Transitoires du premier ordre

Exercice 1 : Transitoire d'un circuit RC parallèle

2 | 2 |

▹ *Équation différentielle ;*
▹ *Recherche de condition initiale.*

Correction des questions d'analyse du corrigé

Question d'analyse 1 - La résistance R et le condensateur sont montés en parallèle, donc soumis à la même tension.

Question d'analyse 2 - La maille considérée est la « grande maille », qui comporte le générateur, la résistance r et le condensateur ... mais pas la résistance R.

Question d'analyse 3 - La fém du générateur est implicitement supposée constante, donc sa dérivée est nulle.

Question d'analyse 4 - Déjà, cette expression devrait te faire sauter au plafond car elle est affreusement inhomogène ! L'erreur vient d'une mauvaise identification de la forme canonique : le préfacteur de la dérivée doit être égal à 1 pour que le préfacteur du terme non dérivé s'identifie à τ.

Question d'analyse 5 - Absolument pas, c'est juste une coïncidence de calcul. Les deux résistances r et R ne sont ni en série ni en parallèle.

Question d'analyse 6 - Les seules grandeurs continues sont la tension aux bornes d'un condensateur et le courant qui traverse une bobine. Les autres tensions et les autres aux courants, dont i, peuvent être (et sont souvent) discontinus.

Question d'analyse 7 - Même réponse que précédemment ... sauf que cette fois u_C EST continue, donc $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$.

Question d'analyse 8 - La solution particulière est toujours cherchée de la même forme que le second membre, c'est-à-dire constant dans notre cas.

Question d'analyse 9 - $A = \dfrac{E}{r} - \dfrac{E}{r+R} = \left(\dfrac{r+R}{r(r+R)} - \dfrac{r}{r(r+R)}\right) E = \dfrac{r+R-r}{r(r+R)} E = \dfrac{R}{r(r+R)} E.$

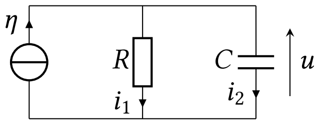
Question d'analyse 10 - Après autant de calculs, vérifier que le résultat final que l'on encadre est bien compatible avec la condition initiale est toujours une bonne idée. Si ce n'est pas le cas ... c'est qu'il faut recommencer ☺

Mise en équation de circuits

Exercice 2 : Circuit RC soumis à un échelon de courant

2 | 1

▹ *Équation différentielle ;*
▹ *Recherche de condition initiale.*



Équation différentielle vérifiée par u. D'après la loi des nœuds,

$$I_0 = i_1 + i_2$$

D'après les lois de comportement, et comme R et C sont montés en parallèle,

$$I_0 = \frac{u}{R} + C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\,.$$

On a alors l'équation différentielle cherchée, qu'on écrit sous forme canonique

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}u = \frac{I_0}{C} \qquad \text{avec} \qquad \tau = RC\,.}$$

Forme générale des solutions.

▹ Comme le forçage I_0 est constant, alors la solution particulière U_∞, qui décrit le régime permanent, est cherchée constante également. D'après l'équation différentielle,

$$0 + \frac{1}{\tau}U_\infty = \frac{I_0}{C} \qquad \text{d'où} \qquad U_\infty = \frac{I_0\tau}{C} \qquad \text{soit} \qquad U_\infty = RI_0$$

> *On peut vérifier que c'est cohérent avec l'analyse par circuits équivalents : en régime continu, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert, donc $i_2 = 0$ et $i_1 = I_0$, d'où $U_\infty = RI_0$.*

▹ Ainsi, les solutions de l'équation différentielle sont de la forme

$$u(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + RI_0\,.$$

Condition initiale. Raisonnons d'abord sur le circuit équivalent à $t = 0^-$: comme $\eta(0^-) = 0$ alors $i_1(0^-) = i_2(0^-) = 0$, et d'après la loi d'Ohm

$$u(0^-) = Ri_1(0^-) = 0\,.$$

Comme u est également la tension aux bornes d'un condensateur, alors elle est forcément continue, donc

$$u(0^+) = u(0^-) = 0\,.$$

Constante d'intégration.

$$u(0^+) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{expr}}}{=} A + RI_0 \underset{\substack{\uparrow\\ \text{CI}}}{=} 0 \qquad \text{donc} \qquad A = -RI_0$$

Conclusion.

$$\boxed{u(t) = RI_0\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)\,.}$$

Exercice 3 : Condensateur alimenté par deux générateurs — oral CCINP MP | 2 | 2 |

▹ *Équation différentielle ;*
▹ *Recherche de condition initiale ;*
▹ *Puissance électrique.*

1 Raisonnons avec les notations de la figure 1 pour $t > 0$.

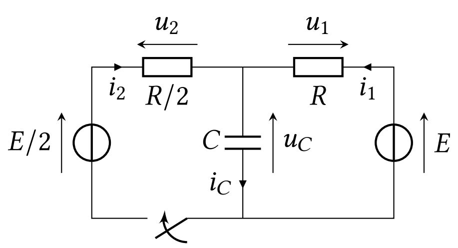


Figure 1 – Condensateur alimenté par deux générateurs.

Loi des nœuds : $i_C = i_1 + i_2$

Lois de comportement : $C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \dfrac{2u_1}{R} + \dfrac{u_2}{R}$

Loi des mailles : $C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = 2\,\dfrac{E/2 - u_C}{R} + \dfrac{E - u_C}{R}$

Donc $C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \dfrac{2E}{R} - \dfrac{3}{R}u_C$

Finalement : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \dfrac{3}{RC}u_C = \dfrac{2E}{RC}\,.}$

2 **Forme canonique :** posons $\tau = RC/3$,

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}u_C = \frac{2E}{RC}\,.$$

Forme générale des solutions :

▹ le forçage est constant donc on cherche une solution particulière $u_\mathrm{p} = \mathrm{cte}$:

$$0 + \frac{3}{RC}u_\mathrm{p} = \frac{2E}{RC} \qquad \text{d'où} \qquad u_\mathrm{p} = \frac{2}{3}E\,.$$

▹ ainsi,

$$u_C(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + \frac{2}{3}E\,.$$

Condition initiale : À l'instant $t = 0^-$, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert. D'après la loi des nœuds,

$$i_1(0^-) + i_2(0^-) = i_C(0^-) \qquad \text{soit} \qquad i_1(0^-) + 0 = 0$$

La loi des mailles donne alors

$$u_C(0^-) + Ri_1(0^-) = E \qquad \text{d'où} \qquad u_C(0^-) = E$$

Par continuité de la tension aux bornes d'un condensateur, on déduit

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = E\,.$$

En identifiant à l'expression des solutions,

$$u_C(0^+) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{expr}}}{=} A + \frac{2}{3}E \underset{\substack{\uparrow\\ \text{CI}}}{=} E \qquad \text{d'où} \qquad A = \frac{E}{3}\,.$$

Conclusion :

$$\boxed{u_C(t) = \frac{E}{3}\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + \frac{2}{3}E}$$

3 La tension u_C est décroissante. Ainsi, la valeur finale est atteinte à 1 % près à l'instant t_1 tel que

$$u_C(t_1) = \frac{101}{100} \times \frac{2}{3}E\,.$$

Cherchons t_1 :

$$\frac{E}{3}\,\mathrm{e}^{-t_1/\tau} + \frac{2}{3}E = \frac{101}{100} \times \frac{2}{3}E$$

donc $\mathrm{e}^{-t_1/\tau} + 2 = 2 \times \dfrac{101}{100}$

soit $\mathrm{e}^{-t_1/\tau} = 0{,}02$

d'où $\boxed{t_1 = -\tau \ln 0{,}02 = 3{,}9\,\tau\,.}$

> *Le fait de trouver ici environ 4τ n'est pas contradictoire avec le fait qu'il faille un temps 5τ pour réaliser 99 % du transitoire. On s'intéresse ici à la* valeur finale, *mais pas à* l'amplitude de l'échelon *de tension. Le calcul est donc un peu différent de celui du temps de réponse fait en cours. La condition initiale non nulle fait qu'on atteint la valeur finale à 1 % près avant d'avoir réalisé 99 % de l'échelon de tension.*

4 L'énergie dissipée l'est par effet Joule dans les résistances. La puissance dissipée dans la résistance R vaut

$$\mathcal{P}_1 = \frac{u_1^2}{R} = \frac{(E - u_C)^2}{R} = \frac{E^2}{9R}\left(e^{-t/\tau} - 1\right)^2 .$$

De même, la puissance dissipée dans la résistance $R/2$ vaut

$$\mathcal{P}_2 = \frac{u_2^2}{R/2} = 2\frac{\left(\frac{E}{2} - u_C\right)^2}{R} = 2\frac{E^2}{9R}\left(e^{-t/\tau} - \frac{1}{2}\right)^2 .$$

La puissance totale dissipée vaut donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{\text{diss}} &= \frac{E^2}{9R}\left(e^{-t/\tau} - 1\right)^2 + 2\frac{E^2}{9R}\left(e^{-t/\tau} - \frac{1}{2}\right)^2 \\
&= \frac{E^2}{9R}\left[\left(\mathrm{e}^{-2t/\tau} - 2\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + 1\right) + 2\left(\mathrm{e}^{-2t/\tau} - \mathrm{e}^{-t/\tau} + \frac{1}{4}\right)\right]
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{P}_{\text{diss}} = \frac{E^2}{9R}\left[3\,\mathrm{e}^{-2t/\tau} - 4\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + \frac{3}{2}\right] .}$$

Lorsque $t \longrightarrow \infty$, la puissance dissipée tend vers

$$\mathcal{P}_\infty = \frac{E^2}{9R} \times \frac{3}{2} = \frac{E^2}{6R} .$$

Cette valeur correspond à la puissance dissipée par une résistance $3R/2$ alimentée par une tension $E/2$. Cette valeur est logique : en régime continu, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert, si bien que les autres dipôles apparaissent montés en série. Les deux générateurs s'associent alors en un seul de fém $E/2$ (attention au sens) et les deux résistances sont équivalentes à $3R/2$.

Exercice 4 : Circuit RL à deux mailles — oral Mines-Télécom PSI | 2 | 2 |

- *Équation différentielle ;*
- *Recherche de condition initiale.*

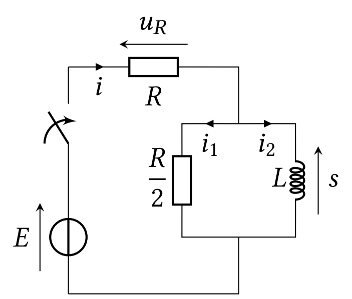


Figure 2 – Notations pour l'étude du circuit RL à deux mailles.

- **Équation différentielle vérifiée par s**

Avec les notations de la figure 2,

Loi des nœuds : $$i = i_1 + i_2$$

Dérivation : $$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

Lois de comportement : $$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}u_R}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{R}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{s}{L}$$

Loi des mailles : $$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(E-s) = \frac{2}{R}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{s}{L}$$

$$-\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{R}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{s}{L}$$

$$\frac{3}{R}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{s}{L} = 0$$

Finalement : $$\boxed{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{3L}s = 0}$$

ce que l'on peut mettre sous forme canonique :

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}s = 0 \qquad \text{avec} \qquad \tau = \frac{3L}{R}\,.$$

> ***Rappel de méthode :*** *Comme on veut utiliser la loi de comportement de la bobine, mais qu'elle implique une dérivée, alors on dérive l'équation de travail au préalable.*

- **Forme générale des solutions**

L'équation est homogène, il n'y a donc pas de solution particulière (ou autrement dit cette solution est nulle). Seule reste la solution homogène, donc
$$s(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\,,$$
avec A une constante.

- **Détermination de la condition initiale**

▹ *Étude à l'instant $t = 0^-$:* la seule grandeur continue est i_2 (courant dans une bobine), il n'y a donc qu'elle qu'on détermine. Comme le régime est permanent continu et que la branche contenant le seul générateur du circuit est ouverte, on a directement
$$i_2(0^-) = 0\,.$$

▹ *Étude à l'instant $t = 0^+$:*

Loi des nœuds : $$i(0^+) = i_1(0^+) + i_2(0^+)$$

Continuité de i_2 : $$i(0^+) = i_1(0^+)$$

Lois de comportement : $$\frac{u_R(0^+)}{R} = \frac{2s(0^+)}{R}$$

Loi des mailles : $$\frac{E - s(0^+)}{R} = \frac{2s(0^+)}{R}$$

Donc : $$E = 3s(0^+)$$

Finalement : $$\boxed{s(0^+) = \frac{E}{3}\,.}$$

> ***Rappel de méthode :*** *Il est **absolument inutile** de déterminer à $t = 0^-$ une grandeur qui n'est pas continue, et ce même si c'est la grandeur d'intérêt. Comme elle n'est pas continue, sa valeur à 0^- ne nous renseigne **pas du tout** sur sa valeur à 0^+. Ainsi, les seules grandeurs à déterminer à 0^- sont les grandeurs continues : tension aux bornes d'un condensateur et courant dans une bobine.*
>
> *Rappelons également il n'y a pas de méthode fréquentielle pour déterminer une condition initiale !*

- **Détermination de la constante A**

$$s(0^+) \underset{\text{CI}}{\underset{\uparrow}{=}} \frac{E}{3} \underset{\text{sol}}{\underset{\uparrow}{=}} A \qquad \text{donc} \qquad A = \frac{E}{3}\,.$$

- **Conclusion**

$$\boxed{s(t) = \frac{E}{3}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\,.}$$

La courbe est représentée figure 3.

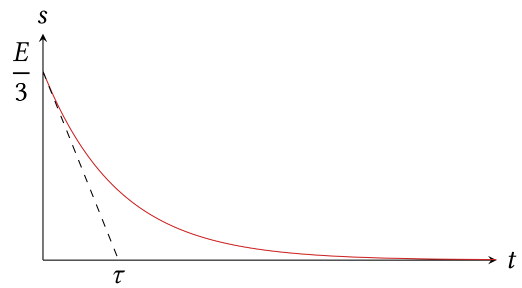


Figure 3 – Courbe représentant la tension s en fonction du temps.

Exercice 5 : Circuit RL à deux mailles 2 | 2

- *Équation différentielle ;*
- *Recherche de condition initiale.*

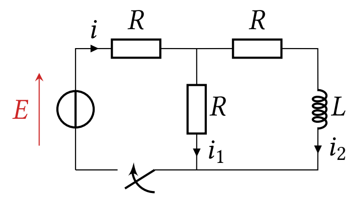


Figure 4 – Notations pour l'étude du circuit RL à deux mailles.

- **Équation différentielle :** d'après la loi des mailles appliquée à la grande maille (voir figure 4),

$$E = Ri + Ri_2 + L\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}\,.$$

Or d'après la loi des nœuds $i_2 = i - i_1$, donc

$$E = 2Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - Ri_1 - L\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}\,.$$

Or d'après la loi des mailles appliquée à la maille de gauche

$$E = Ri + Ri_1 \qquad \text{soit} \qquad i_1 = \frac{E}{R} - i$$

d'où on déduit en réinjectant dans l'équation de travail

$$E = 2Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - E + Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

ce qui donne

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{3R}{2L}i = \frac{E}{L}}$$

- **Forme des solutions :** le second membre étant constant, on cherche une solution particulière i_p constante,

$$0 + \frac{3R}{2L} i_\mathrm{p} = \frac{E}{L} \qquad \text{soit} \qquad i_\mathrm{p} = \frac{2E}{3R}$$

d'où on déduit

$$\boxed{i(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + \frac{2E}{3R} \qquad \text{avec} \qquad \tau = \frac{2L}{3R}\,.}$$

- **Condition initiale :** à l'instant $t = 0^-$, l'interrupteur est ouvert donc tous les courants sont nuls car le circuit n'est alimenté par aucun générateur. Par continuité du courant dans une bobine, $i_2(0^+) = 0$. Par conséquent, d'après la loi des nœuds,

$$i(0^+) = i_1(0^+) + 0$$

et en réutilisant la loi des mailles appliquée à la petite maille de gauche

$$E = Ri(0^+) + Ri_1(0^+) \qquad \text{donc} \qquad \boxed{i(0^+) = \frac{E}{2R}\,.}$$

Par identification avec l'expression,

$$i(0^+) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{CI}}}{=} \frac{E}{2R} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{expr}}}{=} A + \frac{2E}{3R} \qquad \text{d'où} \qquad A = \frac{E}{2R} - \frac{2E}{3R} = -\frac{E}{6R}\,.$$

- **Conclusion :**

$$i(t) = -\frac{E}{6R}\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + \frac{2E}{3R} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{i(t) = \frac{E}{6R}\left(4 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)\,.}$$

Connaître la condition initiale et l'asymptote permet de faire directement le tracé de la figure 5.

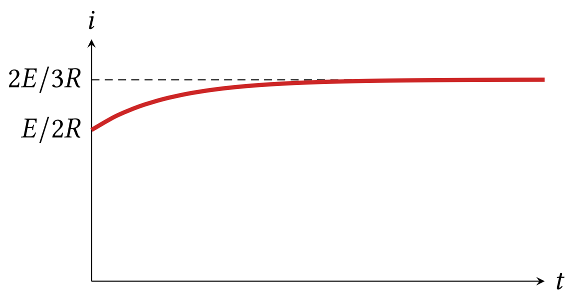


Figure 5 – Allure du courant $i(t)$.

Pour aller plus loin

Exercice 6 : Résistance de fuite d'un condensateur — 3 | 2

▹ *Temps de réponse.*

1 Un condensateur est constitué de deux armatures se faisant face séparées par un isolant. Si cet isolant n'est pas parfait, alors des charges peuvent malgré tout parvenir à passer d'une armature à l'autre en traversant l'isolant. Ainsi, **la décharge spontanée est due à l'imperfection de l'isolant du condensateur.**

2 Même imparfait, un condensateur est d'abord et avant tout … un condensateur : l'élément le plus important de la modélisation est donc un condensateur idéal. Parmi les dipôles modèles « de référence », celui qui permet de modéliser un déplacement de charge au travers d'un milieu pas parfaitement conducteur est une résistance, qui constitue donc le deuxième élément de la modélisation. Reste à savoir comment placer cette résistance. Si elle est montée en série avec le condensateur, alors en régime permanent celui-ci impose son comportement d'interrupteur ouvert et aucun courant ne circule dans la branche où il se trouve : cela ne correspond pas à la situation expérimentale envisagée. On en déduit que **la résistance de fuite doit être placée en parallèle du condensateur** : dans ce cas, même en régime permanent, ce modèle permet de décrire qu'un courant peut traverser le condensateur non-idéal.

3 On se trouve avec un circuit RC série sans générateur, dont l'équation différentielle s'écrit

$$R_\mathrm{f} C \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u = 0 \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \underbrace{\frac{1}{RC}}_{=1/\tau} u = 0\,.$$

L'équation étant homogène, ses solutions sont de la forme

$$u(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + 0\,,$$

et à l'instant initial

$$u(0) \underset{\text{expr}}{\overset{\uparrow}{=}} A \underset{\text{CI}}{\overset{\uparrow}{=}} E \qquad \text{d'où} \qquad u(t) = E\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\,.$$

Ici, l'énoncé indique qu'à $t_1 = 2\,\mathrm{min} = 120\,\mathrm{s}$, $u(t_1) = E/10$ c'est-à-dire

$$\frac{E}{10} = E\,\mathrm{e}^{-t_1/\tau} \qquad \text{soit} \qquad t_1 = \tau \ln 10$$

On déduit alors de l'expression de τ

$$\boxed{R_\mathrm{f} = \frac{t_1}{C \ln 10} \simeq 5 \cdot 10^8\,\Omega\,.}$$

Exercice 7 : Charge par paliers d'un condensateur 3 | 3

▹ *Rendement énergétique.*

1 Raisonnons sur une étape de cette charge, avec un générateur de fém $e_k = kE/N$ où $1 \leq k \leq N$ entre deux instant t_k et t_{k+1}. La charge étant supposée complète, la tension aux bornes du condensateur passe alors de $(k-1)E/N$ à kE/N. Le travail électrique fourni par le générateur vaut donc

$$W_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} e_k\, i(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{kE}{N}\, C \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \frac{kCE}{N}\Big(u_C(t_{k+1}) - u_C(t_k)\Big)$$

ce qui donne finalement

$$W_k = \frac{kCE^2}{N^2}\,.$$

L'énergie totale fournie par le générateur vaut donc

$$W_\mathrm{tot} = \sum_{k=1}^{N} W_k = \frac{CE^2}{N^2} \sum_{k=1}^{N} k = \frac{CE^2}{N^2} \frac{N(N+1)}{2}$$

d'où on trouve finalement

$$W_\mathrm{tot} = \frac{CE^2}{2}\left(1 + \frac{1}{N}\right)\,.$$

Au cours de ces charges, la tension aux bornes du condensateur varie de 0 à E, l'énergie qu'il stocke varie donc de

$$\Delta\mathcal{E}_C = \frac{1}{2} C E^2 - 0$$

Le rendement énergétique de la charge vaut donc

$$\boxed{\rho = \frac{\Delta\mathcal{E}_C}{W_{\text{tot}}} = \frac{1}{1+1/N} = \frac{N}{N+1}\,.}$$

2 On veut

$$\frac{N}{N+1} > \frac{9}{10} \qquad \text{soit} \qquad 10N > 9(N+1) \qquad \text{donc} \qquad \boxed{N > 9\,.}$$

Exercice 8 : Bilan de puissance du régime libre d'un circuit RC série 3 | 3

▹ *Aspects énergétiques.*

1 La puissance électrique reçue par un condensateur orienté en convention générateur vaut

$$\mathcal{P} = u\,i = C\,u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Cu^2\right)\,.$$

La puissance peut donc s'écrire comme la dérivée d'une fonction (ce n'est pas toujours le cas !), qui s'interprète alors comme l'énergie stockée par le dipôle,

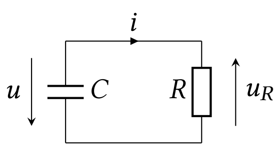
$$\boxed{\mathcal{E}_C = \frac{1}{2}Cu^2\,.}$$

2 Comme il n'y a aucun générateur, l'énergie stockée dans le condensateur à l'instant final diffère de l'énergie initiale uniquement par le travail électrique élémentaire fourni à la résistance,

$$\mathcal{E}_C(t+\mathrm{d}t) = \mathcal{E}_C(t) - \delta W_R \qquad \text{soit} \qquad \mathcal{E}_C(t+\mathrm{d}t) - \mathcal{E}_C(t) = -\mathcal{P}_\mathrm{J}\,\mathrm{d}t$$

En notant $\mathrm{d}\mathcal{E}_C$ la variation d'énergie pendant cette durée, et en divisant par $\mathrm{d}t$, il vient

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_C}{\mathrm{d}t} = -\mathcal{P}_\mathrm{J}\,.}$$



3 Pour établir l'équation différentielle demandée, il faut exprimer l'énergie stockée dans le condensateur et la puissance dissipée par effet Joule en termes de la tension u. La démonstration passe forcément par un schéma du circuit pour orienter les dipôles et exprimer les puissances avec le signe correct, en revanche le résultat ne dépendra pas de la convention choisie.

La puissance dissipée par effet Joule vaut

$$\mathcal{P}_\mathrm{J} = u_R \times i = \frac{u_R^2}{R} = \frac{u^2}{R}$$

car d'après la loi des mailles $u_R = -u$. Par ailleurs, comme démontré à la question 1, l'énergie stockée par le condensateur vaut $\mathcal{E}_C = \frac{1}{2}\,C\,u^2$. L'équation différentielle s'écrit donc

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\,C\,u^2\right) + \frac{u^2}{R} = 0\,.}$$

Un calcul explicite de la dérivée donne

$$\frac{1}{2}\,C \times 2\,u\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u^2}{R} = 0\,,$$

relation qui doit être vérifiée à tout instant. Comme u n'est pas nulle à tout instant, on peut simplifier par u pour obtenir

$$C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{R} = 0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}\,u = 0\,.}$$

ce qui est bien l'équation différentielle donnée par la loi des mailles.

4 Pour obtenir cette équation différentielle sur $\mathcal{E}_C$, il faut exprimer $\mathcal{P}_\mathrm{J}$ en fonction de $\mathcal{E}_C$. Pour cela, remplaçons u^2 dans le membre de droite par $2\mathcal{E}_C/C$,

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_C}{\mathrm{d}t} = -\frac{2\mathcal{E}_C}{RC} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_C}{\mathrm{d}t} + \frac{2}{RC}\,\mathcal{E}_C = 0}$$

5 Par analyse de l'équation différentielle, on identifie le temps caractéristique des échanges d'énergie comme valant

$$\boxed{\tau_\mathrm{e} = \frac{RC}{2}\,.}$$

Cela est confirmé par la résolution de l'équation différentielle portant directement sur u, qui dans le cas de la décharge vaut

$$u(t) = U_0\,\mathrm{e}^{-t/\tau_u}$$

où U_0 est la tension initiale aux bornes du condensateur et $\tau_u = RC$ le temps caractéristique des variations de tension. En effet, d'après cette expression,

$$\mathcal{E}_C = \frac{1}{2}\,C\,u^2 = \frac{1}{2}\,C\,E^2\,\mathrm{e}^{-2t/\tau_u} \equiv \mathcal{E}_{C,0}\,\mathrm{e}^{-t/\tau_\mathrm{e}}\,.$$

Le temps caractéristique de variation de l'énergie dans le condensateur est bien

$$\boxed{\tau_\mathrm{e} = \frac{\tau_u}{2} = \frac{RC}{2}\,.}$$