Régime libre des oscillateurs

Difficulté d'analyse et compréhension, initiative requise ;
Difficulté technique et calculatoire ;
Exercice important.

Flasher ou cliquer pour accéder au corrigé

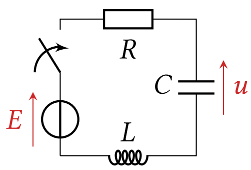
Se préparer

Applications de cours

Ces applications de cours sont des briques élémentaires des raisonnements à mener dans les exercices : les maîtriser est incontournable. Elles sont toutes traitées de manière exhaustive dans le cours.

E3+M2.1 - Un oscillateur masse-ressort horizontal évoluant sans frottement est lâché à l'instant initial d'une position X_0 avec une vitesse V_0. Établir l'équation du mouvement, la résoudre, et représenter l'allure de la solution obtenue. On identifiera X_0 et V_0 sur le graphe.

E3+M2.2 - Considérons un oscillateur LC. Montrer que l'énergie électrique se conserve.



E3+M2.3 - Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension u pour $t > 0$ et l'écrire sous forme canonique. Donner la forme de ses solutions en fonction de la valeur de Q et des racines du polynôme caractéristique (que l'on ne résoudra pas explicitement).

Cahier d'Entraînement

Le *Cahier d'Entraînement* est un projet collaboratif mené par des enseignants de CPGE, proposant aux étudiants des entraînements leur permettant de travailler en autonomie sur des techniques et « réflexes » utiles dans les exercices, en particulier calculatoires. Il est librement téléchargeable en scannant ou cliquant sur le QR-code ci-contre.

$\rightsquigarrow$ pour ce chapitre : 4.9, 4.11, 4.16, 4.18 et 4.19.

Oscillateur harmonique

Exercice 1 : Une masse et deux ressorts 1 | 2

- *Force exercée par un ressort ;*
- *Détermination des constantes d'intégration.*

Considérons un point matériel M de masse m glissant horizontalement et sans frottement, repéré par son abscisse x telle que $\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{e}_x$. Ce solide est relié à deux ressorts placés sur un même axe, eux-mêmes fixés en O et O'. Le solide étudié se trouve entre O et O'. La longueur OO' est notée L. Les ressorts ont même longueur à vide ℓ_0, mais celui fixé en O' a une raideur double par rapport à celui fixé en O.

1 - Faire un schéma légendé de la situation.

2 - Déterminer la position d'équilibre $x_{\text{éq}}$ de la masse.

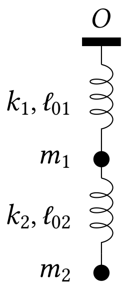
3 - Établir l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$, appelée équation du mouvement.

4 - Supposons qu'à l'instant $t = 0$, M est placé en $x = x_0 > x_{\text{éq}}$ et lancé avec une vitesse initiale $\dot{x} = -v_0 < 0$. Établir la loi horaire $x(t)$ et représenter son allure.

Exercice 2 : Masses et ressorts à la verticale

adapté oral banque PT | 2 | 2 |

- *Force exercée par un ressort ;*
- *Oscillateurs harmoniques couplés.*



1 - On considère le système ci-contre où k_i et ℓ_{0i} sont les raideurs et longueurs à vide des ressorts. Déterminer les allongements $\Delta\ell_1$ et $\Delta\ell_2$ à l'équilibre.

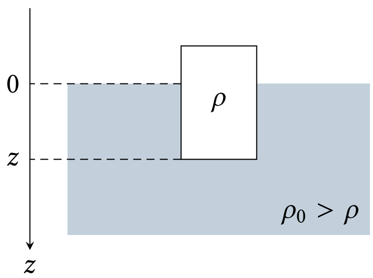
2 - Établir les équations différentielles vérifiées par les écarts z_1 et z_2 aux positions d'équilibre.

3 - La masse m_2 est maintenant supposée maintenue dans sa position d'équilibre. La masse m_1 est alors déplacée de Z_0 de sa position d'équilibre et lâchée sans vitesse initiale. Trouver l'équation $z_1(t)$ régissant le mouvement de m_1.

Exercice 3 : Oscillations d'un flotteur

oral ATS | 1 | 2

- *Poussée d'Archimède ;*
- *Un oscillateur harmonique … sans ressort.*



On modélise un flotteur (bouchon de pêche, bouée, etc.) par un cylindre de masse volumique ρ plongeant partiellement dans l'eau de masse volumique $\rho_0 > \rho$. On suppose son axe de révolution constamment vertical.

1 - Déterminer la hauteur z_0 immergée à l'équilibre.

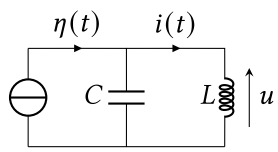
2 - Quelle est la force F à exercer sur le flotteur pour l'immerger en entier ?

3 - À partir de la position d'équilibre déterminée précédemment, on enfonce légèrement le cylindre avant de le relâcher. Montrer que le cylindre effectue des oscillations et déterminer leur période.

Exercice 4 : Oscillateur harmonique par l'énergie

1 | 2 |

- *Oscillateur harmonique électrique ;*
- *Énergie électrique.*



Dans le circuit ci-contre, le générateur supposé idéal est brusquement éteint, $\eta(t)$ passant instantanément de I_0 à 0 à l'instant $t = 0$. On appelle $\mathcal{E}_{\text{tot}} = \mathcal{E}_C + \mathcal{E}_L$ l'énergie électrique totale stockée dans le condensateur et la bobine.

1 - Exprimer $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{\text{tot}}}{\mathrm{d}t}$ en fonction de i et ses dérivées.

2 - Justifier qualitativement que $\mathcal{E}_{\text{tot}}$ est constante. En déduire l'équation différentielle vérifiée par i.

3 - Établir l'expression de $i(t)$.

Oscillateur amorti

Exercice 5 : Oscillations d'une sphère — oral CCINP PSI | 2 | 1

▹ *Mise en équation d'un oscillateur mécanique.*

Dans les deux dispositifs de la figure 1, la sphère est reliée par une poulie parfaite à un ressort de raideur fixé au mur. Dans le premier cas, la sphère oscille dans l'air où la période des oscillations vaut T_1. Dans la seconde situation, la sphère baigne dans de l'eau de viscosité dynamique η et subit la force de Stokes

$$\vec{F} = -6\pi\eta R\vec{v}$$

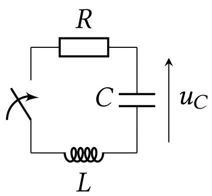
où $\vec{v}$ est la vitesse de la sphère. La période des oscillations vaut alors $T_2 > T_1$.

Question : Exprimer la viscosité η.

Figure 1 – Oscillations d'une sphère suspendue.

Exercice 6 : RLC série en régime libre — oral CCINP PSI | 2 | 2

▹ *Mise en équation d'un circuit électrique ;*
▹ *Recherche de conditions initiales ;*
▹ *Détermination des constantes d'intégration ;*
▹ *Étude expérimentale.*

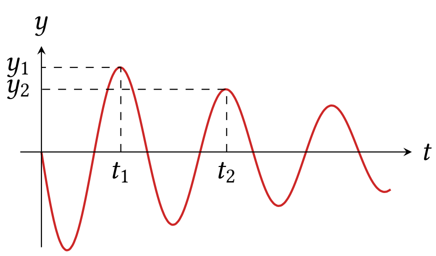


On étudie le circuit ci-contre où le condensateur est initialement chargé : $u_C(t=0) = U_0$.

1 - Déterminer les valeurs de i, de u_C et de u_L à la fermeture du circuit en $t = 0^+$, puis en régime permanent pour $t \to \infty$.

2 - Parmi ces grandeurs, laquelle correspond à y représentée ci-contre ? Comment doit-on procéder pour la mesurer ? Indiquer sur le schéma les branchements de l'oscilloscope.

3 - Déterminer l'équation différentielle vérifiée par le courant i en fonction de $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ et $m = R/2L\omega_0$.

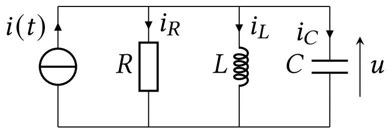


4 - On suppose $m < 1$. Déterminer la solution en fonction de $\Omega = \omega_0\sqrt{1-m^2}$. Que représente Ω ? Comment peut-on l'évaluer à partir de la courbe ?

5 - En utilisant des approximations adéquates, trouver une relation simple entre le rapport y_1/y_2 et m.

Exercice 7 : RLC parallèle soumis à un échelon de courant — 1 | 2

- *Mise en équation d'un circuit électrique ;*
- *Recherche de conditions initiales ;*
- *Détermination des constantes d'intégration.*



À l'instant $t = 0$, le générateur de courant impose que $i(t)$ passe de 0 à $I_0 = 10\,\mathrm{mA}$. Les composants sont choisis tels que $R = 50\,\Omega$, $C = 400\,\mathrm{nF}$ et $L = 100\,\mathrm{mH}$.

1 - Établir l'équation différentielle satisfaite par $u(t)$ dans ce circuit à $t > 0$. Identifier la pulsation propre ω_0 et du facteur de qualité Q. Commenter l'expression de Q.

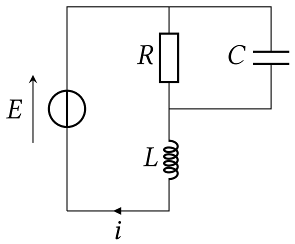
2 - Justifier qu'à l'instant $t = 0$, $i_L = 0$ et $u = 0$.

3 - Établir l'expression de $u(t)$ pour $t > 0$.

4 - Représenter son allure qualitativement, sans réaliser d'étude de fonction exhaustive.

Exercice 8 : Encore un RLC ! — oral CCINP PSI | 1 | 2 |

- *Mise en équation d'un circuit électrique ;*
- *Recherche de conditions initiales ;*
- *Détermination des constantes d'intégration.*



Considérons le circuit représenté ci-contre, où le condensateur est initialement déchargé. Le générateur fournit un échelon de tension, en passant de 0 à E à $t = 0$.

1 - Établir l'équation différentielle vérifiée par le courant i.

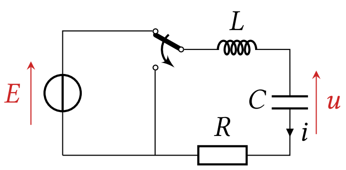
2 - L'écrire sous forme canonique en introduisant deux grandeurs ω_0 et Q que l'on interprétera.

3 - Donner la valeur du courant i et de sa dérivée à l'instant initial.

4 - En supposant $Q = 2$, donner l'expression de $i(t)$ et tracer son allure.

Exercice 9 : Décrément logarithmique — 1 | 3

- *Mise en équation d'un circuit électrique ;*
- *Détermination des constantes d'intégration.*



L'interrupteur du circuit ci-contre est basculé à l'instant $t = 0$, et l'observation de la tension u à l'oscilloscope montre un régime pseudo-périodique.

1 - On cherche u sous la forme $u(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$. Déterminer U_0, ω et φ en fonction des composants.

2 - Notons T la pseudo-période. On appelle *décrément logarithmique* la quantité

$$\delta = \ln \frac{u(t)}{u(t+T)}\,.$$

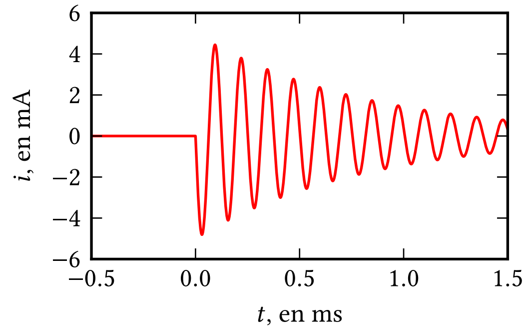
Montrer que le décrément logarithmique ne dépend que du facteur de qualité Q.

3 - Comment cette expression se simplifie-t-elle dans la limite $Q \gg 1$? Comparer la valeur exacte à la valeur approchée pour $Q = 3{,}5$. Commenter.

4 - L'étude du décrément logarithmique est une méthode très efficace pour déterminer expérimentalement le facteur de qualité : expliquer comment procéder.

Exercice 10 : Analyse de relevé expérimental — 3 | 2

- *Étude expérimentale ;*
- *Recherche de conditions initiales.*

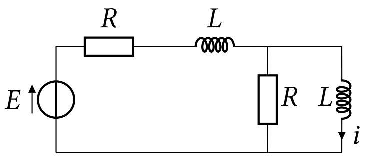


La courbe ci-contre représente le courant mesuré dans un circuit formé d'une bobine et d'un condensateur montés en série avec un générateur imposant un échelon de tension. On admet que la bobine est très bien décrite par une bobine idéale, mais pas le générateur, de résistance interne $r = 50\,\Omega$.

Analyser la courbe pour déterminer la hauteur E de l'échelon de tension, l'inductance L et la capacité C.

Exercice 11 : Circuit à deux bobines — 2 | 3

- *Mise en équation d'un circuit électrique ;*
- *Recherche des conditions initiales ;*
- *Détermination des constantes d'intégration.*



Le générateur du circuit ci-contre délivre un échelon de tension descendant :

$$e(t) = \begin{cases} E & \text{pour } t < 0 \\ 0 & \text{pour } t > 0 \end{cases}$$

Exprimer $i(t)$.

Problème ouvert

> *Un problème ouvert demande de l'initiative dans le raisonnement mené. Pour aborder un tel exercice, il peut notamment être utile de faire un schéma modèle, d'identifier et nommer les grandeurs pertinentes, de proposer des hypothèses simplificatrices, de décomposer le problème en des sous-problèmes simples, etc. Le candidat peut également être amené à proposer des valeurs numériques raisonnables pour les grandeurs manquantes … et à l'inverse toutes les valeurs données ne sont pas forcément utiles. Le tout est évidemment à adapter à la situation proposée !*

Exercice 12 : À la cantine — 3 | 1

- *Problème ouvert.*

La cantine du lycée utilise des chariots à niveau constant pour la distribution des plateaux. Ceux-ci sont posés sur un support plan maintenu par des ressorts de telle sorte que le haut de la pile soit toujours à la même hauteur, quel que soit le nombre de plateaux empilés, voir figure 2.

Question : Déterminer toutes les caractéristiques utiles de la machine. Des valeurs numériques vraisemblables sont attendues.

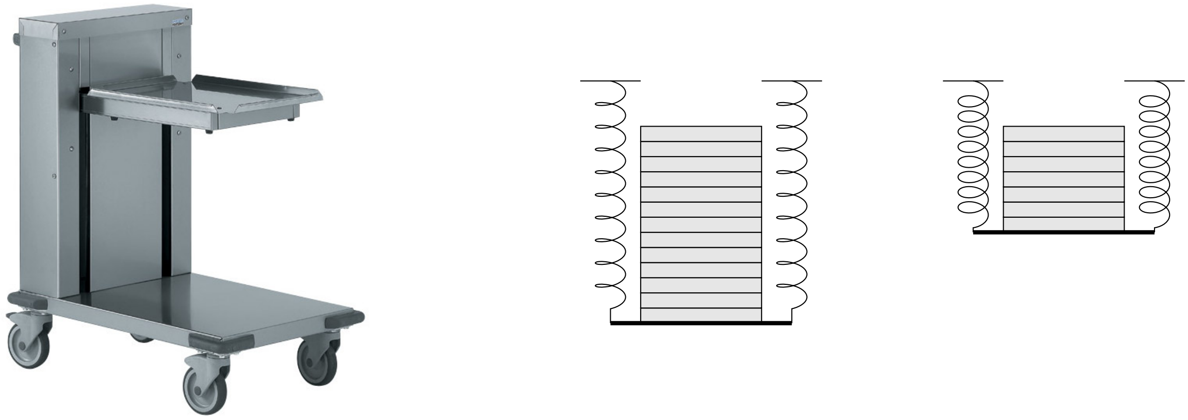
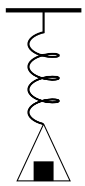


Figure 2 – Chariot à niveau constant d'un distributeur de plateaux.

Exercice 13 : Posé sur un plateau ? 3 | 2

▹ *Problème ouvert.*



À l'extrémité inférieure d'un ressort vertical est suspendu un plateau sur lequel est placé un cube. Le plateau est lâché sans vitesse initiale après l'avoir descendu d'une altitude A par rapport à sa position d'équilibre. Le cube décolle-t-il du plateau ?

Remarque : la principale difficulté de l'exercice est d'établir les équations **rigoureusement** !