Transitoires du premier ordre

Difficulté d'analyse et compréhension, initiative requise ;
Difficulté technique et calculatoire ;
Exercice important.

Flasher ou cliquer pour accéder au corrigé

Se préparer

Applications de cours

Ces applications de cours sont des briques élémentaires des raisonnements à mener dans les exercices : les maîtriser est incontournable. Elles sont toutes traitées de manière exhaustive dans le cours.

E2.1 - En raisonnant par analyse dimensionnelle, établir l'expression du temps caractéristique τ d'un circuit RC ou RL, au choix de l'interrogateur. On supposera que τ peut a priori dépendre des composants et de l'amplitude E de l'échelon de tension imposé.

E2.2 - Établir et résoudre l'équation différentielle vérifiée par l'intensité dans un condensateur soumis à un échelon de tension $0 \to E$ à l'instant initial. Représenter l'allure de la courbe $i(t)$.

E2.3 - Établir et résoudre l'équation différentielle vérifiée par l'intensité dans une bobine alimentée par un générateur de fém constante E après fermeture de l'interrupteur à l'instant initial. Représenter l'allure de la courbe $i(t)$.

E2.4 - La tension aux bornes d'un condensateur soumis à un échelon de tension a pour expression

$$u_C(t) = E\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right) .$$

Procéder au bilan énergétique : calculer de manière séparée le travail électrique total fourni par le générateur, l'énergie reçue par le condensateur et l'énergie dissipée dans la résistance. Calculer le rendement énergétique. Commenter.

E2.5 - Écrire un code Python permettant de résoudre par la méthode d'Euler explicite l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}u = \frac{e(t)}{\tau} .$$

- Avant toute écriture de code, on commencera par établir la relation de récurrence pertinente.
- Les paramètres `N`, `tau` et `dt` seront considérés comme des variables globales déjà définies, et on supposera disposer d'une liste `e` remplie de manière adéquate.
- L'étudiant devra construire correctement (initialisation comprise) les listes `t` et `u`.

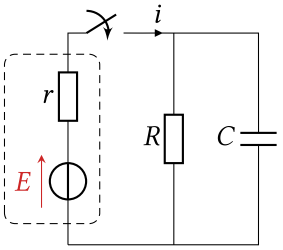
Cahier d'Entraînement

Le *Cahier d'Entraînement* est un projet collaboratif mené par des enseignants de CPGE, proposant aux étudiants des entraînements leur permettant de travailler en autonomie sur des techniques et « réflexes » utiles dans les exercices, en particulier calculatoires. Il est librement téléchargeable en scannant ou cliquant sur le QR-code ci-contre.

$\leadsto$ pour ce chapitre : 4.8, 4.9, 4.10, 4.12, 4.13, 4.14 et 4.15.

Exercice 1 : Transitoire d'un circuit RC parallèle 2 | 2 |

- *Équation différentielle ;*
- *Recherche de condition initiale.*



Considérons le circuit ci-contre, dans lequel un générateur est branché en parallèle d'une cellule RC à l'instant $t = 0$. Le générateur est décrit par son modèle de Thévenin, de fém E constante et de résistance interne r.

1 - Établir l'équation différentielle vérifiée par le courant i débité par le générateur.

2 - Montrer que $i(0^+) = E/r$.

3 - En déduire l'expression de $i(t)$.

✎ ***Correction —*** *Raisonnons avec les notations de la figure 1.*

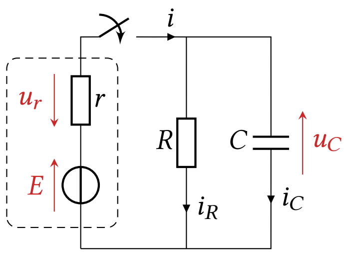


Figure 1 – Schéma du montage.

1 - *D'après la loi des nœuds et les lois de comportement des dipoles,*

$$i \underset{LN}{\underset{\uparrow}{=}} i_R + i_C \underset{LC}{\underset{\uparrow}{=}} \frac{u_C}{R} + C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$$

Question d'analyse 1 - Justifier que $i_R = u_C/R$, alors que u_C est la tension aux bornes du condensateur.

D'après la loi des mailles,

$$E = u_r + u_C \qquad \text{donc} \qquad u_C = E - u_r = E - ri$$

ce qui conduit à

$$i = \frac{E - ri}{R} - rC\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\,.$$

Question d'analyse 2 - Pourquoi la tension aux bornes de R n'apparaît-elle pas dans la loi des mailles ?

Question d'analyse 3 - Pourquoi la dérivée de E n'apparaît-elle pas ?

En réorganisant les termes, on obtient

$$rC\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \left(1 + \frac{r}{R}\right) i = \frac{E}{R} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{rC}\left(1 + \frac{r}{R}\right) i = \frac{E}{RrC}\,.}$$

On reconnaît ainsi une équation différentielle du premier ordre de temps caractéristique τ tel que

$$\boxed{\frac{1}{\tau} = \frac{1}{C}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R}\right).}$$

Question d'analyse 4 - Pourquoi n'identifie-t-on pas $1/\tau = 1 + r/R$ dès la première étape ?

Question d'analyse 5 - Le terme $1/r + 1/R$ apparaît-il car les deux résistances sont montées en parallèles ?

2 - *À l'instant $t = 0^-$, c'est-à-dire juste avant la fermeture de l'interrupteur, aucun courant ne parcourt le circuit donc*

$$i(0^-) = i_R(0^-) = i_C(0^-) = 0\,.$$

La tension aux bornes des résistances est donc nulle à cet instant, et la tension $u_C(0^-)$ aux bornes du condensateur aussi puisqu'il est monté en parallèle de R.

Question d'analyse 6 - *Pourquoi est-il faux d'en déduire $i(0^+) = 0$?*

Considérons maintenant l'instant $t = 0^+$. D'après la loi des mailles,

$$u_C(0^+) = E - r\,i(0^+)$$

Puisque $u_C(0^+) = 0$, il vient directement

$$\boxed{i(0^+) = \frac{E}{r}\,.}$$

Question d'analyse 7 - *Quel argument permet d'affirmer que $u_C(0^+) = 0$?*

3 - *Cherchons une solution particulière constante i_p :*

$$0 + \frac{1}{C}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R}\right) i_p = \frac{E}{rRC} \qquad \textit{d'où} \qquad i_p = \frac{E}{r+R}\,.$$

Question d'analyse 8 - *Pourquoi la solution particulière est-elle cherchée constante ?*

Ainsi, les solutions de cette équation différentielle sont de la forme

$$i(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + \frac{E}{r+R}$$

À l'instant initial,

$$i(0^+) \underset{\substack{\uparrow \\ CI}}{=} \frac{E}{r} \underset{\substack{\uparrow \\ expr}}{=} A + \frac{E}{r+R} \qquad \textit{d'où} \qquad A = \frac{R}{r(r+R)}E\,.$$

Question d'analyse 9 - *Poser le calcul conduisant à l'expression de A.*

Finalement,

$$\boxed{i(t) = \frac{R}{r(r+R)}E\;\mathrm{e}^{-t/\tau} + \frac{E}{r+R} = \frac{E}{r+R}\left(1 + \frac{R}{r}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\right)\,.}$$

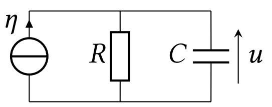
Question d'analyse 10 - *Proposer un test de vraisemblance du résultat autre que l'homogénéité.*

Mise en équation de circuits

Exercice 2 : Circuit RC soumis à un échelon de courant

2 | 1

- *Équation différentielle ;*
- *Recherche de condition initiale.*



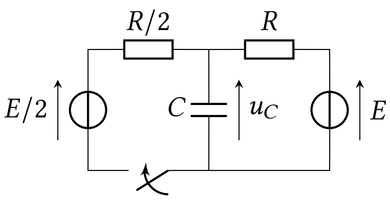
La source idéale de courant du circuit ci-contre impose un échelon,

$$\eta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ I_0 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

Établir et résoudre l'équation différentielle vérifiée par la tension u pour $t > 0$.

Exercice 3 : Condensateur alimenté par deux générateurs — oral CCINP MP | 2 | 2 |

- *Équation différentielle ;*
- *Recherche de condition initiale ;*
- *Puissance électrique.*



Dans le montage ci-contre, l'interrupteur est fermé à l'instant $t = 0$.

1 - Établir l'équation différentielle vérifiée par u_C.

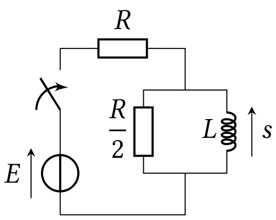
2 - Résoudre cette équation et représenter la courbe de la solution.

3 - Déterminer le temps t_1 nécessaire pour que la valeur finale soit atteinte à 1 % près.

4 - Exprimer la puissance dissipée. Interpréter sa valeur finale.

Exercice 4 : Circuit RL à deux mailles — oral Mines-Télécom PSI | 2 | 2 |

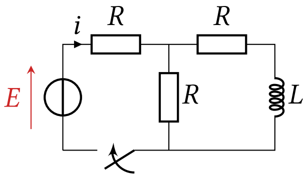
- *Équation différentielle ;*
- *Recherche de condition initiale.*



L'interrupteur est fermé à l'instant $t = 0$. Étudier l'évolution de $s(t)$ et tracer sa courbe.

Exercice 5 : Circuit RL à deux mailles — 2 | 2

- *Équation différentielle ;*
- *Recherche de condition initiale.*



L'interrupteur est fermé à l'instant $t = 0$. Établir l'expression de $i(t)$ et tracer son allure.

Pour aller plus loin

Exercice 6 : Résistance de fuite d'un condensateur — 3 | 2

- *Temps de réponse.*

On démonte d'un circuit un condensateur de capacité $C = 100\,\text{pF}$ initialement chargé sous une tension $E = 10\,\text{V}$ et on le laisse posé sur la paillasse. Au bout de deux minutes, la tension aux bornes du condensateur vaut 1 V.

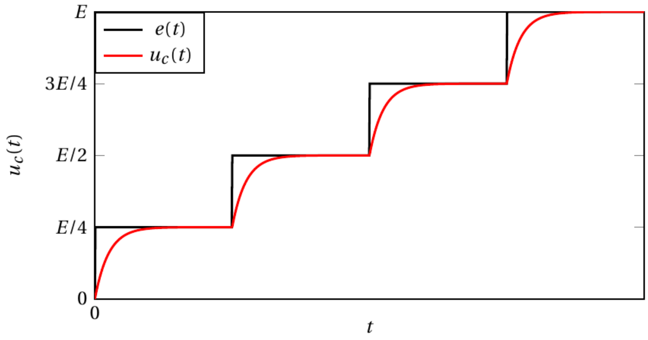
1 - Proposer une origine physique à cette décharge spontanée du condensateur.

2 - Justifier qualitativement qu'un condensateur se déchargeant spontanément peut se modéliser par l'ajout d'une résistance en parallèle d'un condensateur idéal. Cette résistance, notée R_f, est appelée résistance de fuite ou résistance d'isolation du condensateur.

3 - Calculer numériquement (mais sans calculatrice !) l'ordre de grandeur de la résistance de fuite du condensateur considéré. On donne $\ln(10) \simeq 2{,}3$.

Exercice 7 : Charge par paliers d'un condensateur 3 | 3

▹ *Rendement énergétique.*



Un condensateur est chargé via un circuit RC série jusqu'à une tension E par paliers successifs d'amplitude E/N. On suppose chaque palier suffisamment long pour que la charge soit complète.

Question : Calculer en fonction de N le rendement énergétique ρ de cette charge. Combien de paliers sont nécessaires pour avoir $\rho > 90\,\%$?

Exercice 8 : Bilan de puissance du régime libre d'un circuit RC série 3 | 3

▹ *Aspects énergétiques.*

Considérons un circuit RC en régime libre, formé d'un condensateur de capacité C initialement chargé se déchargeant dans une résistance R. Aucun générateur n'alimente le circuit.

1 - Établir l'expression de l'énergie stockée dans un condensateur.

2 - En raisonnant énergétiquement pendant un petit intervalle de temps $\mathrm{d}t$, montrer que l'énergie $\mathcal{E}_C$ stockée par le condensateur et la puissance $\mathcal{P}_\mathrm{J}$ dissipée par effet Joule sont reliées par

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_C}{\mathrm{d}t} = -\mathcal{P}_\mathrm{J}\,.$$

3 - Écrire ce bilan sous la forme d'une équation différentielle portant sur la tension u aux bornes du condensateur. Montrer qu'elle est équivalente à celle obtenue par la loi des mailles.

4 - En déduire une équation différentielle portant sur l'énergie $\mathcal{E}_C$.

5 - Déduire de cette équation le temps τ_e caractéristique des échanges d'énergie dans le système. Retrouver ce résultat en partant directement de l'expression de $\mathcal{E}_C$ et de la solution $u(t)$ établie en cours pour ce circuit.