Régime libre des oscillateurs

Oscillateur harmonique

Exercice 1 : Une masse et deux ressorts

1 | 2

- *Force exercée par un ressort ;*
- *Détermination des constantes d'intégration.*

1 Voir figure 1.

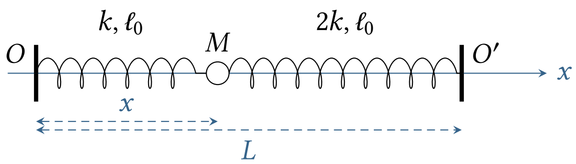


Figure 1 – Schéma de la situation. Rien n'est précisé sur la situation des ressorts (comprimés, étendus, à l'équilibre) : il n'est donc pas possible de représenter les forces.

2 ▹ Système : le solide de masse m, repéré par la position du point M ;

- Référentiel terrestre, galiléen ;
- Bilan des actions mécaniques exercées sur le système :
  - → son poids, vertical, est supposé exactement compensé par la réaction du support sur lequel il se trouve ;
  - → force exercée par le ressort 1 : $\vec{f}_1 = -k(\ell_1 - \ell_0)\,\vec{u}_{\text{ext},1} = -k(x - \ell_0)\,\vec{e}_x$;
  - → force exercée par le ressort 2 : $\vec{f}_2 = -2k(\ell_2 - \ell_0)\,\vec{u}_{\text{ext},2} = -2k(L - x - \ell_0)(-\vec{e}_x) = 2k(L - x - \ell_0)\,\vec{e}_x$;
  - → les frottements sont négligés.
- Lorsque le système est à l'équilibre,

$$\vec{f}_1 + \vec{f}_2 = \vec{0} \qquad \text{donc} \qquad -k(x_{\text{éq}} - \ell_0) + 2k(L - x_{\text{éq}} - \ell_0) = -3kx_{\text{éq}} + 2kL - k\ell_0 = 0$$

et ainsi

$$\boxed{x_{\text{éq}} = \frac{2L - \ell_0}{3}\,.}$$

3 Les forces s'expriment comme précédemment, donc d'après le PFD

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -3kx + 2kL - k\ell_0$$

Sous forme canonique,

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \underbrace{\frac{3k}{m}}_{=\omega_0^2}\,x = \frac{k(2L - \ell_0)}{m}\,.}$$

4 **Forme générale des solutions :** la position d'équilibre $x_{\text{éq}}$ est une solution particulière, d'où on déduit

$$\boxed{x(t) = x_{\text{éq}} + A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)\,.}$$

Recherche des constantes : d'après la première condition initiale,

$$x(0) \underset{\text{sol}}{\overset{\uparrow}{=}} x_{\text{éq}} + A \underset{\text{CI}}{\overset{\uparrow}{=}} x_0 \qquad \text{d'où} \qquad A = x_0 - x_{\text{éq}}\,.$$

Pour utiliser la seconde condition initiale, il faut connaître la vitesse, soit

$$\dot{x} = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t) + \omega_0 B \cos(\omega_0 t)\,.$$

Ainsi, comme le solide est lancé vers la gauche $\dot{x}(0) = -v_0$, donc

$$\dot{x}(0) \underset{\text{sol}}{\overset{\uparrow}{=}} \omega_0 B \underset{\text{CI}}{\overset{\uparrow}{=}} -v_0 \qquad \text{d'où} \qquad B = -\frac{v_0}{\omega_0}\,.$$

Finalement,

$$\boxed{x(t) = x_{\text{éq}} + (x_0 - x_{\text{éq}})\cos(\omega_0 t) - \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)\,.}$$

$\boxed{5}$ Voir figure 2. Points importants du tracé : oscillations symétriques par rapport à la position d'équilibre $x_{\text{éq}}$, qui restent bornées entre 0 et L. Les conditions initiales doivent apparaître clairement : $x(0) > x_{\text{éq}}$ et la pente initiale doit être négative.

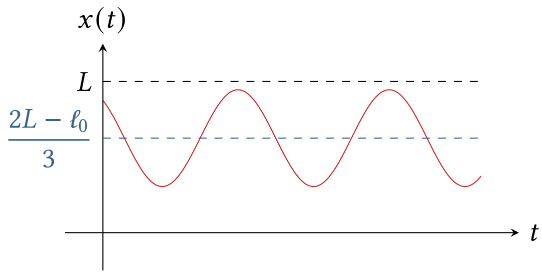


Figure 2 – Allure de $x(t)$.

Exercice 2 : Masses et ressorts à la verticale

adapté oral banque PT | 2 | 2 |

- *Force exercée par un ressort ;*
- *Oscillateurs harmoniques couplés.*

$\boxed{1}$ On raisonne sur l'axe z orienté vers le bas. Raisonnons à l'équilibre : les forces exercées sur chacune des masses se compensent.

- La masse m_1 est soumise à
  - → son poids $\vec{P}_1 = +m_1 g \vec{u}_z$;
  - → la force de rappel du ressort 1 : $\vec{F}_{r1} = -k_1 \Delta\ell_{1,\text{éq}} \vec{u}_z$;
  - → le force de rappel du ressort 2 : $\vec{F}_{r,2\to1} = -k_2 \Delta\ell_{2,\text{éq}}(-\vec{u}_z) = k_2 \Delta\ell_{2,\text{éq}} \vec{u}_z$.

  Ainsi, en projection sur l'axe z,

$$m_1 g - k_1 \Delta\ell_{1,\text{éq}} + k_2 \Delta\ell_{2,\text{éq}} = 0$$

- La masse m_2 est soumise à
  - → son poids $\vec{P}_2 = +m_2 g \vec{u}_z$;
  - → AUCUNE force de la part du ressort 1 puisqu'il n'est pas attaché à m_2 ;
  - → la force de rappel du ressort 2 $\vec{F}_{r,2\to2} = -k_2 \Delta\ell_{2,\text{éq}} \vec{u}_z$.

  Ainsi, en projection sur l'axe z,

$$m_2 g - k_2 \Delta\ell_{2,\text{éq}} = 0\,.$$

▹ On en conclut

$$\boxed{\Delta\ell_{2,\text{éq}} = \frac{m_2 g}{k_2}}$$

puis

$$k_1\,\Delta\ell_{1,\text{éq}} = m_1 g + k_2\,\Delta\ell_{2,\text{éq}} = (m_1+m_2)g \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\Delta\ell_{1,\text{éq}} = \frac{(m_1+m_2)g}{k_1}\,.}$$

2 Comme l'axe z est orienté vers le bas et que les positions sont comptées par rapport à la position d'équilibre, alors

$$\boxed{\Delta\ell_1 = \Delta\ell_{1,\text{éq}} + z_1 \qquad \text{et} \qquad \Delta\ell_2 = \Delta\ell_{2,\text{éq}} - z_1 + z_2\,.}$$

> *Ces expressions se trouvent à partir du schéma ! Augmenter z_1 à z_2 fixé augmente l'allongement du ressort 1 et diminue celui du ressort 2. Augmenter z_2 à z_1 fixé n'a pas d'effet sur le ressort 1 et augmente l'allongement du ressort 2.*

De plus, les accélérations des masses m_1 et m_2 s'écrivent directement $\dfrac{\mathrm{d}^2z_1}{\mathrm{d}t^2}$ et $\dfrac{\mathrm{d}^2z_2}{\mathrm{d}t^2}$ car tous les autres termes de leur position sont des constantes. Ainsi, le même bilan de forces que précédemment et le PFD conduisent aux équations différentielles

$$m_1\frac{\mathrm{d}^2z_1}{\mathrm{d}t^2} = m_1 g - k_1\,\Delta\ell_1 + k_2\,\Delta\ell_2 \qquad \text{et} \qquad m_2\frac{\mathrm{d}^2z_2}{\mathrm{d}t^2} = m_2 g - k_2\,\Delta\ell_2\,.$$

En remplaçant les allongements par leurs expressions,

$$m_1\frac{\mathrm{d}^2z_1}{\mathrm{d}t^2} = m_1 g - (m_1+m_2)g - k_1 z_1 + m_2 g - k_2 z_1 + k_2 z_2 \qquad \text{et} \qquad m_2\frac{\mathrm{d}^2z_2}{\mathrm{d}t^2} = m_2 g - m_2 g + k_2 z_1 - k_2 z_2$$

et enfin en simplifiant

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2z_1}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k_1+k_2}{m_1}z_1 = \frac{k_2}{m_1}z_2 \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}^2z_2}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k_2}{m_2}z_2 = \frac{k_2}{m_2}z_1\,.}$$

> *Il est logique que tous les termes issus du poids se compensent : comme le poids est une force constante, il a un impact sur les positions d'équilibre mais pas sur les oscillations autour de ces positions.*

3 La masse m_2 est maintenue dans sa position d'équilibre, donc $z_2 = 0$. L'équation du mouvement de m_1 devient alors

$$\frac{\mathrm{d}^2z_1}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k_1+k_2}{m_1}z_1 = 0\,.$$

Il s'agit de l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k_1+k_2}{m_1}}$.

▹ *Forme générale des solutions :* l'équation est homogène, donc la solution particulière est nulle, et

$$z_1(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) \qquad \text{avec } A \text{ et } B \text{ deux constantes.}$$

▹ *Conditions initiales :* on a directement $z_1(0) = Z_0$ et $\dot z_1(0) = 0$.

▹ *Détermination des constantes :* sur la position,

$$z_1(0) \underset{\text{sol}}{\overset{}{=}} A \underset{\text{CI}}{=} Z_0$$

et sur la vitesse

$$\dot z_1(t) = -A\omega_0\sin(\omega_0 t) + B\omega_0\cos(\omega_0 t)$$

donc

$$\dot z_1(0) \underset{\text{sol}}{=} B\omega_0 \underset{\text{CI}}{=} 0 \qquad \text{d'où} \qquad B = 0\,.$$

▹ *Conclusion :*

$$\boxed{z_1(t) = Z_0\cos(\omega_0 t)\,.}$$

Exercice 3 : Oscillations d'un flotteur — oral ATS | 1 | 2

- *Poussée d'Archimède ;*
- *Un oscillateur harmonique … sans ressort.*

Dans tout l'exercice, on étudie le mouvement du cylindre (section S, hauteur H) dans le référentiel terrestre, supposé galiléen.

Bilan des forces :

- poussée d'Archimède : le volume de cylindre immergé dans l'eau vaut Sz, donc en négligeant l'effet de l'air la poussée d'Archimède s'écrit $-\rho_0\, Sz\, g\, \vec{e}_z$;
- poids du flotteur : $\rho\, SH\, g\, \vec{e}_z$.

1 Le cylindre étant à l'équilibre,

$$0 = -\rho_0\, Sz_0\, g + \rho\, SH\, g \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{z_0 = \frac{\rho}{\rho_0} H\,.}$$

2 On impose cette fois $z = H$ car le cylindre est totalement immergé, mais il faut prendre en compte la force F exercée sur le flotteur dans le bilan des forces. Le PFD, toujours à l'équilibre, donne désormais

$$0 = -\rho_0\, SH\, g + \rho\, SH\, g + F \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{F = (\rho_0 - \rho)HSg\,.}$$

3 Le PFD (cette fois hors équilibre) s'écrit désormais

$$\rho HS \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = -\rho_0\, Sz\, g + \rho\, SH\, g\,. \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\rho_0 g}{\rho H} z = g\,.$$

On identifie l'équation du mouvement d'un oscillateur harmonique de pulsation propre

$$\omega_0^{\,2} = \frac{\rho_0 g}{\rho H}$$

d'où on déduit la période

$$\boxed{T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\rho H}{\rho_0 g}}\,.}$$

Exercice 4 : Oscillateur harmonique par l'énergie — 1 | 2 |

- *Oscillateur harmonique électrique ;*
- *Énergie électrique.*

1 L'énergie totale vaut

$$\mathcal{E}_{\text{tot}} = \frac{1}{2} C u^2 + \frac{1}{2} L i^2\,.$$

Ainsi, en dérivant,

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{\text{tot}}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2} C \times 2u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{2} L \times 2i \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\,.$$

Comme seule l'intensité doit apparaître dans le résultat, on remplace u avec la loi de comportement de la bobine, soit

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{\text{tot}}}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{2} C \times 2L \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(L \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right) + \frac{1}{2} L \times 2i \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \\
&= L^2 C \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + L i \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{\text{tot}}}{\mathrm{d}t} = L \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\left(LC \frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + i\right)}$$

$\boxed{2}$ Le circuit ne compte qu'une bobine et un condensateur, qui stockent de l'énergie mais n'en dissipent pas, et il n'y a en particulier aucune résistance. L'énergie électrique dans le circuit est donc constante. On en déduit qu'à tout instant,

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{\mathrm{tot}}}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad \text{soit} \qquad L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\left(LC\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + i\right) = 0\,.$$

Le terme en facteur $L\,\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$ est la tension aux bornes de la bobine, qui n'est pas constamment nulle. C'est donc le terme dans la parenthèse qui est nul, soit

$$LC\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + i = 0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + {\omega_0}^2 i = 0\,,}$$

en posant $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ la pulsation propre du circuit.

> *Même si ce n'est pas l'approche de l'exercice, on peut bien sûr retrouver cette équation par les lois de Kirchoff. D'après la loi des nœuds pour $t > 0$,*
>
> $$C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + i = 0 \qquad \textit{donc} \qquad LC\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + i = 0\,.$$
>
> *car la bobine et le condensateur sont montés en parallèle.*

$\boxed{3}$ **Forme générale des solutions :** l'équation étant homogène,

$$i(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)\,.$$

Recherche des conditions initiales : à l'instant $t = 0^-$, le circuit est encore en régime permanent avec $\eta = I_0$. La bobine est donc équivalente à un fil et le condensateur à un interrupteur ouvert :

$$i(0^-) = I_0 \qquad \text{et} \qquad u(0^-) = 0\,.$$

Comme i doit être continu (bobine), alors

$$i(0^+) = i(0^-) = I_0\,.$$

Par ailleurs, comme le condensateur est monté en parallèle de la bobine alors u est aussi la tension aux bornes du condensateur et doit donc aussi être continue, donc

$$u(0^+) = u(0^-) = 0\,.$$

D'après la loi de comportement de la bobine,

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+) = u(0^+) = 0 \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+) = 0\,.$$

Détermination des constantes : d'une part,

$$i(0^-) = i(0^+) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{sol}}}{=} A \underset{\substack{\uparrow\\ \text{CI}}}{=} I_0 \qquad \text{d'où} \qquad A = I_0\,,$$

et d'autre part, comme

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -\omega_0 A\sin(\omega_0 t) + \omega_0 B\cos(\omega_0 t)$$

alors

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{sol}}}{=} \omega_0 B \underset{\substack{\uparrow\\ \text{CI}}}{=} 0 \qquad \text{d'où} \qquad B = 0\,.$$

Conclusion :

$$\boxed{i(t) = I_0\cos(\omega_0 t)\,.}$$

Oscillateur amorti

Exercice 5 : Oscillations d'une sphère — oral CCINP PSI | 2 | 1

▷ *Mise en équation d'un oscillateur mécanique.*

• **Système :** Étudions le mouvement de la sphère dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}$ supposé galiléen. On introduit un axe z vertical vers le bas.

• **Bilan des forces :**

▷ La sphère est soumise à son poids,

$$\vec{P} = m\vec{g} = +mg\,\vec{e}_z\,.$$

▷ En supposant le fil qui attache la sphère au ressort inextensible, alors la longueur du ressort est reliée à l'altitude z du centre de masse de la sphère par

$$\ell = z + a$$

avec a une longueur constante. Ainsi, la sphère subit de la part du ressort une force

$$\vec{F}_\mathrm{r} = -k(\ell - \ell_0)\,\vec{e}_z = -k(z + a - \ell_0)\,\vec{e}_z\,.$$

▷ Enfin, dans le second cas seulement, il faut également prendre en compte la force de Stokes

$$\vec{F} = -6\pi\eta R\vec{v} = -6\pi\eta R\dot{z}\,\vec{e}_z\,.$$

• **Principe fondamental de la dynamique :** l'équation du mouvement s'écrit

$$m\left.\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \vec{P} + \vec{F}_\mathrm{r} + \vec{F}$$

donc en projection sur $\vec{e}_z$

$$m\ddot{z} = mg - k(z + a - \ell_0) - 6\pi\eta R\dot{z}$$

ce qui se met sous la forme

$$\boxed{\ddot{z} + \frac{6\pi\eta R}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = g - \frac{k}{m}(a - \ell_0)\,.}$$

• **Premier cas :** tout se passe formellement comme si $\eta = 0$, on reconnaît alors une équation d'oscillateur harmonique de pulsation propre

$$\omega_0{}^2 = \frac{k}{m} \qquad \text{soit} \qquad T_1 = \frac{2\pi}{\omega_0}\,.$$

• **Deuxième cas :** sous forme canonique, cette équation s'écrit

$$\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{z} + \omega_0{}^2 z = g - \frac{k}{m}(a - \ell_0) \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} \omega_0 = \sqrt{k/m} \\ Q = \dfrac{\sqrt{km}}{6\pi\eta R} \end{cases}$$

Le polynôme caractéristique a pour discriminant

$$\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0{}^2 = \omega_0{}^2\left(\frac{1}{Q^2} - 4\right) < 0$$

car on observe des oscillations. Les racines du polynôme sont donc

$$r_\pm = \frac{1}{2}\left(-\frac{\omega_0}{Q} \pm \mathrm{i}\omega_0\sqrt{4 - \frac{1}{Q^2}}\right) = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \mathrm{i}\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}\,.$$

La pseudo-pulsation des oscillations est donnée par la partie imaginaire des racines,

$$\Omega_\mathrm{p} = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}} \qquad \text{d'où} \qquad T_2 = \frac{2\pi}{\omega_0}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}\,.$$

- **Conclusion :** des deux études précédentes on déduit

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = 1-\frac{1}{4Q^2}$$

$$\frac{1}{4Q^2} = 1-\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2$$

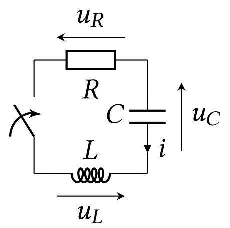
$$\frac{1}{4\times\frac{km}{36\pi^2\eta^2R^2}} = 1-\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2$$

$$\frac{9\pi^2\eta^2R^2}{km} = 1-\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2$$

$$\boxed{\eta = \sqrt{\frac{km}{9\pi^2R^2}\left[1-\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2\right]}\,.}$$

Exercice 6 : RLC série en régime libre — oral CCINP PSI | 2 | 2

- ▹ *Mise en équation d'un circuit électrique ;*
- ▹ *Recherche de conditions initiales ;*
- ▹ *Détermination des constantes d'intégration ;*
- ▹ *Étude expérimentale.*



Les notations des courants et tensions ne sont pas explicitées sur le schéma par l'énoncé, auquel cas il est sous-entendu que toutes les tensions sont orientées de façon cohérente avec u_C et que les dipôles sont orientés en convention récepteur.

1 L'intensité i est continue car elle traverse une bobine. Ainsi,

$$\boxed{i(0^+) = i(0^-) = 0}$$

car le circuit est ouvert à $t < 0$. De même, la tension u_C est nécessairement continue car aux bornes du condensateur donc

$$\boxed{u_C(0^+) = u_C(0^-) = U_0}$$

Enfin, la tension aux bornes de la bobine se déduit de la loi des mailles à l'instant $t = 0^+$ et de la loi d'Ohm,

$$u_R(0^+) + u_C(0^+) + u_L(0^+) = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{u_L(0^+) = -u_C(0^+) = -U_0\,.}$$

En régime permanent, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert donc

$$\boxed{i_\infty = 0\,.}$$

La bobine est équivalente à un fil, si bien que

$$\boxed{u_{L,\infty} = 0}$$

et d'après la loi des mailles on en déduit

$$u_{R,\infty} + u_{C,\infty} + u_{L,\infty} = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{u_{C,\infty} = 0\,.}$$

$\boxed{2}$ D'après le comportement à $t = 0$, on en déduit que **la grandeur y correspond à l'intensité i**. Un oscilloscope ne peut pas mesurer directement une intensité, il faut donc mesurer une tension qui lui est proportionnelle, c'est-à-dire la tension aux bornes de la résistance. Obtenir la courbe représentant y en fonction de t demande donc **de brancher l'oscilloscope en parallèle de la résistance**.

> *Ici, il n'y a aucun appareil branché sur le secteur type GBF, donc pas de conflit de masse à craindre.*

$\boxed{3}$ D'après la loi des mailles,

$$u_R + u_C + u_L = 0 \qquad \text{soit} \qquad Ri + u_C + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0$$

en utilisant les lois de comportement. Pour pouvoir relier u_C à i, il est nécessaire dériver,

$$R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + L\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} = 0 \qquad \text{d'où} \qquad R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}i + L\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} = 0\,.$$

Écrivons maintenant cette équation sous forme canonique pour faire apparaître les paramètres cherchés,

$$\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}i = 0\,.$$

On identifie alors $1/LC = {\omega_0}^2$ et $R/L = 2m\omega_0$ d'où

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + 2m\omega_0\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 i = 0\,.}$$

$\boxed{4}$ **Forme générale des solutions :** L'équation différentielle est homogène, il n'y a donc pas de solution particulière à déterminer (une autre formulation possible est de dire qu'elle est nulle). Pour déterminer la forme générale de la solution homogène, trouvons les racines du polynôme caractéristique,

$$r^2 + 2m\omega_0\, r + {\omega_0}^2 = 0\,.$$

Son discriminant vaut

$$4m^2{\omega_0}^2 - 4{\omega_0}^2 = 4{\omega_0}^2(m^2 - 1) < 0$$

car $m < 1$. Ainsi, les racines sont complexes conjuguées et valent

$$r_\pm = -\frac{2m\omega_0}{2} \pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{4{\omega_0}^2(1-m^2)}}{2} = -m\omega_0 \pm \mathrm{i}\omega_0\sqrt{1-m^2} = -m\omega_0 \pm \mathrm{i}\Omega\,.$$

Comme le discriminant de l'équation caractéristique est négatif alors le régime est pseudo-périodique et les solutions s'écrivent toutes sous la forme

$$i(t) = [A\cos\Omega t + B\sin\Omega t]\,\mathrm{e}^{-m\omega_0 t}$$

Conditions initiales : Déterminons maintenant les conditions initiales nécessaires pour trouver les constantes A et B. D'après la question 1,

$$i(0^+) = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+) = \frac{1}{L}u_L(0^+) = -\frac{U_0}{L}\,.$$

Constantes d'intégration : Ainsi, la condition initiale sur i donne

$$i(0^+) \underset{\text{sol}}{\underset{\uparrow}{=}} A \underset{\text{CI}}{\underset{\uparrow}{=}} 0\,.$$

En considérant directement $A = 0$ pour calculer la dérivée,

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = B\Omega\cos(\Omega t)\,\mathrm{e}^{-m\omega_0 t} - m\omega_0 B\sin(\Omega t)\,\mathrm{e}^{-m\omega_0 t}$$

donc

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+) \underset{\text{sol}}{\underset{\uparrow}{=}} B\Omega \underset{\text{CI}}{\underset{\uparrow}{=}} -\frac{U_0}{L} \qquad \text{d'où} \qquad B = -\frac{U_0}{L\Omega}\,.$$

Conclusion :

$$\boxed{i(t) = -\frac{U_0}{L\Omega}\sin(\Omega t)\,\mathrm{e}^{-m\omega_0 t}\,.}$$

L'intensité est pseudo-périodique, et Ω **est sa pseudo-période.** On peut l'évaluer à partir de la pseudo-période T' lisible sur la courbe. Par exemple, $T' = t_2 - t_1$ d'où

$$\boxed{\Omega = \frac{2\pi}{t_2 - t_1}\,.}$$

$\boxed{5}$ Trouver la position des maxima n'est pas simple du tout à cause de l'amortissement exponentiel, qui complique beaucoup la recherche des zéros de la dérivée. Cependant, compte tenu de la courbe donnée, on peut faire l'approximation que la position des maxima est directement donnée par ceux du sinus car l'amortissement est faible. Ainsi, le k-ième maximum est atteint lorsque

$$\Omega t_k = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad \text{soit} \qquad t = \frac{3}{4}T' + (k-1)T'$$

avec k un entier. y_1 et y_2 correspondent aux deux premiers maxima, aux instants $t_1 = 3T'/4$ et $t_2 = 7T'/4$. Ainsi,

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{\mathrm{e}^{-7m\omega_0 T'/4}}{\mathrm{e}^{-3m\omega_0 T'/4}} = \mathrm{e}^{-m\omega_0 T'}$$

Pour aboutir à une relation encore plus simple (je ne sais pas ce qu'attendait l'examinateur, qui l'aurait précisé au candidat au cour de l'oral) , on peut supposer $m \ll 1$, auquel cas $\Omega \sim \omega_0$ et donc $T' \simeq 2\pi/\omega_0$. Dans ce cas,

$$\boxed{\frac{y_2}{y_1} \simeq \mathrm{e}^{-2\pi m}\,.}$$

Exercice 7 : RLC parallèle soumis à un échelon de courant 1 | 2

- *Mise en équation d'un circuit électrique ;*
- *Recherche de conditions initiales ;*
- *Détermination des constantes d'intégration.*

$\boxed{1}$ D'après la loi des nœuds,

$$I_0 = i_R + i_L + i_C = \frac{u}{R} + i_L + C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

Pour pouvoir insérer la loi de comportement de la bobine, il est nécessaire de dériver cette relation,

$$0 = \frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + C\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} \qquad \text{d'où} \qquad 0 = \frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{L}u + C\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}\,.$$

Écrivons cette équation sous forme canonique,

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{RC}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}u = 0 \qquad \text{à identifier à} \qquad \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2\,u = 0\,.$$

Ainsi, la pulsation propre est définie par

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

et le facteur de qualité est tel que

$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{1}{RC} \qquad \text{soit} \qquad Q = RC\,\omega_0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}\,.}$$

Le facteur de qualité de ce circuit est l'inverse de celui du RLC série, ce qui peut se comprendre qualitativment. En effet, un circuit avec un grand facteur de qualité se rapproche d'un oscillateur harmonique, c'est-à-dire d'un circuit LC sans résistance. Dans le cas du circuit RLC parallèle, cette limite du circuit LC s'obtient avec R infinie.

$\boxed{2}$ Comme le courant i_L est celui traversant une bobine et comme la tension u est celle aux bornes d'un condensateur, alors ces deux quantités sont continues. Déterminons leur valeur à $t = 0^-$, où le circuit est en régime permanent continu, sans forçage par le générateur de courant (il impose $i = 0$). Comme la bobine est équivalente à un fil, alors la tension à ses bornes est nulle donc

$$\boxed{u(0^+) = u(0^-) = 0\,.}$$

On en déduit que la résistance est soumise à une tension nulle, donc $i_R(0^-) = 0$, et comme le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert alors $i_C(0^-) = 0$. D'après la loi des nœuds et la continuité,

$$\boxed{i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0\,.}$$

$\boxed{3}$ **Forme générale des solutions :** numériquement, le facteur de qualité vaut $Q = 0{,}3 < 1/2$: l'évolution de u est donc **apériodique**.

▹ Comme l'équation est homogène, il n'y a pas de solution particulière à chercher (ou autrement dit elle est nulle).

▹ Pour trouver la solution homogène, partons du polynôme caractéristique,

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + {\omega_0}^2 = 0\,.$$

Comme $Q < 1/2$, on sait que son discriminant Δ est positif,

$$\Delta = {\omega_0}^2 \left(\frac{1}{Q^2} - 4\right) > 0$$

Les deux racines de l'équation caractéristique sont

$$r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\omega_0}{2}\sqrt{\frac{1}{Q^2} - 4}$$

qui sont toutes deux négatives. La solution est alors de la forme

$$u(t) = A\,\mathrm{e}^{r_1 t} + B\,\mathrm{e}^{r_2 t}\,,$$

où A et B sont deux constantes à déterminer à partir des conditions initiales.

Conditions initiales : on a déjà $u(0^+) = 0$, et par ailleurs

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+) = \frac{i_C(0^+)}{C} = \frac{1}{C}\left(I_0 - i_L(0^+) - \frac{u(0^+)}{R}\right) = \frac{I_0}{C}\,.$$

Constantes d'intégration :

$$\begin{cases} u(0^+) \underset{\text{sol}}{\underset{\uparrow}{=}} A + B \underset{\text{CI}}{\underset{\uparrow}{=}} 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+) \underset{\text{sol}}{\underset{\uparrow}{=}} r_1 A + r_2 B \underset{\text{CI}}{\underset{\uparrow}{=}} \dfrac{I_0}{C} \end{cases} \qquad \text{soit} \qquad \begin{cases} A = -B \\ (r_2 - r_1)\,B = \dfrac{I_0}{C} \end{cases} \qquad \text{d'où} \qquad \begin{cases} A = -\dfrac{1}{r_2 - r_1}\dfrac{I_0}{C} \\ B = \dfrac{1}{r_2 - r_1}\dfrac{I_0}{C} \end{cases}$$

Finalement,

$$\boxed{u(t) = \frac{1}{r_1 - r_2}\frac{I_0}{C}\left(e^{r_1 t} - e^{r_2 t}\right) = \frac{1}{\omega_0\sqrt{\dfrac{1}{Q^2} - 4}}\frac{I_0}{C}\left(e^{r_1 t} - e^{r_2 t}\right)}$$

4 L'allure de la courbe peut s'obtenir simplement à partir des informations sur les conditions initiales, le type de régime (apériodique donc pas d'oscillation) et la solution particulière, qui décrit le régime permanent. Ainsi, à $t = 0$, $u = 0$ et la tangente a une pente positive. Par ailleurs, u devient quasi-nulle au bout d'un temps suffisant. La courbe tracée par Python avec les valeurs numériques est représentée figure 3.

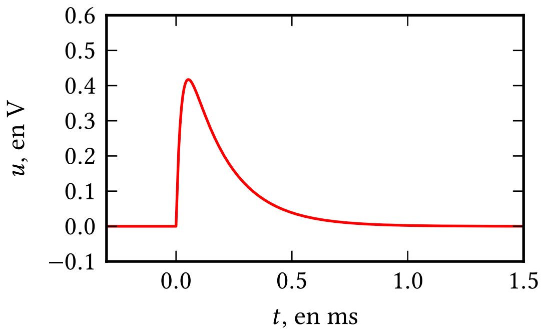
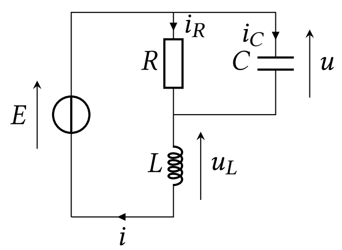


Figure 3 – Chronogramme de la tension $u(t)$ dans le circuit RLC parallèle.

Exercice 8 : Encore un RLC ! — oral CCINP PSI | 1 | 2 |

- *Mise en équation d'un circuit électrique ;*
- *Recherche de conditions initiales ;*
- *Détermination des constantes d'intégration.*



1 Le circuit est à deux mailles, il faudra donc utiliser les deux lois de Kirchoff pour établir l'équation différentielle. Commençons par exemple par la loi des nœuds,

$$i = i_R + i_C$$

Utilisons ensuite les lois de comportement pour faire apparaître la tension u, commune à R et C qui sont montés en parallèle,

$$i = \frac{u}{R} + C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

La loi des mailles permet ensuite d'exprimer la tension u en termes de la tension u_L : $u = E - u_L$. Ainsi, comme la tension E est constante,

$$i = \frac{E}{R} - \frac{u_L}{R} - C\frac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t}\,.$$

Enfin, d'après la loi de comportement de la bobine,

$$\boxed{i = \frac{E}{R} - \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - LC\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2}\,.}$$

2 Réécrivons l'équation en mettant à 1 le préfacteur devant la dérivée d'ordre le plus élevé,

$$\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{RC}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}i = \frac{E}{RLC}\,. \qquad \text{à identifier à} \qquad \frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 i = \frac{E}{RLC}\,.$$

Ainsi, on est amené à poser

$$\begin{cases} {\omega_0}^2 = \dfrac{1}{LC} & \text{d'où} \quad \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} \\ \dfrac{\omega_0}{Q} = \dfrac{1}{RC} & \text{d'où} \quad Q = RC\omega_0 = R\sqrt{\dfrac{C}{L}} \end{cases}$$

ω_0 est la **pulsation propre** de l'oscillateur, elle correspond à la pulsation qu'auraient les oscillations si elles étaient harmonique. Q est son **facteur de qualité**, qui décrit l'écart entre l'oscillateur et un oscillateur harmonique.

3 Analysons le régime permanent à $t = 0^-$, où le forçage est nul. Ce régime est continu, donc la bobine y est équivalente à un fil. Ainsi, d'après la loi des mailles,

$$0 = u(0^-) + 0 \qquad \text{donc} \qquad u(0^-) = 0\,.$$

Par ailleurs, d'après la loi des nœuds,

$$i(0^-) = i_R(0^-) + i_C(0^-) = \frac{u(0^-)}{R} + 0 = 0$$

puisque $i_C(0^-) = 0$ car le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert.

Analysons maintenant le circuit à $t = 0^+$. Par continuité du courant traversant une bobine, on déduit directement

$$\boxed{i(0^+) = i(0^-) = 0\,.}$$

Pour trouver la valeur de $\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$, il faut trouver la valeur de $u_L(0^+)$. Comme on cherche une tension, on utilise la loi des mailles à $t = 0^+$,

$$E = u(0^+) + u_L(0^+)\,.$$

Or en tant que tension aux bornes d'un condensateur $u(0^+)$ est continue et égale à $u(0^+) = u(0^-) = 0$, d'où

$$u_L(0^+) = E \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+) = \frac{E}{L}\,.}$$

4 **Forme générale des solutions :** Le courant $i(t)$ s'écrit comme la somme d'une solution particulière de l'équation différentielle complète et d'une solution de l'équation homogène. Comme le forçage (qui se lit dans le second membre) est constant, le régime permanent (qui se lit dans la solution particulière) est constant aussi. La solution particulière est donc telle que

$$0 + 0 + \frac{1}{LC}\, i_\mathrm{p} = \frac{E}{RLC} \qquad \text{d'où} \qquad i_\mathrm{p} = \frac{E}{R}$$

Pour trouver la solution homogène, écrivons l'équation caractéristique,

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + {\omega_0}^2 = 0\,.$$

Son discriminant vaut

$$\Delta = {\omega_0}^2 \left(\frac{1}{4} - 4\right) = -\frac{15}{4}{\omega_0}^2 < 0 \quad \text{car } Q = 2\,.$$

Les racines de l'équation caractéristique sont donc complexes conjuguées,

$$r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{4} \pm \mathrm{i}\frac{\omega_0}{4}\sqrt{15} \qquad \text{qu'on note} \qquad r_{1,2} = -\mu \pm \mathrm{i}\omega_\mathrm{p}$$

où $\mu > 0$ est le taux d'amortissement et ω_p la pseudo-pulsation des oscillations. La solution homogène s'écrit alors

$$i_\mathrm{h}(t) = \left[A\cos(\omega_\mathrm{p} t) + B\sin(\omega_\mathrm{p} t)\right] \mathrm{e}^{-\mu t}\,,$$

avec A et B deux constantes.

> *Attention aux signes : $\mu > 0$ et $\omega_p > 0$.*

En regroupant,

$$i(t) = i_\mathrm{p} + i_\mathrm{h}(t) = \frac{E}{R} + \left[A\cos(\omega_\mathrm{p} t) + B\sin(\omega_\mathrm{p} t)\right] \mathrm{e}^{-\mu t}\,.$$

Détermination des constantes : On a d'abord

$$i(0^+) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sol}}}{=} \frac{E}{R} + A \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CI}}}{=} 0 \qquad \text{d'où} \qquad A = -\frac{E}{R}$$

Calculons maintenant la dérivée,

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \omega_\mathrm{p}\left[-A\sin(\omega_\mathrm{p} t) + B\cos(\omega_\mathrm{p} t)\right]\mathrm{e}^{-\mu t} - \mu\left[A\cos(\omega_\mathrm{p} t) + B\sin(\omega_\mathrm{p} t)\right]\mathrm{e}^{-\mu t}$$

ce qui donne

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sol}}}{=} B\omega_\mathrm{p} - \mu A \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CI}}}{=} \frac{E}{L} \qquad \text{d'où} \qquad B = \frac{E}{\omega_\mathrm{p}}\left(\frac{1}{L} - \frac{\mu}{R}\right)$$

Conclusion :

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R} - \frac{E}{R}\left[\cos(\omega_\mathrm{p} t) + \frac{R}{\omega_\mathrm{p}}\left(\frac{1}{L} - \frac{\mu}{R}\right)\sin(\omega_\mathrm{p} t)\right]\mathrm{e}^{-\mu t}\,.}$$

Tracé : Le tracé « direct » n'est pas possible, il faut donc utiliser les informations à disposition : conditions initiales, qui donne la valeur à $t = 0$ et le signe de la pente de la tangente, régime pseudo-périodique avec environ $Q = 2$ oscillations, et solution particulière qui donne le régime permanent asymptotique. Un exemple de chronogramme acceptable est représenté figure 4.

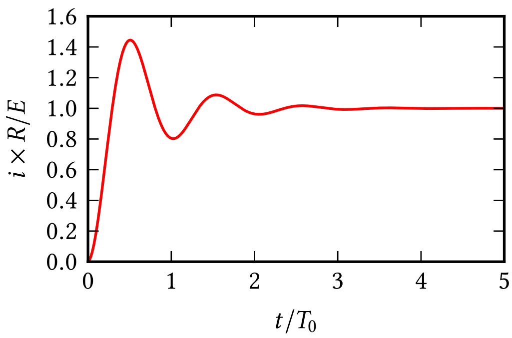


Figure 4 – Chronogramme du courant $i(t)$ dans le circuit RLC « mi-série, mi-parallèle ».

Exercice 9 : Décrément logarithmique

1 | 3

- *Mise en équation d'un circuit électrique ;*
- *Détermination des constantes d'intégration.*

1 • **Équation différentielle :** L'équation différentielle régissant l'évolution de u s'écrit (cf. cours)

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 u = 0 \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} \\[2ex] Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}} \end{cases}$$

• **Forme des solutions :** L'équation est homogène, il n'y a donc pas de solution particulière à chercher. En régime pseudo-périodique ($Q > 1/2$), les racines du polynôme caractéristique s'écrivent

$$r_\pm = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \mathrm{i}\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} = -\frac{1}{\tau} \pm \mathrm{i}\omega$$

avec τ le temps d'amortissement et ω la pseudo-pulsation. On a ainsi

$$\boxed{\tau = 2RC \qquad \text{et} \qquad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{1-\frac{1}{4R^2}\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{1}{4R^2C^2}}\,.}$$

On en déduit la forme des solutions,

$$u(t) = U_0\cos(\omega t+\varphi)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\,.$$

> *Rappelons que l'écriture $U_0\cos(\omega t+\varphi)$ est exactement équivalente à $A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)$, on peut utiliser indifféremment l'une et l'autre ... même si la forme en cos + sin est généralement plus simple pour exploiter les conditions initiales, comme nous allons le voir juste après ☺*

• **Recherche des conditions initiales :** le circuit est en régime permanent à l'instant $t = 0^-$, où le condensateur équivaut à un interrupteur ouvert et la bobine à un fil. D'après la loi des mailles,

$$E = \cancel{u_L(0^-)} + u(0^-) + R\cancel{i(0^-)} \qquad \text{soit} \qquad u(0^+) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{condensateur}}}{=} u(0^-) = E\,.$$

Par ailleurs,

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+) = \frac{1}{C}i(0^+) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{bobine}}}{=} i(0^-) = 0\,.$$

• **Détermination des constantes :** d'une part,

$$u(0^+) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{CI}}}{=} E \underset{\substack{\uparrow\\ \text{expr}}}{=} U_0\cos\varphi\,.$$

et d'autre part la dérivée s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\omega U_0\sin(\omega t+\varphi)\,\mathrm{e}^{-t/\tau} - \frac{1}{\tau}U_0\cos(\omega t+\varphi)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

si bien que

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{CI}}}{=} 0 \underset{\substack{\uparrow\\ \text{expr}}}{=} -\omega U_0\sin\varphi - \frac{1}{\tau}U_0\cos\varphi\,.$$

On en déduit

$$-\omega U_0\sin\varphi - \frac{1}{\tau}E = 0 \qquad \text{soit} \qquad -\omega E\tan\varphi - \frac{1}{\tau}E = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \tan\varphi = -\frac{1}{\omega\tau}\,.$$

Cette équation admet comme solutions

$$\varphi = -\arctan\frac{1}{\omega\tau} + k\pi = \arctan(\omega\tau) - \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad \text{soit} \qquad \varphi = \arctan(\omega\tau) + \left(k-\frac{1}{2}\right)\pi\,.$$

> *On utilise la relation* $\arctan x + \arctan\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$.

Or l'amplitude U_0 est positive par convention, donc $\cos\varphi > 0$ et on préfère se restreindre à l'intervalle $]-\pi,\pi]$ pour déterminer φ. On en déduit que la solution à retenir est celle comprise entre $-\pi/2$ et 0, soit

$$\varphi = \arctan\omega\tau - \frac{\pi}{2}\,.$$

et on en déduit finalement

$$\boxed{U_0 = E\cos\varphi = E\sin(\arctan(\omega\tau))\,.}$$

> *On constate ici que la méthode « amplitude et phase » est très peu adaptée pour exploiter les conditions initiales : la difficulté vient du fait que plusieurs angles ont le même sinus, et qu'il faut raisonner sur le signe du cosinus pour trouver le bon.*

2 Par définition de la pseudo-période, $T = 2\pi/\omega$

$$u(t+T) = U_0 \cos(\omega(t+T)+\varphi)\,\mathrm{e}^{-(t+T)/\tau} = U_0 \cos(\omega t+\varphi)\,\mathrm{e}^{-(t+T)/\tau}\,.$$

On en déduit

$$\delta = \ln \frac{u(t)}{u(t+T)} = \ln \mathrm{e}^{T/\tau} = \frac{2\pi}{\omega\tau}\,.$$

Or d'après les expressions rappelées à la première question,

$$\omega\tau = \frac{2Q}{\omega_0} \times \omega_0 \sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}} = 2Q\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}\,,$$

ce qui conduit à

$$\boxed{\delta = \frac{\pi}{Q\sqrt{1-\dfrac{1}{4Q^2}}}\,.}$$

3 Pour $Q \gg 1$, on peut supposer $1/4Q^2 \ll 1$ et approximer

$$\boxed{\delta \simeq \frac{\pi}{Q}\,.}$$

Pour $Q = 3{,}5$, on trouve

$$\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{4Q^2}}} \simeq 1{,}01$$

ce qui signifie que l'approximation devient valable à mieux que 1 % près dès lors que $Q > 3{,}5$.

4 Il suffit d'estimer le décrément logarithmique en mesurant les maxima successifs de la tension u, ce qui est particulièrement facile sur le plan expérimental.

Exercice 10 : Analyse de relevé expérimental — 3 | 2

- *Étude expérimentale ;*
- *Recherche de conditions initiales.*

Trois paramètres sont à déterminer par lecture de la courbe : E, L et C. Sur cette courbe, trois caractéristiques sont aisément mesurables : le temps caractéristique τ d'amortissement des oscillations, leur pseudo-période T_p et leur amplitude à l'instant initial $t = 0$ (en toute rigueur à t légèrement supérieur à zéro). Il faut donc relier entre eux ces paramètres.

Le générateur est dit non-idéal : il faut donc le modéliser par une source idéale de tension montée en série avec une résistance $R = 50\,\Omega$. Le circuit est donc un circuit RLC série soumis à un échelon, dans lequel on établit facilement l'équation différentielle portant sur le courant i,

$$\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}i = 0 \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 i = 0 \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} \\ Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}} \end{cases}$$

La courbe donne des oscillations, le régime est donc pseudo-périodique. Le courant $i(t)$ s'écrit donc sous la forme

$$i(t) = \left[A\cos(\omega_\text{p}t) + B\sin(\omega_\text{p}t)\right] \mathrm{e}^{-\mu t} \qquad \text{avec} \qquad \left\{\begin{aligned} \mu &= \frac{\omega_0}{2Q} \\ \omega_\text{p} &= \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}} \end{aligned}\right.$$

On compte sur la courbe huit oscillations en 1 ms, d'où

$$T_\text{p} = 0{,}12\,\text{ms} \qquad \text{donc} \qquad \omega_\text{p} = \frac{2\pi}{T_\text{p}} = 5{,}0\cdot 10^4\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}\,.$$

Par ailleurs, on lit graphiquement que le temps $\tau = 1/\mu$ au bout duquel l'enveloppe exponentielle des oscillations atteint 37 % de sa valeur initiale (exponentielle décroissante avec valeur asymptotique nulle) vaut $\tau = 0{,}8$ ms, d'où

$$\tau = 0{,}8\,\text{ms} \qquad \text{d'où} \qquad \mu = \frac{1}{\tau} = 1{,}3\cdot 10^3\,\text{s}^{-1}$$

En inversant les relations donnant μ et ω_p, on trouve

$$\omega_0 = \sqrt{{\omega_\text{p}}^2 + \mu^2} = 5{,}0\cdot 10^4\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1} \qquad \text{et} \qquad Q = 20$$

Ces résultats sont conformes à ce que l'on peut attendre : rappelons que Q compte le nombre d'oscillations dans le régime transitoire, dont il est raisonnable qu'il soit de l'ordre de 20 à 30. Puis, compte tenu de la valeur de Q, il est normal d'avoir $\omega_\text{p} \simeq \omega_0$. En inversant les relations donnant Q et ω_0 en fonction des valeurs composants, on trouve

$$\boxed{L = \frac{RQ}{\omega_0} = 2{,}0\cdot 10^{-2}\,\text{H} \qquad \text{et} \qquad C = \frac{1}{R\,Q\,\omega_0} = 2{,}0\cdot 10^{-8}\,\text{F}\,.}$$

Il reste enfin à trouver l'amplitude E de l'échelon de tension. Les conditions initiales pour ce circuit soumis à un échelon passant de E_1 à E_2 se déterminent comme d'habitude avec les relations de continuité et donnent

$$i(0^+) = i(0^-) = 0$$

en ce qui concerne l'intensité. En ce qui concerne sa dérivée, elle s'obtient via la tension aux bornes de la bobine. Comme la tension aux bornes du condensateur vaut E_1 à $t = 0^-$, alors la loi des mailles donne à $t = 0^+$

$$E_2 = u_R(0^+) + u_L(0^+) + u_C(0^+) = R\,i(0^+) + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+) + u_C(0^-) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+) + E_1 \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+) = \frac{E_2 - E_1}{L}\,.$$

Il est donc seulement possible de déterminer *la hauteur* $E = E_2 - E_1$ de l'échelon, mais pas les valeurs initiale et finale de la tension imposée par le générateur. On peut alors en déduire par la méthode usuelle

$$A = 0 \qquad \text{et} \qquad B = \frac{E}{L\,\omega_\text{p}}$$

soit

$$i(t) = \frac{E}{L\,\omega_\text{p}}\sin(\omega_\text{p}t)\,\mathrm{e}^{-\mu t}\,.$$

Comme $T_\text{p} \ll \tau$, la valeur de $E/L\,\omega_\text{p}$ correspond en bonne approximation à la valeur de i à son premier extrêmum, soit

$$\frac{E}{L\,\omega_\text{p}} \simeq i_\text{min} \simeq -5\,\text{mA} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{E = L\,\omega_\text{p}\,i_\text{min} = -5\,\text{V}\,.}$$

On peut s'assurer que $E < 0$ à partir du signe de la dérivée en $t = 0^+$.

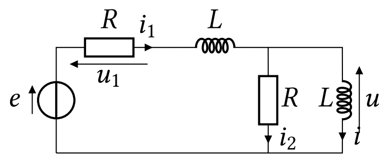


Figure 5 – Circuit à deux bobines.

Exercice 11 : Circuit à deux bobines

2 | 3 |

- *Mise en équation d'un circuit électrique ;*
- *Recherche des conditions initiales ;*
- *Détermination des constantes d'intégration.*

Raisonons avec les notations de la figure 5.

• **Équation différentielle :** D'après la loi des nœuds et la loi d'Ohm,

$$i_1 = i_1 + i_2 \qquad \text{soit} \qquad \frac{u_1}{R} = i + \frac{u}{R}\,,$$

puis grâce à la loi des mailles et à la loi de comportement de la bobine, sachant que $t > 0$ donc $e = 0$,

$$\frac{1}{R}\left(0 - L\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - u\right) = i + \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

Revenons à la loi des nœuds pour exprimer la dérivée de i_1 :

$$\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2}\,.$$

En réinjectant dans l'équation de travail,

$$\frac{1}{R}\left(-L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - \frac{L^2}{R}\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} - L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right) = i + \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

Rangeons un peu tout ça :

$$\frac{L^2}{R^2}\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{3L}{R}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + i = 0\,.$$

On peut enfin écrire cette équation sous forme canonique en posant $\omega_0 = R/L$ mais introduire la notation Q pour le facteur de qualité est peu judicieux et mieux vaut garder la valeur numérique connue 1/3,

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + 3\omega_0\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 i = 0\,.}$$

> *Remarquons que la valeur du facteur de qualité est indépendante des composants, et toujours inférieure à 1/2. Cela implique notamment que le courant i ne sera jamais pseudo-périodique en changeant L et/ou R ... sauf à prendre deux bobines différentes, ce qui n'est pas le même exercice.*

• **Forme générale des solutions :** l'équation est homogène, donc la solution particulière nulle convient. Le polynôme caractéristique s'écrit

$$r^2 + 3\omega_0 r + {\omega_0}^2 = 0\,,$$

et il a pour discriminant $9{\omega_0}^2 - 4{\omega_0}^2 = 5{\omega_0}^2 > 0$, et donc comme racines

$$\boxed{r_\pm = \frac{-3\omega_0 \pm \sqrt{5{\omega_0}^2}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}\omega_0\,.}$$

La solution s'écrit alors sous la forme

$$\boxed{i(t) = A\,\mathrm{e}^{r_+ t} + B\,\mathrm{e}^{r_- t}\,,}$$

avec A et B deux constantes.

- **Recherche des conditions initiales :** à l'instant $t = 0^-$, le circuit est en régime permanent et $e = E$. Les bobines équivalent à des fils, donc $u(0^-) = 0$ et d'après la loi des nœuds et la loi d'Ohm

$$i_1(0^-) = i(0^-) + i_2(0^-) \qquad \text{soit} \qquad \frac{u_1(0^-)}{R} = i(0^-) + \frac{\cancel{u(0^-)}}{R}\,.$$

Or d'après la loi des mailles $E = u_1(0^-) + 0 + 0$. Le courant traversant une bobine étant toujours continu, on en déduit

$$\boxed{i(0^+) = i(0^-) = \frac{E}{R}\,.}$$

De même,

$$i_1(0^+) = i_1(0^-) = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \cancel{i_1(0^+)} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{LN}}}{=} \cancel{i_2(0^+)} + \frac{u(0^+)}{R} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+) = \frac{u(0^+)}{L} = 0\,.}$$

- **Détermination des constantes :** d'une part,

$$i(0^+) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{expr}}}{=} A + B \underset{\substack{\uparrow\\ \text{CI}}}{=} \frac{E}{R}$$

et d'autre part

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{expr}}}{=} Ar_+ + Br_- \underset{\substack{\uparrow\\ \text{CI}}}{=} 0\,.$$

Procédons par combinaison linéaire pour déterminer B :

$$\begin{cases} r_+A + r_+B = r_+\dfrac{E}{R} \\ Ar_+ + Br_- = 0 \end{cases} \qquad \text{d'où} \qquad (r_+ - r_-)B = r_+\frac{E}{R} \qquad \text{soit} \qquad \sqrt{5}B = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\frac{E}{R}$$

et finalement

$$B = \frac{-3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\frac{E}{R}\,.$$

On en déduit ensuite

$$A = -\frac{r_-}{r_+}B = \frac{3+\sqrt{5}}{-3+\sqrt{5}} \times \frac{-3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\frac{E}{R} \qquad \text{soit} \qquad A = \frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\frac{E}{R}\,.$$

Finalement,

$$\boxed{i(t) = \frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\frac{E}{R}\exp\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\omega_0 t\right) + \frac{-3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\frac{E}{R}\exp\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\omega_0 t\right)\,.}$$

Problème ouvert

Exercice 12 : À la cantine 3 | 1

▹ *Problème ouvert.*

Supposons que le distributeur porte N plateaux, tous d'épaisseur $e = 1\,\text{cm}$ et de masse $m = 200\,\text{g}$. Quelle que soit la valeur de N, le sommet de la pile de plateaux se trouve $h = 10\,\text{cm}$ sous le point d'attache des deux ressorts. On néglige le poids du support à plateaux devant celui des plateaux. Comme les plateaux sont évidemment immobiles (...) alors la force exercée par les deux ressorts doit compenser le poids des plateaux, ce qui se traduit par

$$2k(Ne + h - \ell_0) = Nmg \qquad \text{soit} \qquad 2k(h-\ell_0) + N(2ke - mg) = 0$$

Cette condition devant être vérifiée pour toute valeur de N, on en déduit les deux égalités

$$\begin{cases} 2k(h-\ell_0) = 0 \\ 2ke - mg = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \boxed{\begin{cases} \ell_0 = h = 10\,\text{cm} \\ k = \dfrac{mg}{2e} = 100\,\text{N}\cdot\text{m}^{-1} \end{cases}}$$

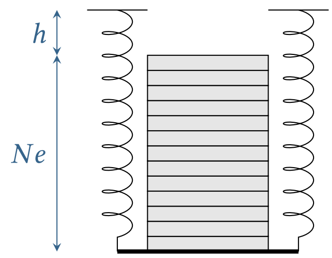


Figure 6 – Distributeur de plateaux.

> *Pour identifier le système d'équations, on peut également raisonner d'abord sur le cas $N = 0$ qui donne la première équation du système, puis simplifier l'équation issue du PFD, et en déduire la deuxième équation du système.*

Exercice 13 : Posé sur un plateau ? 3 | 3

▹ *Problème ouvert.*

- **Analyse qualitative**

L'étude est évidemment menée dans le référentiel terrestre. Il s'agit d'une question de contact entre le plateau et le cube : on s'attend donc à utiliser le PFD pour déterminer une force inconnue, celle qui traduit le contact entre cube et plateau. La démarche est donc de **supposer** le contact, de résoudre les équations, et de revenir sur l'hypothèse pour vérifier ses limites de validité.

- **Mise en équation**

Reste à trouver à quel système appliquer cette loi : compte tenu de la question, le choix est de considérer le cube, supposé de masse m. Il est soumis à son poids,

$$\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} = -mg\overrightarrow{e}_z$$

et à la force $\overrightarrow{R} = R\overrightarrow{e}_z$ verticale vers le haut exercée par le plateau. Par contre, comme le ressort et le cube ne se touchent pas, le ressort n'exerce **aucune** force sur le cube, tout passe par l'intermédiaire du plateau ... et ce même si on sent bien que le cube bouge grâce au ressort ! Méfiez-vous des intuitions trompeuses sur les forces ! D'après le PFD appliqué au cube et projeté sur z,

$$\boxed{m\ddot{z} = -mg + R\,.}$$

Le problème ici est que cette unique équation implique deux inconnues : $\ddot{z}$ et R. Il faut donc une équation supplémentaire, qui devra nous donner $\ddot{z}$ puisque l'on cherche R. Cette équation va venir du PFD appliqué au plateau : comme le cube et le plateau sont indéformables et en contact, alors leur accélération est la même. Le plateau est soumis à trois forces que sont son poids,

$$\overrightarrow{P}' = m'\overrightarrow{g} = -m'g\overrightarrow{e}_z\,,$$

la force de rappel du ressort,

$$\overrightarrow{f}_{\text{ress}} = -k(\ell(t)-\ell_0)(-\overrightarrow{e}_z) = +k(\ell_{\text{éq}} - z - \ell_0)\,\overrightarrow{e}_z$$

et la force qu'il subit de la part du cube $\vec{R}'$, égale à $-\vec{R} = -R\,\vec{e}_z$ d'après le principe des actions réciproques. D'après le PFD appliqué au plateau et projeté sur $\vec{e}_z$,

$$\boxed{m'\ddot{z} = -m'g + k(\ell_{\text{éq}} - z - \ell_0) - R}$$

On aboutit donc finalement à un système de deux équations différentielle à deux inconnues, $\ddot{z}$ et R. Comme il s'agit d'équations différentielles, il n'est pas possible de les résoudre comme des équations algébriques (le z apparaissant dans la force exercée par le ressort « gênerait »). On va donc commencer par résoudre l'équation sur z puis en déduire R. En sommant les deux équations, on obtient

$$(m+m')\ddot{z} = -(m+m')g - kz + k(\ell_{\text{éq}} - \ell_0)\,.$$

Avant de se lancer dans la résolution complète, il est préférable d'étudier la position d'équilibre où par définition de l'équilibre $\ddot{z} = 0$ et par définition du repère $z = 0$, donc

$$0 = -(m+m')g + k(\ell_{\text{éq}} - \ell_0)$$

Cela permet de simplifier l'équation différentielle, qui s'écrit sous forme canonique

$$\ddot{z} + \frac{k}{m+m'}z = 0\,.$$

On reconnaît l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0 = \sqrt{k/(m+m')}$. Comme l'équation est homogène, on a directement

$$z(t) = \alpha\cos(\omega_0 t) + \beta\sin(\omega_0 t)\,.$$

Les constantes se déterminent à partir des conditions initiales,

$$z(0) \underset{\text{expr}}{\overset{\uparrow}{=}} \alpha \underset{\text{CI}}{\overset{\uparrow}{=}} -A \qquad \text{et} \qquad \dot{z}(0) \underset{\text{sol}}{\overset{\uparrow}{=}} \omega_0\beta \underset{\text{CI}}{\overset{\uparrow}{=}} 0$$

d'où finalement

$$\boxed{z(t) = -A\cos(\omega_0 t)\,.}$$

Maintenant que z est connu, on peut (enfin !) en déduire l'expression de R tant qu'il y a contact (rappelons que tous les calculs ont été faits en supposant le contact). En appliquant la loi de la quantité de mouvement à la masse, nous avions montré que

$$R = m\ddot{z} + mg$$

et nous venons de calculer

$$\ddot{z} = -\frac{k}{m+m'}z = +\frac{kA}{m+m'}\cos(\omega_0 t)$$

d'où

$$\boxed{R = \frac{m}{m+m'}kA\cos(\omega_0 t) + mg\,.}$$

La valeur minimale que prend R doit toujours rester positive, sans quoi le cube décolle, donc le cube reste sur le plateau tant que

$$-\frac{m}{m+m'}kA + mg > 0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{A < \frac{(m+m')g}{k}\,.}$$