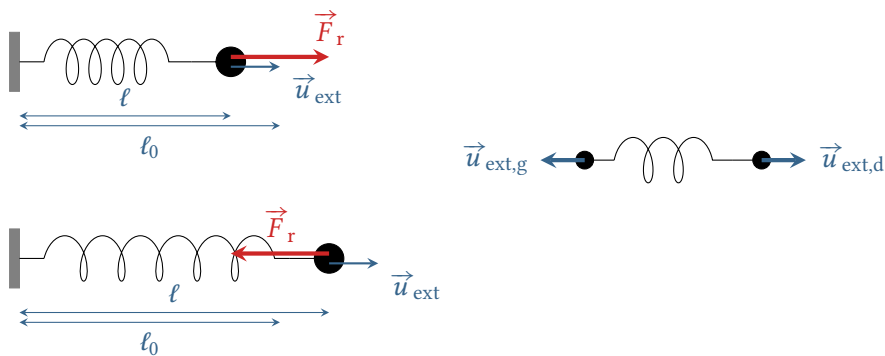


Régime libre des oscillateurs

I - Oscillateur harmonique

- Force de rappel d'un ressort : $\vec{F}_r = -k(\ell - \ell_0)\vec{u}_{\text{ext}}$

k constante de raideur ; ℓ_0 longueur à vide ; $\Delta\ell = \ell - \ell_0$ allongement.



- Forme canonique :

préfacteur 1 devant la dérivée seconde

pas de dérivée première

pulsation propre ($[\omega_0] = \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$)

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \omega_0^2 s = \text{des choses qui dépendent de } e$$

oscillateur masse-ressort : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ oscillateur LC : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

- Résolution :

Forme générale des solutions :

$$s(t) = \underbrace{A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)}_{\substack{\text{solution homogène} \\ \text{à connaître par cœur}}} + \underbrace{s_p(t)}_{\substack{\text{solution particulière} \\ \text{à chercher de la même forme que le forçage}}}$$

Utilisation de deux conditions initiales :

$$s(t=0^+) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CI}}}{=} S_0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{expr}}}{=} A \cos(0) + B \sin(0) + s_p(0) \quad \text{et} \quad \frac{ds}{dt}(0^+) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CI}}}{=} \dot{S}_0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{expr}}}{=} -A\omega_0 \sin(0) + \omega_0 B \cos(0)$$

- Amplitude et phase : $s_H(t) = S_m \cos(\omega_0 t + \varphi) \rightsquigarrow$ période des oscillations $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$.
- Bilan énergétique : OH = conservation de l'énergie totale et oscillation d'une forme à une autre.

II - Oscillateur amorti

• Forme canonique :

préfacteur 1 devant la dérivée seconde

facteur de qualité $[Q] = 1$

pulsation propre ($[\omega_0] = \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$)

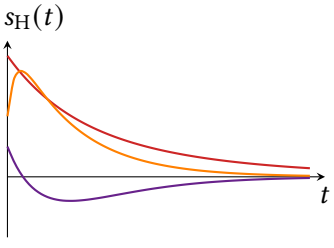
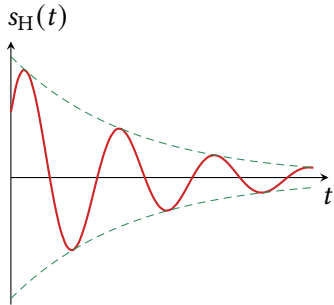
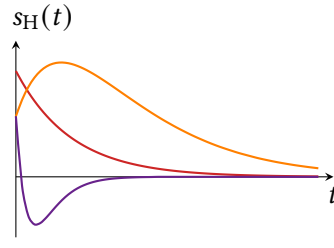
$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = \text{des choses qui dépendent de } e$$

Circuit RLC : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$

• Polynôme caractéristique : $d^n s / dt^n \mapsto r^n$, pas de second membre.

p.ex. $\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 E \quad \mapsto \quad r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$

• Solutions homogènes :

	Régime apériodique	Régime pseudo-périodique	Régime critique
Aspect énergétique	forte dissipation	faible dissipation	cas limite
Facteur de qualité	$Q < 1/2$	$Q > 1/2$	$Q = 1/2$
Discriminant du polynôme carac.	$\Delta > 0$	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$
Racines	$r_{\pm} \in \mathbb{R}$	$r_{\pm} = -\frac{1}{\tau} \pm i \omega_p \in \mathbb{C}$	$r = -\omega_0$
Solution homogène	$Ae^{r_+ t} + Be^{r_- t}$	$(A \cos(\omega_p t) + B \sin(\omega_p t)) e^{-t/\tau}$	$(At + B) e^{-\omega_0 t}$
Exemples d'allures possibles			
Durée du transitoire	Augmente si Q diminue	Augmente si Q augmente	Minimale (pour un même ω_0)

• Régime pseudo-périodique :

- ▷ pseudo-pulsation $\omega_p = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \simeq \omega_0$ dès que $Q \gtrsim 2$.
- ▷ nombre d'oscillations pendant le transitoire $\simeq Q$.

• Limite de l'oscillateur harmonique : $Q \rightarrow \infty$