Version complétée

Régime libre des oscillateurs

Plan du cours

I Oscillateur harmonique **2**
- I.A Exemple : oscillateur masse-ressort horizontal . . . 2
- I.B Exemple : circuit LC série . . . 4
- I.C Résolution de l'équation différentielle . . . 4
- I.D Bilan énergétique . . . 6

II Équation différentielle d'un oscillateur amorti **7**
- II.A Exemple : circuit RLC série . . . 7
- II.B Exemple : oscillateur masse-ressort amorti . . . 8
- II.C Forme canonique . . . 9

III Résolution de l'équation différentielle **11**
- III.A Forme générale des solutions, polynôme caractéristique . . . 11
- III.B Fort amortissement : régime apériodique ou sur-amorti . . . 12
- III.C Faible amortissement : régime pseudo-périodique . . . 13
- III.D Cas limite intermédiaire : régime apériodique critique . . . 15
- III.E Un exemple de résolution complète . . . 16

R Résultat à connaître par cœur.

M Méthode à retenir, mais pas le résultat.

D Démonstration à savoir refaire.

Q Aspect qualitatif uniquement.

Les paragraphes sans mention en marge sont là pour faciliter votre compréhension ou pour votre culture mais n'ont pas forcément besoin d'être appris en tant que tel.

Ce chapitre aborde l'étude des systèmes oscillants sous l'angle de leurs oscillations libres, c'est-à-dire en réponse à un échelon, autrement dit à une perturbation passant d'une valeur constante à une autre. Malgré des exemples un peu académiques, les notions étudiées ont de multiples applications et permettent de comprendre de très nombreux phénomènes ou dispostifs : propagation du son dans les solides, vibrations des molécules et techniques de spectroscopies, oscillations d'une règle fixée à une extrémité, amortisseur de voiture ou de vélo, etc.

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

I - Oscillateur harmonique

Un **oscillateur harmonique** est un oscillateur « parfait », dont les oscillations ne s'amortissent jamais et perdurent indéfiniment.

I.A - Exemple : oscillateur masse-ressort horizontal

- **Force exercée par un ressort**

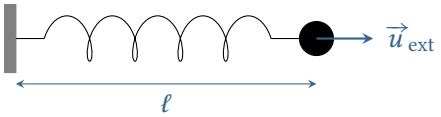
Qu'il soit étendu ou comprimé, les forces exercées par ressort ont toujours tendance à le ramener à sa longueur « naturelle », appelée **longueur à vide** ℓ_0. La (constante de) **raideur** k du ressort quantifie la difficulté à l'étirer ou le comprimer.

R

Un objet accroché à l'extrémité d'un ressort idéal subit la **force de rappel élastique**

$$\vec{F}_\mathrm{r} = -k\,(\ell - \ell_0)\,\vec{u}_\mathrm{ext}$$

où k est la **constante de raideur**,
$\Delta\ell = \ell - \ell_0$ l'**allongement** du ressort avec ℓ sa longueur instantanée et ℓ_0 sa longueur à vide
et $\vec{u}_\mathrm{ext}$ un vecteur unitaire tangent au ressort, dirigé vers l'extérieur du ressort.



Unité de la constante de raideur k :

M

On a directement $[k] = \mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-1}$, et on peut se ramener aux unités de base du système international puisque

$$[F_\mathrm{r}] = [ma] = \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2} \qquad \text{d'où} \qquad [k] = \mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-2}$$

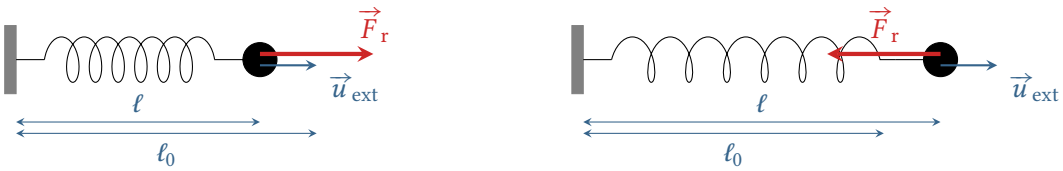
Les deux unités se rencontrent en pratique dans les exercices.

Espace 1

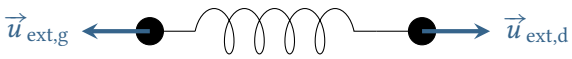
Q

Attention ! Cette loi de force est plus subtile qu'il n'y paraît !

- le sens de la force est inconnu tant que l'on ne sait pas si le ressort est comprimé ou étendu ;
- il n'est donc pas possible de dessiner la force exercée par un ressort sans faire d'hypothèse sur le signe de l'allongement, autrement dit sans indiquer ℓ_0 sur le schéma ;



- le sens du vecteur $\vec{u}_\mathrm{ext}$ dépend non seulement de l'orientation du ressort mais aussi de la position de l'objet.

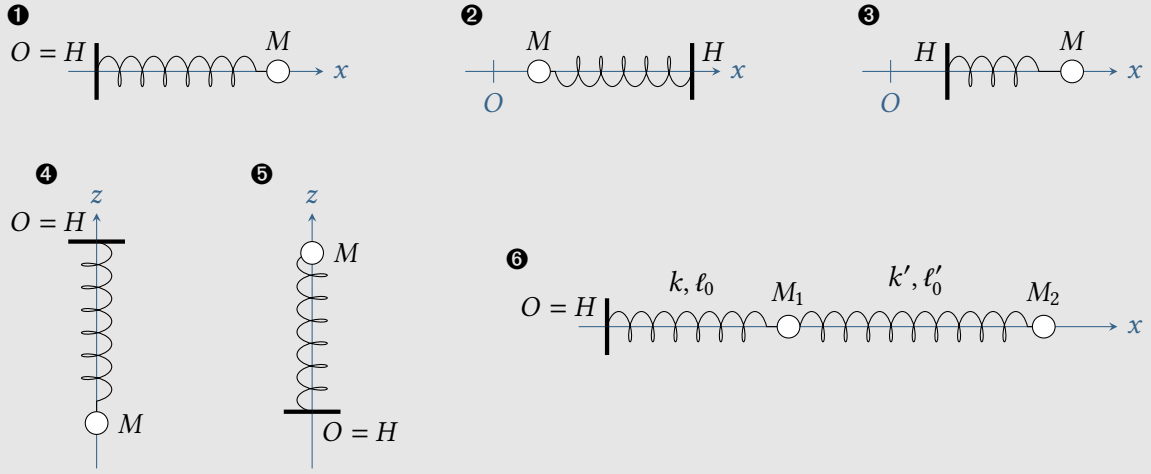


BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

Application 1 : Forces exercées par des ressorts M

Exprimer la force exercée sur chaque point M, en fonction notamment de la coordonnée x_H ou z_H du point H auquel le ressort est attaché.



- **Période des oscillations d'un système masse-ressort horizontal**

Avant de se lancer dans les équations différentielles, commençons par déterminer par analyse dimensionnelle la façon dont la période des oscillations d'un système masse-ressort évolue.

Application 2 : Période des oscillations M

Par analyse dimensionnelle, estimer à un facteur numérique près la période T_0 des oscillations d'un système masse-ressort. Comment faut-il modifier la masse pour que la période des oscillations double ?

- **Équation du mouvement**

Application 3 : Équation du mouvement d'un système masse-ressort M

Établir l'équation du mouvement d'un système masse-ressort horizontal évoluant le long d'un axe (Ox), en négligeant tous les frottements, et l'écrire sous forme canonique. Le ressort est fixé au point origine O.

R

La forme canonique d'une équation différentielle d'oscillateur harmonique comme celle ci-dessus portant sur une grandeur s en réponse à un forçage e s'écrit

pas de dérivée première

préfacteur 1 devant la dérivée seconde

pulsation propre

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2\, s}_{\text{membre de gauche : ce qui implique la fonction cherchée}} = \underbrace{\text{des choses qui dépendent de } e}_{\text{membre de droite ou \textbf{second membre} : le reste = ce qui implique le forçage}}$$

Cette équation différentielle est dite

- **linéaire** : si un forçage $e_1(t)$ donne une solution $s_1(t)$, un forçage $e_2(t)$ une solution $s_2(t)$, alors un forçage $\lambda_1 e_1(t) + \lambda_2 e_2(t)$ conduit à une solution $\lambda_1 s_1(t) + \lambda_2 s_2(t)$;
- **du second ordre** car la dérivée d'ordre le plus élevé est une dérivée seconde ;
- **à coefficients constants** car ω_0 ne dépend pas du temps.

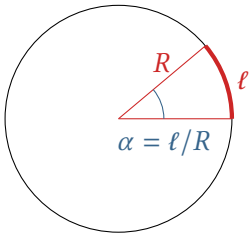
BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

Dimensionnellement :
$[\omega_0]^2 = \mathrm{s}^{-2}$ soit $[\omega_0] = \mathrm{s}^{-1}$

Espace 2

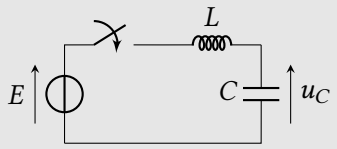
... mais nous comprendrons par la suite que la bonne unité est plutôt $[\omega_0] = \mathrm{rad} \cdot \mathrm{s}^{-1}$.

> ***Remarque :*** *Par définition, un angle en radian est défini comme le rapport entre la longueur ℓ de l'arc de cercle intercepté et le rayon R du cercle. Bien qu'ayant une* unité, *un angle n'a donc pas de* dimension.
>
> 
>
>
> *Un pourcentage est un autre exemple que vous connaissez bien de grandeur ayant une unité mais pas de dimension. On peut également citer les concentrations (p.ex. de polluants ou de GES dans l'atmosphère) exprimées en ppm « partie par million », qui comptent le nombre de molécule de l'espèce cherchée par million de molécule d'air.*

I.B - Exemple : circuit LC série

M

Application 4 : Équation différentielle d'un circuit LC



Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension u_C après la fermeture de l'interrupteur à $t = 0$. L'écrire sous forme canonique et identifier la pulsation propre du circuit.

I.C - Résolution de l'équation différentielle

- **Forme des solutions**

R

Comme pour toute équation différentielle linéaire, une solution quelconque s'écrit comme la somme de la solution générale de l'équation homogène associée et d'une solution particulière.

Solution particulière : Pour trouver efficacement une solution particulière x_P, on la cherche de la même forme que le forçage (c'est-à-dire que le second membre), en l'occurence constante.

Solution homogène : L'équation homogène associée est celle dans laquelle le second membre est nul,

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + {\omega_0}^2 x = 0$$

Résoudre cette équation demande d'identifier les racines de son **polynôme caractéristique**, de variable notée r, qui s'obtient en identifiant la dérivée n-ième à r^n.

Pour l'oscillateur harmonique :

$r^2 + \omega_0^2 \underbrace{r^0}_{=1} = 0$ soit $r^2 = -{\omega_0}^2$ d'où on déduit les deux racines $r_\pm = \pm \mathrm{i}\omega_0$.

Espace 3

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

On en déduit la forme générale des solutions homogènes :

$$x_{\mathrm{H}}(t) = a\,\mathrm{e}^{r_+ t} + b\,\mathrm{e}^{r_- t} = a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t} + b\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t} \qquad \text{avec} \qquad (a,b) \in \mathbb{C}^2\,.$$

La position $x(t)$ étant évidemment à valeurs réelles, les constantes a et b sont conjuguées : cette écriture n'est donc pas la plus pratique ! Poser $a = A - \mathrm{i}B$ donne une expression plus aisément utilisable :

Les solutions de l'équation homogène d'un oscillateur harmonique s'écrivent

$$x_{\mathrm{H}}(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) \qquad \text{avec} \qquad (A,B) \in \mathbb{R}^2\,.$$

R

Ce résultat est à connaître et à utiliser sans démonstration.

> ***Remarque :*** *Le fait que la combinaison « $\omega_0 t$ » apparaisse dans un cosinus, fonction qui s'applique à un angle, justifie d'utiliser $[\omega_0] = \mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ plutôt que simplement s^{-1}.*

Solution complète : déterminer *la* solution « physique » parmi l'ensemble des solutions mathématiquement possibles demande de déterminer les constantes A et B grâce à deux conditions initiales, portant sur la fonction cherchée et sa dérivée.

- **Exemple de résolution**

Application 5 : Résolution complète pour l'oscillateur mécanique M

L'équation différentielle du mouvement d'un système masse-ressort s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + {\omega_0}^2 x = {\omega_0}^2 \ell_0\,.$$

1 - La résoudre en supposant que la masse est lâchée à l'instant initial d'une position X_0 avec une vitesse initiale V_0.

2 - Déterminer la période propre T_0 des oscillations et la fréquence propre f_0. Comparer au résultat prévu par analyse dimensionnelle.

Généralisation :

La pulsation propre d'un oscillateur harmonique renseigne sur la période de ses oscillations libres,

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \qquad \Longleftrightarrow \qquad f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

R

- **Amplitude et phase initiale**

Les solutions de l'équation d'un oscillateur harmonique en régime libre peuvent également s'écrire

$$x(t) = X_{\mathrm{m}}\cos(\omega_0 t + \varphi) + \mathrm{cte}\,,$$

où X_{m} est l'**amplitude** des oscillations et φ la **phase initiale**.

R

On montre que cette forme est équivalente à la précédente en développant le cosinus,

$$X_{\mathrm{m}}\cos(\omega_0 t + \varphi) = \underbrace{X_{\mathrm{m}}\cos\varphi}_{=A}\cos(\omega_0 t) \underbrace{- X_{\mathrm{m}}\sin\varphi}_{=B}\sin(\omega_0 t)$$

Cependant, elle est moins pratique pour utiliser les conditions initiales.

Signification physique :

▹ l'amplitude renseigne sur l'écart entre les valeurs extrêmales de $x(t)$:

$$\begin{cases} x_{\max} = X_{\mathrm{m}} + \mathrm{cte} \\ x_{\min} = -X_{\mathrm{m}} + \mathrm{cte} \end{cases} \qquad \text{donc} \qquad X_{\mathrm{m}} = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2}$$

Q

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

Espace 4

- la phase initiale renseigne sur les instants auxquels la valeur maximale est atteinte :
  valeur maximale pour

Q

$$\omega_0 t + \varphi = 2n\pi \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad \text{soit} \qquad t = \frac{2n\pi}{\omega_0} - \frac{\varphi}{\omega_0} = nT_0 - \frac{\varphi}{\omega_0}$$

Espace 5

- Signe de φ : la vitesse initiale s'écrit

Q

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t=0) = -X_\mathrm{m}\omega_0 \sin\varphi\,,$$

  donc si $x(t)$ est croissante à l'instant initiale c'est que $\varphi < 0$.

- **Allure des solutions**

  Voir figure 1.

Q

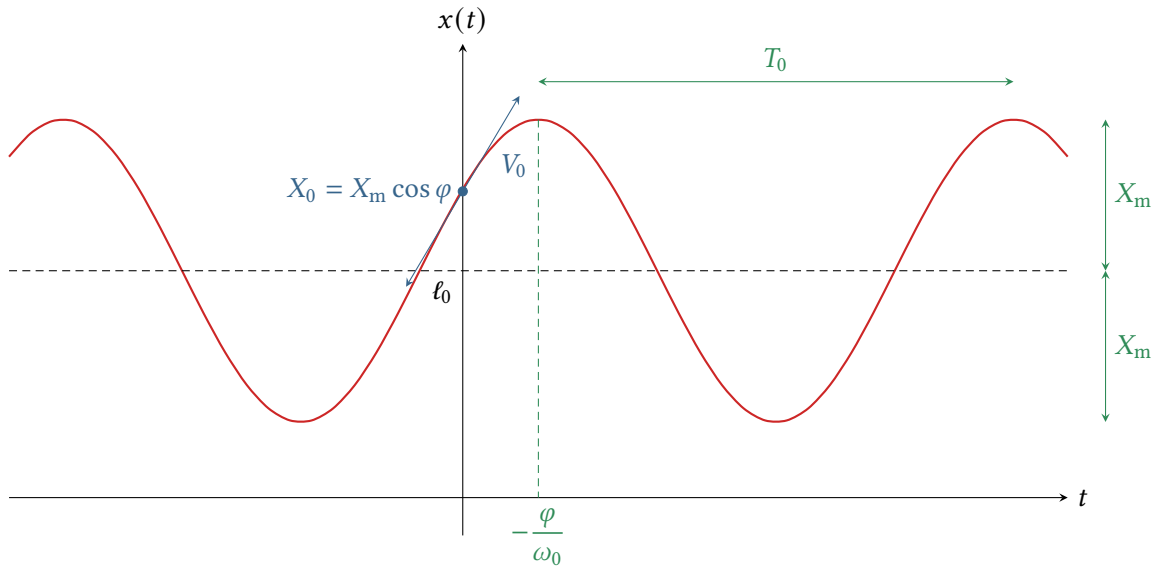
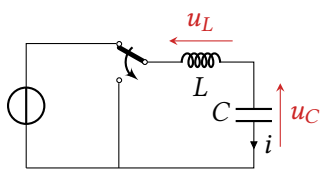


Figure 1 – Allure des oscillations harmoniques.

I.D - Bilan énergétique



M

Exemple : considérons à titre d'exemple un circuit LC série, découplé du générateur pour $t \geq 0$.

Bilan de puissance :

BY-NC-SA © Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

$$u_L + u_C \underset{\substack{\uparrow \\ \text{LM}}}{=} 0 \qquad \text{d'où} \qquad u_L i + u_C i = 0 \qquad \text{et} \qquad Li\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Cu_C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = 0$$

On identifie alors des dérivées, ce qui donne

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}Cu_C^2\right) = 0 \qquad \text{soit} \qquad \frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}Cu_C^2 = \text{cte} \qquad \text{donc} \qquad \mathcal{E}_L + \mathcal{E}_C = \text{cte}\,.$$

Espace 6

Les oscillations harmoniques traduisent une conservation de l'énergie totale,
même si l'énergie change de forme périodiquement (ici entre forme électrique et magnétique).

L'énergie mécanique d'un oscillateur masse-ressort se conserve également, se transformant périodiquement d'énergie cinétique en énergie potentielle stockée dans le ressort : nous en reparlerons dans quelques semaines.

Pour approfondir : Le calcul aurait été un peu différent si nous avions procédé au bilan en présence du générateur. Il s'écrirait alors

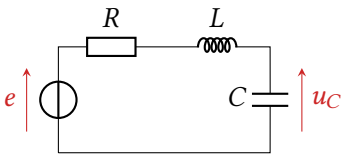
$$Li\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Cu_C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = Ei \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}Cu_C^2\right) = Ei\,.$$

L'énergie électromagnétique totale stockée dans la bobine et le condensateur n'est alors plus constante. Néanmoins, on peut établir l'expression de i en résolvant une équation différentielle (il faudrait alors préciser les conditions initiales), et montrer qu'il s'agit toujours d'une fonction de moyenne nulle, quelles que soient ces conditions initiales. Ainsi, la puissance Ei fournie au circuit par le générateur est de moyenne nulle également. Cela signifie que le générateur fournit et prélève périodiquement de l'énergie au circuit, mais que le bilan global de ces échanges est neutre. Autrement dit, l'énergie électromagnétique du circuit LC reste conservée, non plus à tout instant, mais seulement en moyenne. ■

II - Équation différentielle d'un oscillateur amorti

II.A - Exemple : circuit RLC série

- **Étude expérimentale**



Étudions la réponse d'un circuit RLC série en réponse à un échelon de tension $0 \longrightarrow E$ imposé à l'instant $t = 0$.

- Si la résistance est suffisamment petite, le régime transitoire présente des oscillations amorties : il est dit **pseudo-périodique** ;
- Si la résistance est suffisamment grande, le régime transitoire ne présente plus d'oscillations : il est dit **apériodique** ou **sur-amorti** ;
- La durée du régime transitoire est minimale pour la valeur limite de résistance qui sépare les deux régimes.

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

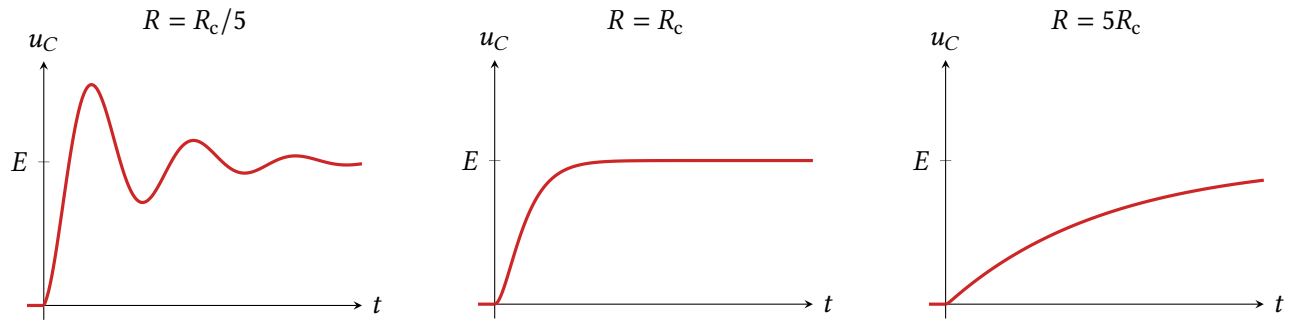


Figure 2 – Régimes transitoires d'un circuit RLC.

- **Analyse dimensionnelle**

L'analyse du régime pseudo-périodique montre que le système présente *deux* temps caractéristiques : la période des oscillations et le temps caractéristique sur lequel leur amplitude s'amortit.

⇝ l'analyse dimensionnelle est impuissante dans cette situation : le système issu de l'équation aux dimensions est sous-déterminé, c'est-à-dire qu'il n'admet pas de solution unique.

R

L'analyse dimensionnelle n'apporte plus aucune information
dès lors que plusieurs paramètres caractéristiques de même dimension interviennent dans le problème.

Pour approfondir : Procédons à l'analyse dimensionnelle du système, en cherchant un temps caractéristique

$$\tau = R^n C^p L^q \,.$$

L'équation aux dimensions donne

$$\mathrm{s} = (\mathrm{V}\cdot\mathrm{A}^{-1})^n\,(\mathrm{A}\cdot\mathrm{s}\cdot\mathrm{V}^{-1})^p\,(\mathrm{V}\cdot\mathrm{s}\cdot\mathrm{A}^{-1})^q \qquad \text{d'où} \qquad \begin{cases} 1 = p + q \\ 0 = n - p + q \\ 0 = -n + p - q \end{cases}$$

Les deux dernières lignes sont équivalentes : il manque une équation pour que le système admette une unique solution. Il impose néanmoins $q = 1 - p$ et $n = p - q = 2p - 1$, ce qui montre que toute combinaison de la forme $R^{2p-1}C^pL^{1-p}$ est homogène à un temps. Notons qu'on y retrouve les classiques RC ($p = 1$), L/R ($p = 0$) et $\sqrt{LC}$ ($p = 1/2$). ■

- **Mise en équation**

M

Application 6 : Équation différentielle du circuit RLC série

Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension u_C.

II.B - Exemple : oscillateur masse-ressort amorti

M

Application 7 : Équation du mouvement d'un système masse-ressort vertical amorti

Établir l'équation du mouvement d'un système masse-ressort vertical, en prenant en compte une force de frottement linéaire de coefficient λ. On considérera un axe (Oz) vertical vers le bas, le ressort étant fixé au point origine O.

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

II.C - Forme canonique

R

La forme canonique d'une équation différentielle d'oscillateur amorti comme celle ci-dessus portant sur une grandeur s en réponse à un forçage e s'écrit

préfacteur 1 devant la dérivée seconde

facteur de qualité

pulsation propre

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 s}_{\text{membre de gauche : ce qui implique la fonction cherchée}} = \underbrace{\text{des choses qui dépendent de } e}_{\text{membre de droite ou \textbf{second membre} : le reste = ce qui implique le forçage}}$$

Il s'agit de nouveau d'une équation différentielle linéaire, du second ordre, à coefficients constants.

- Dimensionnellement :

Q

pour une dérivée seconde $\left[\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\right] = \frac{[s]}{\mathrm{s}^2}$, d'où on déduit :
$[\omega_0^2] = \mathrm{s}^{-2}$ donc $[\omega_0] = \mathrm{s}^{-1}$ ou plutôt $\mathrm{rad} \cdot \mathrm{s}^{-1}$
$\left[\frac{\omega_0}{Q}\right] = \mathrm{s}^{-1}$ donc Q est sans dimension.

Espace 7

- Il aurait aussi été possible d'identifier deux temps caractéristiques dans la forme canonique, l'un associé à la dérivée première et l'autre à la fonction. Cependant, il est raisonnablement intuitif que ce qui compte pour régir le comportement du système est de les comparer l'un à l'autre, donc un analogue du rapport sans dimension τ/τ' : c'est exactement ce que fait le facteur de qualité.
- Il existe une écriture alternative de la forme canonique que nous utiliserons peu en physique, mais que vous rencontrerez probablement en SI :

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + 2\sigma\omega_0\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 s = \ldots$$

où $\sigma = 1/2Q$ est appelé **taux d'amortissement**.

- Pour un système stable, c'est-à-dire tous les systèmes que nous rencontrerons cette année, le facteur de qualité (et le taux d'amortissement) est toujours positif : plus à ce sujet l'année prochaine.

M

Application 8 : Forme canonique des équations d'oscillateurs amortis

Les deux exemples précédents ont conduit aux équations différentielles

$$LC\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = E \qquad \text{et} \qquad m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} + \lambda\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + kz = k\ell_0 + mg\,.$$

Les écrire sous forme canonique en identifiant ω_0 et Q.

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

Pour un circuit RLC série,

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \text{et} \qquad Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\,.$$

Premières interprétations du facteur de qualité :

▹ *lien avec l'oscillateur harmonique :*

Q

L'équation différentielle d'un oscillateur amorti redonne celle de l'oscillateur harmonique dans la limite $Q \longrightarrow \infty$, pour faire disparaître la dérivée première.
Oscillateur électrique : OH = sans résistance, cohérent avec $Q \longrightarrow \infty$ pour $R \longrightarrow 0$
Oscillateur mécanique : OH = sans frottement, cohérent avec $Q \longrightarrow \infty$ pour $\lambda \longrightarrow 0$.

Espace 8

▹ *lien avec les différents types de régime :*

Q

pseudo-périodique $\Longleftrightarrow$ résistance ou frottement faible $\Longleftrightarrow$ Q « élevé » ;
apériodique $\Longleftrightarrow$ résistance ou frottement élevé $\Longleftrightarrow$ Q « faible »

Espace 9

Q

▹ *lien avec les phénomènes dissipatifs :* les oscillations harmoniques sont associées à la conservation de l'énergie totale du système, or ici une fraction de cette énergie est dissipée à chaque oscillation par effet Joule ou par les frottements.

→ facteur de qualité élevé = peu de dissipation = plusieurs oscillations ont lieu avant que toute l'énergie initiale ne soit dissipée ;

→ facteur de qualité faible = forte dissipation = aucune oscillation ne peut avoir lieu avant dissipation totale de l'énergie initiale.

R

Qualitativement, le facteur de qualité renseigne sur la qualité de l'oscillateur :
un oscillateur de « bonne qualité » présente peu de dissipation et de nombreuses oscillations,
un oscillateur de « mauvaise qualité » présente une forte dissipation et n'oscille pas.

Un oscillateur harmonique est un oscillateur parfait, de qualité infinie.

> ***Remarque :*** *Attention à ne pas généraliser abusivement : un mauvais* oscillateur *n'est pas forcément un mauvais* système. *Par exemple, un amortisseur de voiture s'apparente à un système masse-ressort amorti ... mais sa finalité n'est pas du tout d'osciller, et on souhaite au contraire qu'il retrouve le plus vite possible sa position d'équilibre, sans aucune oscillation.*

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

III - Résolution de l'équation différentielle

Pour fixer des notations, on s'intéresse à l'échelon montant $0 \longrightarrow E$ imposé à un circuit RLC, mais la méthode se décline de façon exactement similaire en mécanique. L'équation différentielle s'écrit pour $t > 0$

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 u = {\omega_0}^2 E\,.$$

III.A - Forme générale des solutions, polynôme caractéristique

Comme pour toute équation différentielle linéaire, une solution quelconque s'écrit comme la somme de la solution générale de l'équation homogène associée et d'une solution particulière.

Solution particulière : Pour trouver efficacement une solution particulière u_P, on la cherche de la même forme que le forçage (c'est-à-dire que le second membre), en l'occurence constante. M

$\rightsquigarrow$ ici : $u_\mathrm{P} = E$

Espace 10

Solution homogène : L'équation homogène associée est celle dans laquelle le second membre est nul,

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_\mathrm{H}}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u_\mathrm{H}}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 u_\mathrm{H} = 0$$

Résoudre cette équation demande d'identifier les racines de son **polynôme caractéristique**, de variable notée r, qui s'obtient en identifiant la dérivée n-ième à r^n.

Polynôme caractéristique : M

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + {\omega_0}^2 = 0$$

Calcul du discriminant :

$$\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4{\omega_0}^2 = {\omega_0}^2\left(\frac{1}{Q^2} - 4\right) = {\omega_0}^2\left(\frac{1}{Q} - 2\right)\left(\frac{1}{Q} + 2\right)\,.$$

Le discriminant change de signe selon que $Q \gtrless 1/2$, ce qui change aussi la nature des racines (réelles ou complexes conjuguées). Cela change naturellement le type de solutions.

Espace 11

La nature des solutions homogènes (et donc la nature du régime transitoire) dépend de la valeur du facteur de qualité $Q \gtrless 1/2$. R

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

III.B - Fort amortissement : régime apériodique ou sur-amorti

R

La régime **apériodique** ou **sur-amorti** s'obtient pour un fort amortissement c'est-à-dire un discriminant positif, ou encore un facteur de qualité faible $Q < 1/2$.

M

Racines du polynôme caractéristique et solution homogène :

$$r_\pm = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\omega_0}{2}\sqrt{\frac{1}{Q^2} - 1} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{1 - 4Q^2}$$

Espace 12

> ***Remarque :*** *en utilisant non pas le facteur de qualité mais le taux d'amortissement $\sigma = 1/2Q$, les racines s'écrivent*
> $$r_\pm = -\sigma\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\sigma^2 - 1}\,.$$

R

En régime apériodique, les solutions de l'équation homogène prennent la forme

$$u_\mathrm{H}(t) = A\,\mathrm{e}^{r_+ t} + B\,\mathrm{e}^{r_- t}\,,$$

où les constantes A et B se déterminent sur la solution complète à partir de deux conditions initiales.

> ***Remarque :*** *les deux racines r_+ et r_- étant négatives, la solution homogène tend bien vers 0 aux temps longs.*

Allures possibles : voir figure 3.

Q

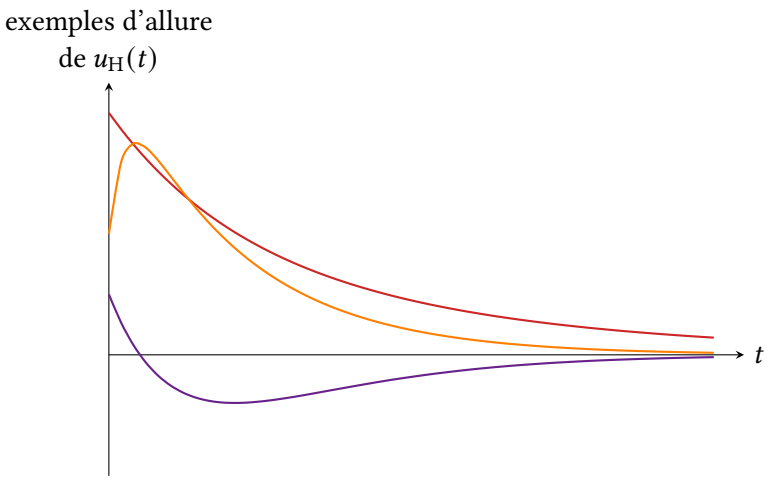


Figure 3 – Exemples d'allures de la solution homogène en régime apériodique. Seule la solution homogène est représentée, qui tend vers zéro aux temps longs.

Attention ! Absence d'oscillation ne veut pas dire fonction monotone, tout dépend des conditions initiales ! Lorsque u_H n'est pas monotone, on dit qu'elle présente un **dépassement** (cf. cours de SI).

Durée du régime transitoire : comparaison des temps caractéristiques d'évolution des deux exponentielles.

M

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

les deux exponentielles évoluent avec un temps caractéristique

$$\tau_\pm = -\frac{1}{r_\pm} = \frac{1}{\frac{\omega_0}{2Q}\left(1 \mp \sqrt{1-4Q^2}\right)}$$

la durée du régime transitoire est pilotée par la plus lente des deux, c'est-à-dire τ_-, qui est d'autant plus grand que Q est petit.

Espace 13

Attention ! S'agissant d'une *somme* de deux exponentielles, la vaeur de τ_- ne peut être estimée ni par la tangente initiale, ni par le temps de réponse à 63 %.

En régime apériodique, le transitoire est d'autant plus long que le facteur de qualité est faible. Q

Interprétation : cela se comprend très bien en mécanique, où un faible facteur de qualité est associé à des frottements élevés : une masse évoluant dans un fluide très visqueux mettra bien plus de temps à atteindre sa position d'équilibre que si elle évolue dans un fluide peu visqueux.

III.C - Faible amortissement : régime pseudo-périodique

La régime **pseudo-périodique** s'obtient pour un faible amortissement,
c'est-à-dire un discriminant négatif, ou encore un facteur de qualité élevé $Q > 1/2$. R

Racines du polynôme caractéristique et solution homogène : M

$$r_\pm = \frac{-b \pm \mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \mathrm{i}\frac{\omega_0}{2}\sqrt{4-\frac{1}{Q^2}} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \mathrm{i}\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}} = -\frac{1}{\tau} \pm \mathrm{i}\omega_\mathrm{p}$$

Espace 14

Dans cette écriture, τ est le **temps caractéristique d'amortissement** et ω_p la **pseudo-pulsation**.

> ***Remarque :*** *en utilisant non pas le facteur de qualité mais le taux d'amortissement $\sigma = 1/2Q$, les racines s'écrivent*
>
> $$r_\pm = -\sigma\omega_0 \pm \mathrm{i}\omega_0\sqrt{1-\sigma^2}\,.$$

On en déduit la forme générale des solutions homogènes :

$$u_\mathrm{H}(t) = a\,\mathrm{e}^{r_+ t} + b\,\mathrm{e}^{r_- t} = \left(a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_\mathrm{p} t} + b\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_\mathrm{p} t}\right)\mathrm{e}^{-t/\tau} \qquad \text{avec} \qquad (a,b) \in \mathbb{C}^2\,.$$

La tension u étant forcément à valeurs réelles, on trouve comme pour l'oscillateur harmonique que les constantes a et b sont conjuguées. On préfère donc noter $a = A - \mathrm{i}B$ et adopter l'écriture suivante :

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

R

En régime pseudo-périodique, les solutions de l'équation homogène prennent la forme

$$u_{\mathrm{H}}(t) = \Big(A\cos(\omega_{\mathrm{p}}t) + B\sin(\omega_{\mathrm{p}}t)\Big)\,\mathrm{e}^{-t/\tau} \qquad \text{avec} \qquad r_{\pm} = -\frac{1}{\tau} \pm \mathrm{i}\omega_{\mathrm{p}}$$

où les constantes A et B se déterminent sur la solution complète à partir de deux conditions initiales.

Interprétation physique de ω_{p} et τ : comme pour l'oscillateur harmonique, une écriture en amplitude et phase est possible également,

$u_{\mathrm{H}} = U_{\mathrm{m}}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\cos(\omega_{\mathrm{p}}t + \varphi)$

Espace 15

Q

Interprétation :

oscillations à la pulsation ω_{p} dont l'amplitude décroît progressivement, avec un temps caractéristique τ

Espace 16

$\rightsquigarrow$ origine des termes *pseudo*-périodique et *pseudo*-pulsation.

Allure possible : voir figure 4.

Q

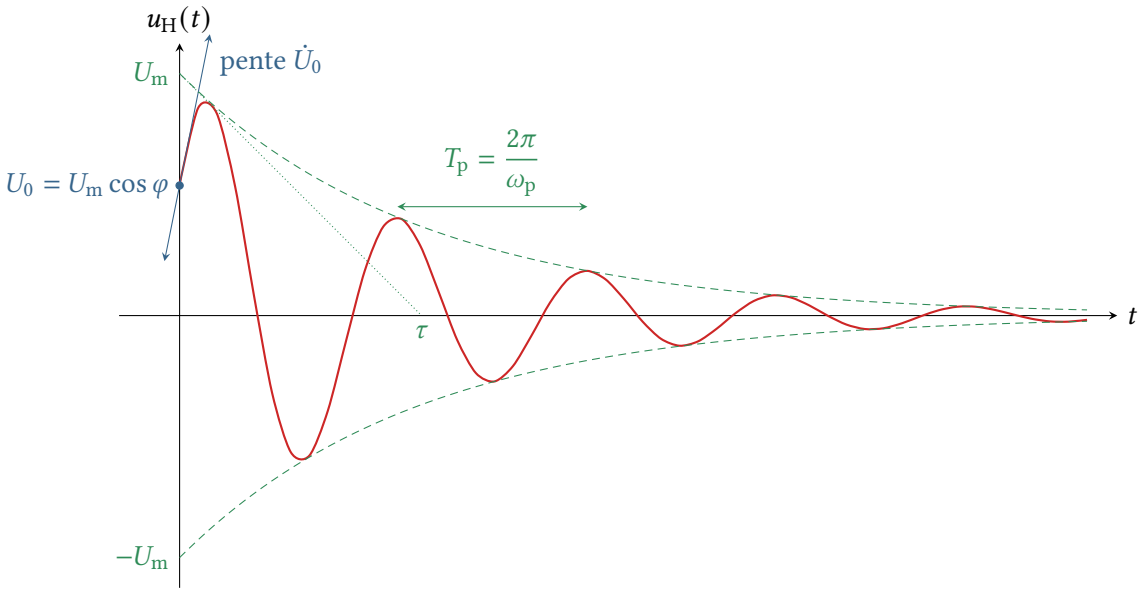


Figure 4 – Exemple d'allure de la solution homogène en régime pseudo-périodique.

Q

Comparaison entre pseudo-période et période propre :

$\omega_{\mathrm{p}} = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} < \omega_0$ donc $T_{\mathrm{p}} > T_0$

Espace 17

> ***Remarque :*** *dès que le facteur de qualité est « un peu » élevé, approximer $\omega_p \simeq \omega_0$ devient vite pertinent. Par exemple, pour $Q = 2$, $\omega_p = 0{,}968\,\omega_0$.*

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

Durée du régime transitoire :
de l'ordre de $\tau = 2Q/\omega_0$, donc d'autant plus longue que Q est élevé.

Espace 18

> ***Remarque :*** *τ ne représente que* l'ordre de grandeur *de la durée du transitoire. Pour être plus précis, il faudrait s'appuyer p.ex. sur la notion de temps de réponse introduite dans le cours sur les transitoires du premier ordre, qui se généralise très bien ici à condition de considérer l'enveloppe exponentielle, c'est-à-dire l'amplitude des oscillations. Ainsi, le temps de réponse à 95 % est égal à 3τ et le temps de réponse à 99 % à 5τ.*

En régime pseudo-périodique, le transitoire est d'autant plus long que le facteur de qualité est élevé. Q

Nombre d'oscillations pendant le transitoire : raisonnons par exemple sur le temps de réponse à 95 % de l'amplitude instantanée des oscillations, $t_{95} = 3\tau$.

$$t_{95} = 3 \times \frac{2Q}{\omega_0} = NT_\mathrm{p} = \frac{2N\pi}{\omega_0\sqrt{1-\dfrac{1}{4Q^2}}} \qquad \text{d'où} \qquad N = \frac{6Q}{2\pi}\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}} \simeq Q$$

dès lors que le facteur de qualité est raisonnablement élevé ($Q = 2$ convient déjà)

Espace 19

Le facteur de qualité donne l'ordre de grandeur du nombre d'oscillations pendant un transitoire pseudo-périodique. Q

III.D - Cas limite intermédiaire : régime apériodique critique

Le régime **apériodique critique** correspond à la limite entre les régimes apériodique et pseudo-périodique.

Il s'obtient pour un discriminant nul, c'est-à-dire un facteur de qualité $Q = 1/2$. R

Il s'agit d'un cas limite théorique, inatteignable en pratique avec des composants physiques réels.

Racine du polynôme caractéristique et solution homogène : M

une racine double $r = \dfrac{-b}{2a} = -\dfrac{\omega_0}{2Q} = -\omega_0$

Espace 20

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

R

En régime apériodique critique, les solutions de l'équation homogène prennent la forme

$$u_{\mathrm{H}}(t) = (At + B)\,\mathrm{e}^{rt} = (At + B)\,\mathrm{e}^{-\omega_0 t}$$

où les constantes A et B se déterminent sur la solution complète à partir de deux conditions initiales.

Allures possibles : très proches d'un régime apériodique.

Durée du régime transitoire :
de l'ordre de $1/\omega_0$.

Espace 21

R

C'est en régime apériodique critique de la durée du régime transitoire est la plus courte à pulsation propre ω_0 fixée.

Pour approfondir : Montrons-le sur les durées caractéristiques. En régime pseudo-périodique, $Q > 1/2$ et

$$\tau_{\text{p.pér}} = \frac{2Q}{\omega_0} > \frac{1}{\omega_0} = \tau_{\text{cr}}\,.$$

En régime apériodique, $Q < 1/2$, et nous avons montré que

$$\tau_{\text{apér}} = \frac{2Q}{\omega_0}\frac{1}{1-\sqrt{1-4Q^2}} = \frac{1}{\omega_0}\frac{1}{\dfrac{1}{2Q}-\sqrt{\dfrac{1}{4Q^2}-1}}$$

Montrons que $\tau_{\text{apér}} > \tau_{\text{cr}}$, c'est-à-dire

$$\forall Q < 1/2, \quad \frac{1}{\dfrac{1}{2Q}-\sqrt{\dfrac{1}{4Q^2}-1}} > 1\,.$$

Posons $x = 1/2Q > 1$ et montrons que $x-\sqrt{x^2-1} < 1$. Le plus simple est de montrer que la fonction $f : x \mapsto 1-x+\sqrt{x^2-1}$ est positive pour tout $x > 1$. Comme

$$\forall x > 1, f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} - 1 > 0\,,$$

alors la fonction est croissante sur $]1, +\infty[$, et

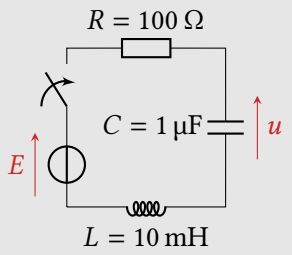
$$\forall x > 1, f(x) > f(1) = 0\,,$$

ce qui prouve le résultat annoncé. Ainsi, nous avons montré que la durée caractéristique du régime transitoire est minimale en régime apériodique critique. ■

III.E - Un exemple de résolution complète

M

Application 9 : Un RLC de A à Z



On considère le circuit ci-contre, où l'interrupteur est fermé à l'instant $t = 0$, le condensateur étant initialement déchargé. Établir la loi d'évolution $u(t)$ en fonction de E et ω_0 et la représenter. On remplacera Q par sa valeur numérique.

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

Correction des applications de cours

Application 1 : Forces exercées par des ressorts

1 $\vec{F}_\mathrm{r} = -k(x-\ell_0)\vec{e}_x$

2 $\vec{F}_\mathrm{r} = -k(x_H - x - \ell_0)(-\vec{e}_x) = k(x_H - x - \ell_0)\vec{e}_x$

3 $\vec{F}_\mathrm{r} = -k(x - x_H - \ell_0)\vec{e}_x$

4 $\vec{F}_\mathrm{r} = -k(-z-\ell_0)(-\vec{e}_z) = -k(z+\ell_0)\vec{e}_z$

5 $\vec{F}_\mathrm{r} = -k(z-\ell_0)\vec{e}_z$

6 ▹ Force exercée par le premier ressort sur M_1 : $\vec{F}_{\mathrm{r1}\to M_1} = -k(x_1-\ell_0)\vec{e}_x$;
- ▹ Force exercée par le deuxième ressort sur M_1 : $\vec{F}_{\mathrm{r2}\to M_1} = -k'(x_2-x_1-\ell_0')(-\vec{e}_x) = k'(x_2-x_1-\ell_0')\vec{e}_x$;
- ▹ Force exercée par le premier ressort sur M_2 : aucune ! car le premier ressort n'est pas attaché au solide en M_2 ... mais cela ne veut évidemment pas dire qu'il n'a pas *d'influence* sur le mouvement de M_2 ;
- ▹ Force exercée par le deuxième ressort sur M_2 : $\vec{F}_{\mathrm{r2}\to M_2} = -k(x_2-x_1-\ell_0)\vec{e}_x$.

Application 4 : Circuit LC série

Loi des mailles :

$$E = u_C + u_L$$

Loi de comportement : E est connu donc on le garde, u_C nous intéresse donc on le garde, u_L est inconnu et ne nous intéresse pas donc on le remplace.

$$E = u_C + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

Loi de comportement du condensateur :

$$E = u_C + L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right) = u_C + LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}$$

Forme canonique

$$\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{LC}u_C = \frac{E}{LC}\,.$$

On **reconnaît** l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique, donc on peut identifier l'équation différentielle à la forme canonique connue

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + {\omega_0}^2u_C = {\omega_0}^2E \qquad \text{avec} \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\,.}$$

Application 5 : Résolution complète pour l'oscillateur mécanique

1 Forme générale des solutions :

$$x(t) = \ell_0 + A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

Condition initiale sur la position :

$$x(t=0) \underset{\text{CI}}{\overset{\uparrow}{=}} X_0 \underset{\text{expr}}{\overset{\uparrow}{=}} \ell_0 + A \qquad \text{d'où} \qquad A = X_0 - \ell_0\,.$$

Condition initiale sur la vitesse : commençons par exprimer $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$,

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\omega_0 A\sin(\omega_0 t) + \omega_0 B\cos(\omega_0 t)\,,$$

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

et identifions à la condition initiale,

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t=0) \underset{\text{CI}}{\overset{\uparrow}{=}} V_0 \underset{\text{expr}}{\overset{\uparrow}{=}} \omega_0 B \qquad \text{d'où} \qquad B = \frac{V_0}{\omega_0}\,.$$

Conclusion :

$$x(t) = \ell_0 + (X_0 - \ell_0)\cos(\omega_0 t) + \frac{V_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)\,.$$

$\boxed{2}$ Périodicité : T_0 est la plus petite période,

$$x(t+T_0) = x(t) \qquad \text{soit} \qquad \cos(\omega_0(t+T_0)) = \cos(\omega_0 t) \qquad \text{donc} \qquad \omega_0 T_0 = 2\pi$$

ce qui permet de conclure

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{\omega_0}{2\pi}\,.$$

Il y a un facteur 2π supplémentaire par rapport à l'information apportée par analyse dimensionnelle : ce n'est pas surprenant, puisque l'analyse dimensionnelle *ne peut pas* identifier ces facteurs sans dimension.

Application 9 : Un RLC de A à Z

Commençons par établir l'équation différentielle pour $t > 0$, et écrivons-là sous forme canonique

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 u = {\omega_0}^2 E \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} \\ Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}} = 1 \end{cases}$$

On est donc en régime pseudo-périodique.

Solution homogène : on retrouve les racines en résolvant le polynôme caractéristique,

$$r_\pm = -\frac{\omega_0}{2} \pm \mathrm{i}\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4}} = -\frac{\omega_0}{2} \pm \mathrm{i}\omega_0\sqrt{\frac{3}{2}}\,,$$

d'où on déduit

$$u_\mathrm{H}(t) = \left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 t\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 t\right)\right)\mathrm{e}^{-\omega_0 t/2}$$

Forme générale des solutions : E étant une solution particulière évidente,

$$u(t) = E + \left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 t\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 t\right)\right)\mathrm{e}^{-\omega_0 t/2}$$

Recherche des conditions initiales : deux constantes donc deux CI

- le condensateur est initialement déchargé, donc $u(0) = 0$;
- le circuit est ouvert à $t < 0$, donc par continuité du courant dans une bobine

$$i(0^+) = i(0^-) = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+) = 0$$

Détermination des constantes : pour la tension,

$$u(0^+) \underset{\text{CI}}{\overset{\uparrow}{=}} 0 \underset{\text{expr}}{\overset{\uparrow}{=}} E + A \qquad \text{donc} \qquad A = -E$$

Pour la dérivée,

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \left[-A\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 t\right) + B\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 t\right)\right]\mathrm{e}^{-\omega_0 t/2} - \frac{\omega_0}{2}\left[A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 t\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 t\right)\right]\mathrm{e}^{-\omega_0 t/2}$$

donc

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+) \underset{\text{CI}}{\overset{\uparrow}{=}} 0 \underset{\text{expr}}{\overset{\uparrow}{=}} B\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 - \frac{\omega_0}{2}A \qquad \text{donc} \qquad B = \frac{A}{\sqrt{3}} = -\frac{E}{\sqrt{3}}$$

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

Conclusion :

$$u(t) = \left(1 - \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 t\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 t\right)\right)\mathrm{e}^{-\omega_0 t/2}$$

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

Expériences de cours

Date et salle :

Expérience :

□

Merci ☺

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr