Lois de l'électrocinétique

Routines de calcul

Exercice 2 : Associations de résistances

1 | 2 |

▷ *Résistances équivalentes.*

1 R_2 et R_3 sont montées en parallèles, l'association est équivalente à R_{23} définie par

$$\frac{1}{R_{23}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \qquad \text{soit} \qquad R_{23} = \frac{R_2\, R_3}{R_2 + R_3}\,.$$

R_1 est alors montée en série avec R_{23}, ce qui est finalement équivalent à

$$R_{\text{éq}} = R_1 + R_{23} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{R_{\text{éq}} = R_1 + \frac{R_2\, R_3}{R_2 + R_3}}$$

2 Les trois résistances R_2, R_3 et R_4 sont montées en série, l'association est équivalente à

$$R_{234} = R_2 + R_3 + R_4\,.$$

R_1 est alors montée en parallèle avec R_{234}, ce qui donne une résistance $R_{\text{éq}}$ équivalente à l'ensemble valant

$$\frac{1}{R_{\text{éq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_{234}} = \frac{R_1 + R_{234}}{R_1\, R_{234}} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{R_{\text{éq}} = \frac{R_1(R_2 + R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}}$$

3 Les trois résistances sont montées en parallèles, donc l'association est équivalente à $R_{\text{éq}}$ telle que

$$\frac{1}{R_{\text{éq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \qquad \text{soit} \qquad R_{\text{éq}} = \frac{R_1\, R_2\, R_3}{R_1\,(R_2 + R_3) + R_2\,(R_1 + R_3) + R_3\,(R_1 + R_2)}$$

et enfin

$$\boxed{R_{\text{éq}} = \frac{R_1\, R_2\, R_3}{2\,(R_1\, R_2 + R_1\, R_3 + R_2\, R_3)}}\,.$$

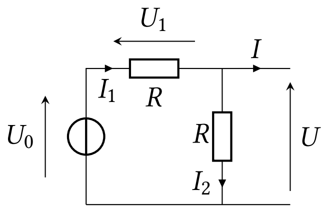
4 Pas grand chose à dire sur ce dernier circuit, puisque la présence du condensateur fait qu'aucune association de résistance n'est caractéristique. La résistance équivalente à l'ensemble n'existe pas.

> *Attention en particulier à ne pas dire que R_1 et R_3 sont montées en parallèle : ce n'est pas vrai à cause de la présence de R_2 et R_4.*

Exercice 3 : Générateur équivalent 1 | 2 |

- *Loi des mailles, loi des nœuds ;*
- *Modèle de Thévenin.*

> ***Méthode :*** *On utilise en alternance les lois de Kirchoff et les lois de comportement. On ne travaille que sur une seule équation dans laquelle on remplace au fur et à mesure les grandeurs inconnues et inintéressantes par des grandeurs connues (ici U_0 et R) ou intéressantes (ici I et U).*



Loi des nœuds :

$$I_1 = I + I_2$$

Loi d'Ohm :

$$\frac{U_1}{R} = I + \frac{U}{R}$$

Loi des mailles : $U_0 = U + U_1$ soit $U_1 = U_0 - U$ donc

$$\frac{U_0 - U}{R} = I + \frac{U}{R}$$

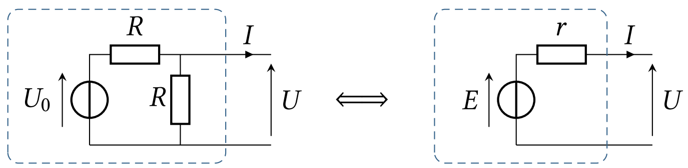
On n'a maintenant que des grandeurs connues ou intéressantes, il ne reste qu'à transformer l'équation pour exprimer U en fonction de I, ce qui donne

$$\frac{U_0}{R} - I = \frac{U}{R} + \frac{U}{R} \qquad \text{soit} \qquad U_0 - RI = 2U \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{U = \frac{U_0}{2} - \frac{R}{2} I\,.}$$

L'association est ici orientée en convention générateur. Dans cette convention, un générateur de Thévenin a pour loi de comportement $U = E - rI$. On en déduit que **l'association est bien équivalente à un générateur de Thévenin**, dont les paramètres sont

$$\boxed{E = \frac{U_0}{2} \qquad \text{et} \qquad r = \frac{R}{2}\,.}$$

> *Attention à ne pas oublier la convention pour comparer à une loi de comportement connue.*



Exercice 4 : Étude de circuits 2 | 2 |

- *Loi des mailles, loi des nœuds ;*
- *Interrupteurs.*

> ***Méthode :***
>
> - *Parmi ceux qui sont demandés, identifier les courants et tensions évidents : tension aux bornes d'un fil et intensité dans une branche ouverte. En déduire ce qui est possible directement, la plupart du temps la tension aux bornes d'une résistance parcourue par un courant nul et celle aux bornes des dipôles court-circuités.*
> - *Essayer d'identifier des ponts diviseurs pour déterminer d'autres tensions.*
> - *Essayer de remplacer des résistances équivalentes pour simplifier le circuit.*
> - *Appliquer les lois de Kirchoff, en écrivant en premier celle qui implique des grandeurs que vous connaissez (p.ex. inutile d'écrire la loi des nœuds si vous ne connaissez aucune intensité).*

> ▹ *Ne pas hésiter si besoin à nommer d'autres courant et tension que ceux qui sont fléchés ... mais ne pas tomber dans l'excès qui consisterait à donner un nom à tout au risque de ne plus s'y retrouver.*

1 ▹ Ce qui est évident : $i_1 = 0$, $i_2 = 0$ et $u_3 = 0$;
▹ Ce qui s'en déduit directement : $u_R = 0$ et $u_2 = u_3$ donc $u_2 = 0$;
▹ Aucun pont diviseur ;
▹ Loi des nœuds : $i_1 = i_2 + i_3$ donc $i_1 = 0$;
▹ Loi des mailles : $E = u_1 + u_R + u_3$ d'où $u_1 = E$.

> *Notez que les tensions aux bornes des interrupteurs ouverts ne sont pas toutes égales ! Rappelons que de telles tensions sont quelconques, inconnues a priori (c'est-à-dire qu'il faut faire un calcul pour les exprimer) ... et certainement pas nulles !*

2 ▹ Ce qui est évident : $i_2 = 0$, $u_1 = 0$ et $u_3 = 0$;
▹ Ce qui s'en déduit directement : $u_2 = u_3$ donc $u_2 = 0$;
▹ Aucun pont diviseur ;
▹ Loi des mailles : $E = u_1 + u_R + u_3$ d'où $u_R = E$;
▹ Loi d'Ohm : $i_1 = E/R$;
▹ Loi des nœuds : $i_1 = i_2 + i_3$ d'où $i_3 = E/R$.

3 ▹ Ce qui est évident : $u_1 = 0$, $u_3 = 0$, $i_2 = 0$;
▹ Ce qui s'en déduit directement : $u_2' = Ri_2 = 0$;
▹ Loi des nœuds : $i_1 = i_2 + i_3$ donc $i_1 = i_3$;
▹ Loi des mailles :

$$E = u_1 + u_1' + u_3' + u_3 \qquad \text{soit} \qquad E = u_1' + u_3'$$

▹ Comme R_1 et R_3 sont parcourues par le même courant alors elles forment un pont diviseur soumis à la tension E, donc

$$u_1' = \frac{R_1}{R_1 + R_3}E \qquad \text{et} \qquad u_3' = \frac{R_3}{R_1 + R_3}E$$

▹ Loi d'Ohm :

$$i_1 = i_3 = \frac{u_1'}{R_1} = \frac{E}{R_1 + R_3}$$

On pourrait bien sûr aboutir au même résultat avec $i_3 = u_3'/R_3$

4 ▹ Ce qui est évident : $i_0 = 0$ et $i_2 = 0$;
▹ Loi des nœuds : $I_0 = i_0 + i_1$ donc $i_1 = I_0$;
▹ Loi des nœuds : $i_1 = i_2 + i_3$ donc $i_3 = I_0$;
▹ Loi d'Ohm : $u_3 = R_3 I_0$;
▹ Loi des mailles : $u_2 + R_2 i_2 = u_3$ d'où $u_2 = u_3 = R_3 I_0$
▹ Loi d'Ohm : $u_1 = R_1 I_0$;
▹ Loi des mailles : $u_0 = u_1 + u_3$ d'où $u_0 = (R_1 + R_3)I_0$.

> *Attention, le résultat donnant u_0 n'est pas une application de la loi d'Ohm mais une conséquence du fait que la tension aux bornes d'une source de courant dépend du circuit, ici uniquement composé de résistances. Ce serait différent s'il y avait, par exemple, des condensateurs dans le circuit.*

Exercice 5 : Étude de circuits (bis)

2 | 2 |

- *Loi des mailles, loi des nœuds ;*
- *Résistances équivalentes.*

1 U est la tension aux bornes des deux résistances montées en parallèle, équivalentes à R_{eq} telle que

$$\frac{1}{R_{\text{éq}}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R} = \frac{2}{R} \qquad \text{d'où} \qquad R_{\text{éq}} = \frac{R}{2}\,.$$

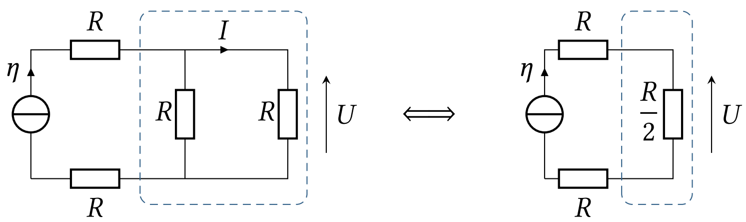
Cette résistance équivalente est parcourue par le courant η, d'où on déduit directement de la loi d'Ohm

$$\boxed{U = \frac{R}{2}\eta\,.}$$

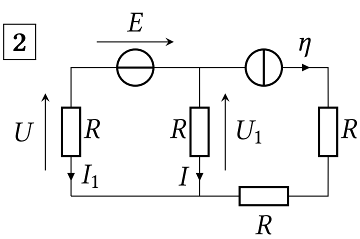
On en déduit enfin I à partir de la loi d'Ohm pour la seule résistance R,

$$U = RI \qquad \text{soit} \qquad \frac{R}{2}\eta = RI \qquad \text{donc} \qquad \boxed{I = \frac{\eta}{2}\,.}$$

On aurait aussi pu reconnaître un pont diviseur de courant.



2



Loi des mailles :

$$U_1 = E + U$$

Loi d'Ohm : comme les deux résistances sont en convention récepteur,

$$RI = E + RI_1$$

Loi des nœuds : $I_1 + I + \eta = 0$ donc $I_1 = -I - \eta$, ainsi

$$RI = E - RI - R\eta$$

On n'a plus que des grandeurs connues ou intéressantes, il ne reste qu'à transformer l'équation :

$$2RI = E - R\eta \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{I = \frac{E}{2R} - \frac{\eta}{2}\,.}$$

On en déduit ensuite la tension $U = RI_1 = -RI - R\eta$ d'après la loi des nœuds. En remplaçant I,

$$U = -\left(\frac{E}{2} - \frac{R\eta}{2}\right) - R\eta \qquad \text{soit} \qquad \boxed{U = -\frac{E}{2} - \frac{R\eta}{2}}$$

Des applications

Exercice 6 : Pont de Wheatstone 2 | 2 |

- *Pont diviseur de tension ;*
- *Loi des mailles, loi des nœuds.*

1 Utilisons les notations de la figure 1. Les résistances R_1 et R_2 d'une part et R et R_3 d'autre part forment deux ponts diviseur de tension, donc

$$U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E \qquad \text{et} \qquad U_3 = \frac{R_3}{R + R_3} E\,.$$

Par la loi des mailles,

$$U_2 = U + U_3 \qquad \text{d'où} \qquad U = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E - \frac{R_3}{R + R_3} E = \frac{R_2(R + R_3) - R_3(R_1 + R_2)}{(R_1 + R_2)(R + R_3)} E$$

ce qui donne

$$\boxed{U = \frac{R_2 R - R_1 R_3}{(R_1 + R_2)(R + R_3)} E\,.}$$

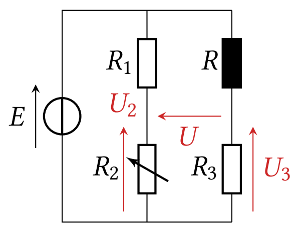


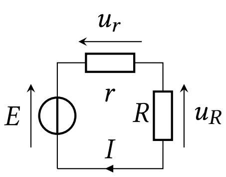
Figure 1 – Pont de Wheatstone.

2 Le pont est équilibré lorsque

$$R_2 R - R_1 R_3 = 0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{R = \frac{R_1 R_3}{R_2}\,.}$$

Exercice 7 : Adaptation d'impédance 2 | 2

- *Puissance électrique.*



1 Par un pont diviseur,

$$u_R = \frac{R}{r + R} E$$

Ainsi,

$$\mathcal{P}_R = \frac{{u_R}^2}{R} = \frac{R^{\cancel{2}}}{\cancel{R}(r + R)^2} E^2 \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\mathcal{P}_R = \frac{RE^2}{(R + r)^2}\,.}$$

2 De même, $\mathcal{P}_r = \dfrac{rE^2}{(R + r)^2}$. Toute la puissance fournie par le générateur étant dissipée dans les résistances,

$$\mathcal{P}_{\text{tot}} = \mathcal{P}_R + \mathcal{P}_r = \frac{(R + r)E^2}{(R + r)^2} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\mathcal{P}_{\text{tot}} = \frac{E^2}{R + r}}$$

3 La puissance $\mathcal{P}_{\text{tot}}$ est toujours positive, vaut 0 si $R = 0$ et tend aussi vers 0 lorsque R est très grand, alors elle admet un maximum pour $R > 0$. Sa recherche passe par le calcul de la dérivée,

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{P}}{\mathrm{d}R} = \frac{1 \times (R+r)^2 - (2R+2r)R}{(R+r)^4} = \frac{-R^2 + r^2}{(R+r)^4}\,.$$

Ainsi, la dérivée est nulle et la puissance maximale pour

$$\boxed{R = R^\star = r}$$

4 Exprimons le rendement,

$$\rho = \frac{\mathcal{P}_R}{\mathcal{P}_{\text{tot}}} = \frac{\dfrac{RE^2}{(R+r)^2}}{\dfrac{E^2}{R+r}} = \frac{R}{R+r}$$

Pour $R = R^\star = r$, **le rendement ne vaut que 50 %** : la puissance fournie à la résistance R est certes maximale, mais beaucoup de puissance est perdue dans le générateur lui-même.

Exercice 8 : Point de fonctionnement d'une photodiode 2 | 2 |

▹ *Caractéristiques courant-tension.*

Le point de fonctionnement du montage est défini par le couple (U, I) permettant de satisfaire simultanément la loi de comportement de la photodiode et les contraintes imposées par le reste du montage. La caractéristique de la photodiode est donnée par l'énoncé, il reste donc à déterminer la relation entre U et I imposée par le montage.

Le circuit est à une seule maille, donc en tenant compte de l'orientation des tensions et d'après la loi d'Ohm,

$$U + RI - E = 0 \qquad \text{soit} \qquad I = \frac{E-U}{R}$$

Cette relation entre U et I se traduit graphiquement par une droite. Pour la tracer facilement, il faut trouver deux points particuliers, les plus simples à déterminer :
- ▹ la valeur de courant I pour laquelle la tension U est nulle (c'est-à-dire l'ordonnée à l'origine !) ici $I_0 = E/R = -0{,}4\,\text{mA}$;
- ▹ la valeur de tension U pour laquelle le courant I est nul, qui donne directement $U = E = -4\,\text{V}$.

En se basant sur ces deux points, on peut alors superposer la droite à la caractéristique, figure 2, et déterminer graphiquement le point d'intersection, c'est-à-dire le point de fonctionnement du montage, qui correspond à

$$\boxed{U \simeq -1{,}3\,\text{V} \qquad \text{et} \qquad I \simeq -0{,}27\,\text{mA}\,.}$$

Exercice 9 : Alimentation stabilisée 2 | 2

▹ *Puissance électrique ;*
▹ *Caractéristique courant-tension.*

1 Non, car la caractéristique n'est pas affine.

2 On commence par déterminer graphiquement I et U en superposant la caractéristique $I = U/R$ de la résistance à celle de l'alimentation stabilisée, voir figure 3. Pour $R = 1\,\Omega$,

$$\begin{cases} I = 5\,\text{A} \\ U = 5\,\text{V} \end{cases} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\mathcal{P} = UI = 25\,\text{W}\,.}$$

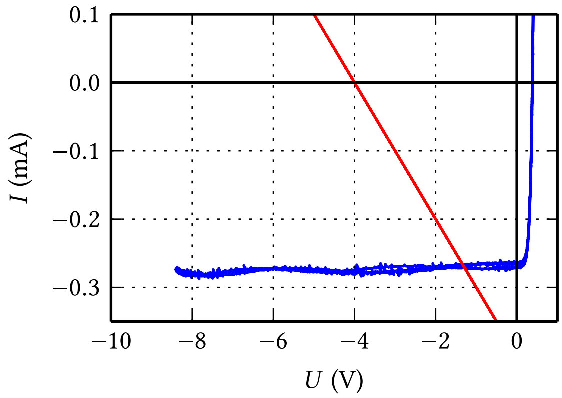


Figure 2 – Point de fonctionnement du montage à résistance de charge. La caractéristique de la photodiode, en bleu, est superposée à la contrainte imposée par le reste du montage, en rouge.

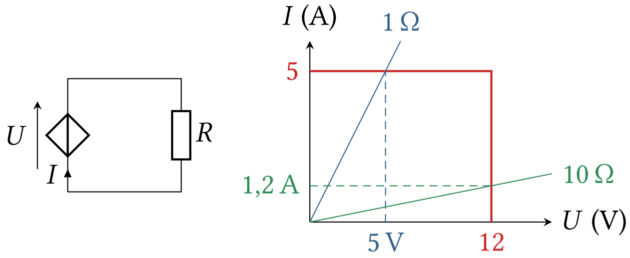


Figure 3 – Superpostion des caractéristiques.

$\boxed{3}$ Cette fois,

$$\begin{cases} I = 1{,}2\,\mathrm{A} \\ U = 12\,\mathrm{V} \end{cases} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\mathcal{P} = UI = 14{,}4\,\mathrm{W}\,.}$$

$\boxed{4}$ Graphiquement, la puissance dissipée correspond à l'aire du rectangle dont les sommets opposés sont l'origine et le point de fonctionnement. Elle est maximale lorsque le point de fonctionnement se trouve dans l'angle de la caractéristique, d'où

$$\boxed{\mathcal{P}_{\max} = 12 \times 5 = 60\,\mathrm{W}\,.}$$

Exercice 10 : Montage amplificateur à ALI — 3 | 2

▹ *Loi des mailles, loi des nœuds.*

Les notations utilisées sont celles de la figure 4.

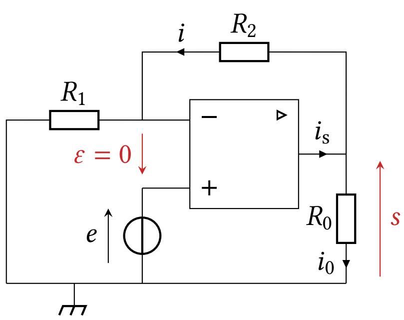


Figure 4 – Schéma du montage amplificateur à ALI.

1 D'après la loi des mailles,

$$e - \cancel{\varepsilon} - R_1 i = 0 \qquad \text{et} \qquad e - \cancel{\varepsilon} + R_2 i - s = 0\,.$$

On en déduit

$$i_s = \frac{e}{R_1} \qquad \text{donc} \qquad s = e + R_2 \times \frac{e}{R_1} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{s = \underbrace{\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)}_{=K} e\,.}$$

2 Pour obtenir $K = 10$, il faut

$$\boxed{R_2 = 9R_1 = 4{,}5\,\mathrm{k\Omega}\,.}$$

3 La présence de R_0 ne change pas la relation entre s et e. Par la loi des nœuds appliquée en sortie de l'ALI,

$$i_s = i + i_0 = \frac{e}{R_1} + \frac{s}{R_0} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{i_s = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{K}{R_0}\right) e\,.}$$

4 En limite de saturation en tension,

$$s = V_{sat} = K e_{lim} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{e_{lim} = \frac{V_{sat}}{K} = 1{,}5\,\mathrm{V}}\,.$$

En limite de saturation en courant,

$$i_s = I_{sat} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{K}{R_0}\right) e'_{lim} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{e'_{lim} = \frac{I_{sat}}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{K}{R_0}} = 13{,}3\,\mathrm{V}}$$

C'est donc la saturation en tension qui limite en pratique le fonctionnement du montage.