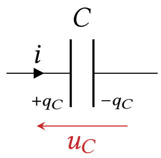
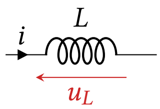
Transitoires du premier ordre

I - Condensateur et bobine

	Condensateur	Bobine
Symbole		
Loi de comportement	$i = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ $q_C = Cu_C$	$u_L = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$
Équivalent en régime permanent	Interrupteur ouvert	Fil
Énergie stockée	$\mathcal{E}_C = \dfrac{1}{2}Cu_C^2$	$\mathcal{E}_L = \dfrac{1}{2}Li^2$
Grandeur continue	Tension u_C	Courant i

II - Équations différentielles

- **Établir une équation différentielle :**

❶ Utiliser en alternance (une étape sur deux) les lois des mailles/des nœuds et les lois de comportement des dipôles pour modifier l'équation de travail ;
❷ À chaque étape, remplacer les grandeurs inconnues et sans intérêt par les grandeurs connues et/ou intéressantes ;
❸ Si nécessaire, dériver l'équation de travail pour y insérer certaines lois de comportement ;
❹ Toutes les grandeurs qui apparaissent dans les équations doivent être légendées sur le schéma du circuit.

- **Forme canonique :** pour une équation différentielle, linéaire, du premier ordre, à coefficients constants :

inverse du temps caractéristique

préfacteur 1 devant la dérivée

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}s}_{\text{membre de gauche : ce qui implique la fonction cherchée}} = \underbrace{\text{des choses qui dépendent de } e}_{\text{membre de droite ou second membre : le reste = ce qui implique le forçage}}$$

BY-NC-SA © Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

- **Résolution :**

Forme générale des solutions :

$$s(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + s_P(t)$$

solution homogène
à connaître par cœur

solution particulière
à chercher de la même forme que le forçage

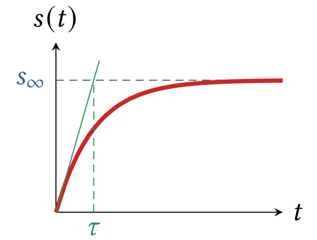
Utilisation d'une condition initiale : à $t = 0^+$, juste après l'échelon,

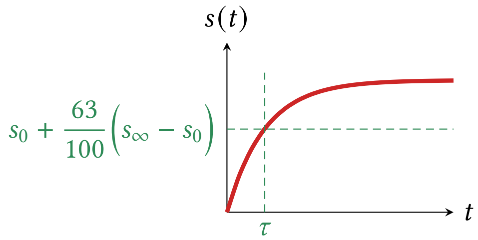
$$s(t\!=\!0^+) \underset{\text{CI}}{\uparrow}{=} S_0 \underset{\text{expr}}{\uparrow}{=} A\,\underbrace{\mathrm{e}^{-0/\tau}}_{=1} + s_P(0) \qquad \text{d'où} \qquad A = \dots$$

Si on cherche une grandeur potentiellement discontinue, commencer par l'exprimer grâce à LM/LN en fonction des grandeurs continues.

- **Interprétation qualitative :**
  - ▹ la solution homogène décrit le régime transitoire, et s'annule au delà ;
  - ▹ la solution particulière décrit le régime établi ;
  - ▹ τ donne l'ordre de grandeur de la durée du transitoire.

- **Détermination graphique de τ :** tangente à l'origine ou temps de réponse à 63 %





III - Analyse dimensionnelle

- **Méthode :**

❶ Identifier les paramètres pouvant influer sur la grandeur cherchée, et postuler une forme en loi de puissance : p.ex. $\tau = R^n C^p E^q$ où l'on cherche n, p, q ;

❷ Postulat d'homogénéité et équation aux dimensions : la relation est homogène, donc p.ex. $[R]^n [C]^p [E]^q = [\tau]$;

❸ Revenir aux unités de base pour en déduire un système portant sur les exposants.

❹ Résoudre ce système et conclure.

- **Limitations :** méthode puissante mais pas magique !
  - ▹ ne « voit » pas les nombres sans dimension : $1/2$, π, etc.
  - ▹ inefficace si deux paramètres de même dimension, p.ex. deux résistances, interviennent car leur rapport est sans dimension.

IV - Bilans énergétiques

- **Bilan de puissance :** loi des mailles $\times\, i$

$$E = u_C + Ri \quad (\times i) \qquad \rightsquigarrow \qquad \mathcal{P}_{\text{géné}} = \mathcal{P}_C + \mathcal{P}_{\text{Joule}}$$

- **Bilan d'énergie :** intégration du bilan de puissance.

$$\int_0^{+\infty} E\,i(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_C}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t + \int_0^{\infty} Ri(t)^2\,\mathrm{d}t \qquad \rightsquigarrow \qquad W_{\text{géné}} = \Delta\mathcal{E}_C + W_{\text{Joule}}$$

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

V - Méthode d'Euler

- **Principe :** résolution approchée de l'équation différentielle à N instants discrets $t_0, t_1, \ldots, t_n, \ldots, t_{N-1}$ séparés d'un pas de temps Δt ($t_n = n\,\Delta t$).
- **Schéma numérique :** transformation de l'équation différentielle en une relation de récurrence.
- **Schéma d'Euler explicite :**
  - ▹ dérivée $\mapsto$ taux d'accroissement entre t_n et t_{n+1} ;
  - ▹ autres grandeurs $\mapsto$ prises à l'instant t_n.

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}u = \frac{e(t)}{\tau} \qquad \rightsquigarrow \qquad \frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta t} + \frac{1}{\tau}\,u_n = \frac{1}{\tau}\,e(t_n) \qquad \rightsquigarrow \qquad u_{n+1} = \ldots$$

- **Implémentation Python :** boucle `for` pour remplir terme à terme la liste `u` correctement initialisée.

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr