \dfrac{e v_0}{m_\mathrm{e} B}$.

6 - On a maintenant $E \neq 0$ et $B \neq 0$. Pour quel rapport E/B le mouvement de l'électron est-il rectiligne et uniforme ?

(a) $E/B = v_0$. (b) $E = B$. (c) $B/E = v_0$. (d) On ne peut pas le déterminer.

1. La notation $\times$ est la notation anglo-saxone du produit vectoriel $\wedge$. Il est un peu surprenant qu'elle apparaisse sans explication dans un sujet niveau prépa ... !

Mouvement des particules chargées dans un champ électromagnétique

Exercices

Exercice 1 : Sélecteur de vitesse

1 La particule est soumise uniquement à la force de Lorentz. Le vecteur vitesse de la particule reste inchangé si son vecteur accélération est nul, c'est-à-dire d'après la loi de la quantité de mouvement si la force de Lorentz est nulle,

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right) = \vec{0}$$

ce qui donne

$$E_0\,\vec{u}_y + v_0 B_0(\vec{u}_x \wedge \vec{u}_z) = 0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{E_0 - v_0 B_0 = 0}$$

> *Rappel :* $\vec{u}_x \wedge \vec{u}_z = -\vec{u}_y$.

2 On peut utiliser la contraposée de la question précédente : si le vecteur vitesse de la particule n'est pas égal à $v_0\,\vec{u}_x$ alors elle est déviée. En plaçant par exemple un masque en sortie de la zone de champ, on peut ne garder que les particules passant par un trou accessible seulement si elles ont la vitesse $\vec{v}_0$ et bloquer les autres.

Exercice 2 : Analyse de mouvements

1.a Un champ magnétique ne peut que courber les trajectoires sans modifier la norme de la vitesse de la particule. On en déduit qu'elle est soumise à un champ électrique $\vec{E}$. Si la particule est en mouvement rectiligne accélérée, c'est que son vecteur accélération est toujours colinéaire à son vecteur vitesse. Déduisons-en la direction du champ électrique.

▷ Système : particule chargée ;
▷ Référentiel : celui du laboratoire où l'expérience est réalisée, que l'on suppose galiléen ;
▷ Bilan des forces : seule la force électrique $\vec{F}_E = q\vec{E}$ est à prendre en compte.

D'après la loi de la quantité de mouvement,

$$m\,\vec{a} = q\vec{E} \qquad \text{soit} \qquad \vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{||\vec{E}|| = \frac{m}{q}\,a\,.}$$

De plus, par intégration,

$$\vec{v} = \vec{a}\,t + \vec{V}_0 = \frac{q}{m}\vec{E}\,t + \vec{V}_0\,.$$

Si $\vec{v}$ et $\vec{a}$ sont colinéaires tout au long du mouvement, c'est que **le champ $\vec{E}$ est de même direction que le vecteur $\vec{V}_0$**. On peut alors écrire

$$\boxed{\vec{E} = \frac{ma}{qV_0}\vec{V}_0\,.}$$

1.b En définissant le point O comme la position de la particule à $t = 0$, on déduit par intégration de la vitesse

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\,\frac{q}{m}\,\vec{E}\,t^2 + \vec{V}_0\,t + \vec{0}\,.}$$

2.a Une trajectoire purement circulaire ne peut être provoquée que par un champ magnétique perpendiculaire à la vitesse initiale. En effet, un champ électrique entraîne nécessairement une déviation des particules chargées dans sa direction. La trajectoire étant contenue dans un plan (xOy), on en déduit que le champ est dirigé selon l'axe z.

2.b La trajectoire étant circulaire, la vitesse et l'accélération s'écrivent en coordonnées polaires

$$\vec{v} = R_0\dot{\theta}\vec{u}_\theta \qquad \text{et} \qquad \vec{a} = -R_0\dot{\theta}^2\vec{u}_r + R_0\ddot{\theta}\vec{u}_\theta\,.$$

La seule force à laquelle la particule est soumise, la force de Lorentz, s'écrit

$$\overrightarrow{F}_L = q\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B} = qR_0\dot{\theta}B(\overrightarrow{u}_\theta \wedge \overrightarrow{u}_z) = qR_0\dot{\theta}B\overrightarrow{u}_r$$

Le PFD appliqué à la particule donne en projection dans la base polaire

$$\begin{cases} -mR_0\dot{\theta}^2 = qR_0\dot{\theta}B \\ R_0\ddot{\theta} = 0\,. \end{cases}$$

On en déduit $\dot{\theta} = -qB/m = \text{cte}$: la particule tourne en sens horaire autour de l'axe Oz. Comme la vitesse angulaire est constante, le mouvement est circulaire uniforme, d'où

$$R_0\left|\dot{\theta}\right| = \text{cte} = V_0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{B = \frac{mv_0}{qR_0}\,.}$$

Annales de concours

Exercice 3 : Détermination d'un champ électrique [oral banque PT]

Un schéma d'ensemble, récapitulant les différentes notations utiles, est représenté figure 2.

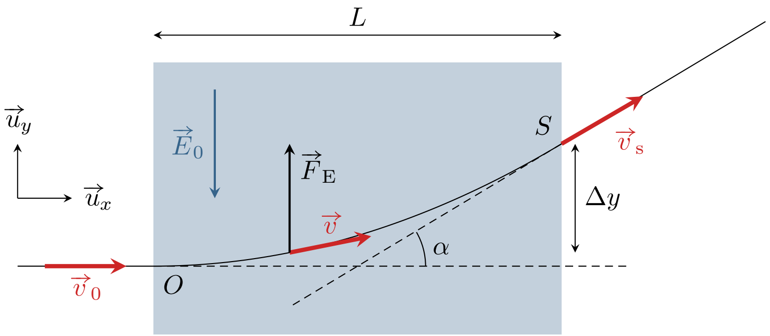


Figure 2 – Schéma d'ensemble des notations utilisées.

$\boxed{1}$ L'électron subit la force de Lorentz électrique $\overrightarrow{F}_\text{E} = -e\overrightarrow{E}_0$ et son poids qui est négligeable. Compte tenu de la trajectoire (et en faisant une hypothèse de simplicité de l'énoncé !), la force $\overrightarrow{F}_\text{E}$ est dirigée selon $+\overrightarrow{u}_y$ et **le champ électrique $\overrightarrow{E}_0$ est donc dirigé selon $-\overrightarrow{u}_y$**.

$\boxed{2}$ Comme la vitesse est tangente à la trajectoire, on constate qu'en tout point $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{F}_\text{E} > 0$: la force a donc un effet moteur, donc

$$\boxed{\Delta E_\text{c} > 0\,.}$$

$\boxed{3}$ Compte tenu des données, il faut relier la force à la variation d'énergie cinétique, et donc calculer son travail. En notant O le point d'entrée et S le point de sortie de la zone de champ électrique,

$$W_{\widehat{OS}}(\overrightarrow{F}_\text{E}) = -e\overrightarrow{E}_0 \cdot \overrightarrow{OS} = +eE_0\,\Delta y\,.$$

Calculons le décalage Δy, en calculant l'équation de la trajectoire. Par application du PFD à l'électron dans le référentiel du laboratoire,

$$m\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t}\right|_\mathcal{R} = -e\overrightarrow{E}_0$$

soit en projetant

$$\begin{cases} ma_x = 0 \\ ma_y = +eE_0 \end{cases} \qquad \text{d'où} \qquad \begin{cases} v_x = A \\ v_y = \dfrac{eE_0}{m}t + B \end{cases}$$

avec A et B deux constantes. Or à l'instant initial où l'électron entre dans la zone de champ $\overrightarrow{v} = v_0\overrightarrow{u}_x$, d'où on déduit $A = v_0$ et $B = 0$. Ainsi,

$$\begin{cases} v_x = v_0 \\ v_y = \dfrac{eE_0}{m}t \end{cases} \qquad \text{d'où} \qquad \begin{cases} x = v_0t + A' \\ y = \dfrac{eE_0}{2m}t^2 + B' \end{cases}$$

et comme à l'instant initial la particule se trouve au point origine O alors $A' = B' = 0$. Les lois horaires s'écrivent donc

$$\begin{cases} x = v_0 t \\ y = \dfrac{eE_0}{2m} t^2 \end{cases}$$

d'où on déduit l'équation de la trajectoire en remplaçant $t = x/v_0$ dans l'expression de y,

$$y(x) = \frac{eE_0}{2m{v_0}^2} x^2 \,.$$

On en déduit

$$\Delta y = y(L) - y(0) = \frac{eE_0 L^2}{2m{v_0}^2} \,.$$

En conclusion,

$$\Delta E_\mathrm{c} = eE_0 \frac{eE_0 L^2}{2m{v_0}^2} = \frac{e^2 {E_0}^2 L^2}{2m{v_0}^2}$$

et ainsi

$$E_0 = \sqrt{\frac{2m{v_0}^2 \, \Delta E_\mathrm{c}}{L^2 e^2}} \,.$$

En réintroduisant $E_{\mathrm{c}0} = \dfrac{1}{2} m{v_0}^2$ il vient

$$\boxed{E_0 = \sqrt{\frac{4\, E_{\mathrm{c}0}\, \Delta E_\mathrm{c}}{L^2 e^2}} = 5{,}6 \cdot 10^4 \,\mathrm{V \cdot m^{-1}} \,.}$$

$\boxed{4}$ On constate sur la figure 2 que l'angle de déviation de la trajectoire correspond également à l'inclinaison de la vitesse de sortie par rapport à la vitesse initiale. Ainsi,

$$\tan\alpha = \frac{v_{\mathrm{s},y}}{v_{\mathrm{s},x}} = \frac{eE_0 t_\mathrm{s}}{m v_0} = \frac{eE_0 L}{m{v_0}^2}$$

d'où

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{2eE_0 L}{E_{\mathrm{c}0}} \,.}$$

Exercice 4 : Cyclotron [inspiré CCP PC 2014 et oral banque PT]

▷ Système : un proton, assimilé à un point matériel de masse m et charge q.
▷ Référentiel : lié au cyclotron, donc a priori le référentiel terrestre, en bonne approximation galiléen.
▷ Bilan des forces : le proton n'est soumis qu'à la force de Lorentz (qui diffère en fonction des zones), devant laquelle le poids est négligeable.

$\boxed{1}$ À l'intérieur des dees seule la force magnétique $\overrightarrow{F}_B = e\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$ existe. D'après le théorème de l'énergie cinétique,

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} = e(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}) \cdot \overrightarrow{v} = 0 \qquad \text{soit} \qquad mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0 \,.}$$

$\boxed{2}$ La trajectoire d'un proton dans un champ magnétique est un arc de cercle, parcouru à vitesse constante. Utilisons un repérage polaire, centré sur le centre de l'arc de cercle. D'après la loi de la quantité de mouvement,

$$m\overrightarrow{a} = e\,\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$$

soit en utilisant les résultats connus sur la cinématique d'un tel mouvement,

$$m\left(-\frac{v^2}{R}\overrightarrow{e}_r\right) = e\,v\,B(-\overrightarrow{e}_\theta \wedge \overrightarrow{e}_z) = -e\,v\,B\,\overrightarrow{e}_r$$

en utilisant $\overrightarrow{v} = -v\,\overrightarrow{e}_\theta$: la trajectoire est parcourue en sens horaire pour un proton, résultat que vous pouvez ou bien connaître ou bien retrouver ici à partir de la cohérence des signes. Finalement,

$$\frac{m\,v^2}{R} = e\,v\,B \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{R = \frac{mv}{eB} \,.}$$

La trajectoire dans un dee est un demi-cercle de longueur πR, parcourue en un temps

$$\boxed{\Delta t_\mathrm{d} = \frac{\pi R}{v} = \frac{\pi m}{eB} = 22\,\mathrm{ns}\,.}$$

On remarque que Δt_d ne dépend pas de la vitesse du proton, mais seulement du champ appliqué au dee (et évidemment de caractéristiques intrinsèques du proton, e et m).

3 Pour que le proton soit accéléré de façon optimale à chaque passage entre les dees, il faut que la force électrique qu'il subit soit alternativement orientée selon $+\vec{u}_x$ lorsqu'il passe de D_2 à D_1 et selon $-\vec{u}_x$ lorsqu'il passe de D_1 à D_2. En négligeant le temps de passage dans l'espace entre les dees ($a \ll \pi R$), il faut donc qu'une demi-période de la tension appliquée soit égale à Δt_d, soit pour la période

$$T = 2\Delta t_\mathrm{d} = \frac{2\pi m}{eB} \qquad \text{et} \qquad \boxed{f = \frac{eB}{2\pi m} = 23\,\mathrm{MHz}\,.}$$

Utiliser une tension harmonique plutôt qu'une tension créneau a l'intérêt de regrouper tous les protons pour que leur passage dans les dees soit en phase avec la tension. Regrouper les protons permet aux impulsions du faisceau d'être plus puissantes. De plus, en pratique, une tension créneau requiert beaucoup d'harmoniques qu'il peut ne pas être simple d'imposer à de telles fréquences.

4 Jusqu'à présent, nous avons relié le rayon à la vitesse du proton. Il faut donc maintenant relier la vitesse du proton au nombre de passage dans les dees, ou plutôt au nombre de passage dans la zone accélératrice. Comme on ne s'intéresse qu'à la norme, le théorème de l'énergie cinétique est le plus adapté. Appliquons ce théorème sur une trajectoire entre la sortie d'un dee et l'entrée de l'autre, en supposant que le passage du proton se fait au moment où la tension atteint son maximum (justifié par la question précédente), et en supposant aussi que la durée de passage dans la zone accélératrice est négligeable devant la période de la tension, ce qui permet de supposer que la tension est presque constante égale à U_m. Sous ces hypothèses, on trouve

$$\frac{1}{2}m{v_{n+1}}^2 - \frac{1}{2}m{v_n}^2 = W(\vec{F}_E) = e\frac{U_\mathrm{m}}{a}a$$

En raisonnant par récurrence, on obtient

$$\frac{1}{2}m{v_n}^2 - \frac{1}{2}m{v_0}^2 \simeq \frac{1}{2}m{v_n}^2 = neU_\mathrm{m} \qquad \text{soit} \qquad v_n = \sqrt{\frac{2neU_\mathrm{m}}{m}}$$

et en utilisant le résultat d'une question précédente,

$$R_n = \frac{m}{eB}\sqrt{\frac{2neU_\mathrm{m}}{m}} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{R_n = \sqrt{\frac{2nmU_\mathrm{m}}{B^2 e}}}$$

5 Remarquons bien que n compte le nombre de passage dans la zone accélératrice, faire un tour complet revient donc à passer de n à $n+2$. Après un tour, $n = 2$ et

$$v_2 = \sqrt{\frac{4eU_\mathrm{m}}{m}} \qquad \text{et} \qquad R_2 = 2\sqrt{\frac{mU_\mathrm{m}}{eB^2}} = 6{,}1\,\mathrm{cm}$$

Après dix tours, $n = 20$ et

$$\boxed{R_{20} = \sqrt{10}\,R_2 = 19\,\mathrm{cm}}$$

6 Avec $R_\mathrm{N} = 35\,\mathrm{cm}$, la vitesse finale vaut

$$v_\mathrm{fin} = \frac{eBR_N}{m} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{E_\mathrm{c,fin} = \frac{e^2B^2R_N^{\,2}}{2m} = 2{,}1\cdot 10^{-12}\,\mathrm{J} = 14\,\mathrm{MeV}}$$

puis

$$E_\mathrm{c,fin} = NeU_\mathrm{m} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{N = \frac{E_\mathrm{c,fin}}{eU_\mathrm{m}} = 33}$$

ce qui correspond à 16 tours et demi au sein du cyclotron.

Étienne Thibierge, 16 mars 2018, www.etienne-thibierge.fr

Exercice 5 : Électron dans un champ électromagnétique [ENAC 2016]

Comme un QCM n'appelle aucune justification, il faut absolument privilégier l'analyse physique aux calculs, ce qui permet de répondre rapidement à certaines questions.

1 On raisonne sur l'électron, soumis à la seule force de Lorentz. Par application de la loi de la quantité de mouvement,

$$m_\mathrm{e}\,\vec{a} = -e\vec{E} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\vec{a} = -\frac{e\vec{E}}{m_\mathrm{e}}}$$

⇝ réponse (d).

2 Intégrons vectoriellement l'équation du mouvement en tenant directement compte des conditions initiales,

$$\frac{\mathrm{d}\,\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -\frac{e\vec{E}}{m_\mathrm{e}} \qquad \text{donc} \qquad \vec{v} = -\frac{e\vec{E}}{m_\mathrm{e}}t + \vec{v}_0$$

puis

$$\overrightarrow{OM} = -\frac{e\vec{E}}{2m_\mathrm{e}}t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{0}\,.$$

En projetant sur l'axe x,

$$\begin{cases} x = -\dfrac{eE}{2m_\mathrm{e}}t^2 \\ y = 0 \\ z = v_0 t \end{cases} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{x = -\frac{eE}{2m_\mathrm{e}}\left(\frac{z}{v_0}\right)^2.}$$

⇝ réponse (c).

3 Réponse (d).

4 Réponse (b). C'est du cours ...

5 Dans un champ magnétique uniforme et stationnaire, le mouvement de l'électron est circulaire uniforme donc son accélération est radiale centripète. Pour trouver le rayon de la trajectoire, il suffit d'écrire le PFD dans la base cylindrique de centre le centre de la trajectoire et d'axe Oy parallèle à $\vec{B}$. On a alors

$$m_\mathrm{e}\,\vec{a} \underbrace{=}_{\text{mvt}} -m_\mathrm{e}\frac{{v_0}^2}{R_\mathrm{c}}\,\vec{e}_r \underbrace{=}_{\text{PFD}} -ev_0\,\vec{e}_\theta \wedge B\,\vec{e}_y = -ev_0 B\,\vec{e}_r$$

ce qui donne finalement

$$\boxed{R_\mathrm{c} = \frac{m_\mathrm{e} v_0}{eB}}$$

⇝ réponse (c).

6 Le mouvement est rectiligne uniforme à vitesse $\vec{v}_0$ si la force de Lorentz s'annule, c'est-à-dire si

$$\vec{E} + \vec{v}_0 \wedge \vec{B} = \vec{0} \qquad \text{soit} \qquad E\,\vec{e}_x + v_0 B(\vec{e}_z \wedge \vec{e}_y) = \vec{0} \qquad \text{et} \qquad E - v_0 B = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\frac{E}{B} = v_0}$$

⇝ réponse (a).