

Montages à amplificateur linéaire intégré

Exercice 1 : Montage soustracteur



- Montage simple à ALI;
- Régime linéaire.

Correction des questions d'analyse du corrigé

Question d'analyse 1 - Les deux tensions d'intérêt de cette branche, e_1 et s , sont données aux extrémités alors que le nœud central est de potentiel inconnu. Pourtant, les deux résistances sont bien parcourues par le même courant et forment bel et bien un pont diviseur de tension, mais les tensions divisées seraient $v_- - e_1$ et $s - e_1$, ce qui ne facilite pas le calcul.

Question d'analyse 2 - Vue la position de la masse, la tension intéressante e_2 est cette fois-ci imposée à l'ensemble de la branche.

Question d'analyse 3 - Le théorème de Millman s'écrit

$$v_+ = \frac{\frac{e_2}{R} + \frac{0}{R'}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}}$$

Je te laisse finir le calcul, qui donne bien le même résultat.

Question d'analyse 4 - Le montage ne compte qu'une unique rétroaction, et celle-ci est négative. L'ALI fonctionne donc selon toute vraisemblance en régime linéaire, du moins tant que les signaux d'entrée restent d'amplitude raisonnable.

Question d'analyse 5 - Absolument pas ☹ Attention à cette confusion : le régime linéaire implique $\varepsilon = v_+ - v_- = 0$ mais pas $v_+ = v_- = 0$! Les deux potentiels valent ... ce qu'ils valent !

Exercice 2 : Comparateur à hystérésis inverseur



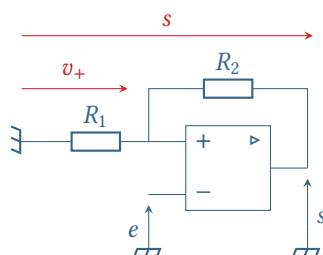
- Montage simple à ALI;
- Régime de saturation.

Correction des questions d'analyse du corrigé

Question d'analyse 1 - Le montage ne compte qu'une seule rétroaction, et elle est positive.

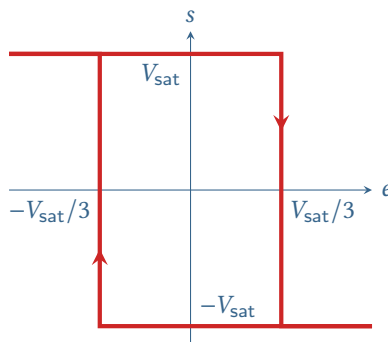
Question d'analyse 2 - Les courants d'entrée d'un ALI idéal sont nuls.

Question d'analyse 3 - Le potentiel d'un nœud correspond à la tension entre ce nœud et la masse.



Question d'analyse 4 - Lorsque l'ALI est en saturation basse, la tension de sortie $s = -V_{\text{sat}}$.

Question d'analyse 5 - Il suffit de suivre la condition « tant que » partant d'une tension très négative ou très positive pour être certain de l'état de saturation initial.



Question d'analyse 6 - La tension d'entrée est bien égale à une tension de basculement, mais pas celle pour l'état courant de l'ALI. Il n'y a donc aucune raison qu'il bascule.

Réalisation de fonctions

Exercice 3 : Montage dérivateur



- Montage simple à ALI ;
- Régime linéaire.

Il n'y a qu'une rétroaction négative, donc l'ALI fonctionne probablement en régime linéaire. La présence du condensateur incite à travailler en complexes. Les deux tensions intéressantes s et e sont aux extrémités des branches, on applique donc le théorème de Millman à l'entrée \ominus de l'ALI :

$$\underline{V}_- = \frac{jC\omega \underline{E} + \frac{\underline{S}}{R}}{jC\omega + \frac{1}{R}}$$

Comme le fonctionnement est linéaire, alors $\underline{V}_- = \underline{V}_+ = 0$ donc

$$jC\omega \underline{E} + \frac{\underline{S}}{R} = 0 \quad \text{d'où} \quad \boxed{\underline{S} = -jRC\omega \underline{E}},$$

ce qui donne dans le domaine temporel

$$\boxed{s = -RC \frac{de}{dt}}.$$

Exercice 4 : Montage sommateur



- Montage simple à ALI ;
- Régime linéaire.

La seule rétroaction est négative, on peut donc supposer que l'ALI fonctionne en régime linéaire.

D'après le théorème de Millman appliqué à l'entrée \oplus de l'ALI,

$$v_+ = \frac{\frac{v_1}{R} + \frac{v_2}{R}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R}} \quad \text{soit} \quad v_+ = \frac{v_1 + v_2}{2}.$$

Notons v_- le potentiel de l'entrée inverseuse, égal à la tension aux bornes de la résistance représentée verticalement. Les deux résistances de la branche du bas sont parcourues par le même courant, donc forment un pont diviseur de tension

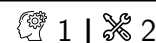
$$\frac{v_-}{v_s} = \frac{R}{R+R} \quad \text{soit} \quad v_s = 2v_- .$$

Enfin, comme l'ALI fonctionne de régime linéaire alors $v_+ = v_-$ d'où

$$v_s = v_1 + v_2 .$$

Le point important de l'exercice est le choix de la méthode pour exprimer les potentiels. Sur la branche du haut, l'entrée intéressante \oplus est à une extrémité de la branche d'où le choix de la loi des nœuds, alors que sur la branche du bas l'entrée intéressante \ominus est au centre de la branche, d'où l'intérêt du pont diviseur.

Exercice 5 : Intégrateur différentiel



- ▷ Montage simple à ALI ;
- ▷ Régime linéaire.

La seule rétroaction est négative, on peut donc supposer le régime linéaire. En notation complexe, le théorème de Millman appliqué à l'entrée \ominus donne

$$\underline{V_-} = \frac{\frac{E_1}{R} + jC\omega \underline{S}}{\frac{1}{R} + jC\omega}$$

Un pont diviseur de tension dans la branche du bas donne

$$\frac{\underline{V_+}}{\underline{E_2}} = \frac{1/jC\omega}{R + 1/jC\omega} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

Or en fonctionnement linéaire $\underline{V_-} = \underline{V_+}$ d'où

$$\begin{aligned} \frac{\frac{E_1}{R} + jC\omega \underline{S}}{\frac{1}{R} + jC\omega} &= \frac{1}{1 + jRC\omega} \underline{E_2} \\ \frac{E_1}{R} - \frac{1}{1 + jRC\omega} \left(\frac{1}{R} + jC\omega \right) \underline{E_2} + jC\omega \underline{S} &= 0 \\ \frac{E_1}{jRC\omega} - \frac{1}{1 + jRC\omega} \left(\frac{1}{jRC\omega} + 1 \right) \underline{E_2} + \underline{S} &= 0 \end{aligned}$$

ce qui donne au final

$$\underline{S} = \frac{1}{jRC\omega} \left(\underline{E_2} - \underline{E_1} \right) .$$


On utilise la correspondance habituelle pour passer dans le domaine temporel, sans oublier la condition initiale,

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{RC} (e_2(t) - e_1(t)) \quad \text{donc} \quad \int_0^t ds = \frac{1}{RC} \int_0^t (e_2 - e_1) dt$$

ce qui conduit à

$$s(t) = s(0) + \frac{1}{RC} \int_0^t (e_2 - e_1) dt .$$

Exercice 6 : Filtre passe-haut amplificateur

- 
 - ▷ Fonction de transfert ;
 - ▷ Tracé d'un diagramme de Bode ;
 - ▷ Régime linéaire et de saturation.

Le montage ne compte qu'une seule rétroaction négative, on fait donc l'hypothèse que l'ALI fonctionne en régime linéaire.

1 • **Dans la limite des basses fréquences** : Le condensateur équivaut à un interrupteur ouvert, et aucun courant ne peut traverser les résistances. Comme s est la tension aux bornes de R' on en déduit $s = 0$ c'est-à-dire que les basses fréquences sont **coupées**.

• **Dans la limite des hautes fréquences** : Le condensateur équivaut à un fil, le montage s'apparente alors à un amplificateur inverseur. On en déduit que les hautes fréquences sont **transmises**, et potentiellement amplifiées.

• **Conclusion** : le filtre est un passe-haut.

2 L'association R, C a pour impédance équivalente

$$\underline{Z} = R + \frac{1}{jC\omega}.$$

D'après le théorème de Millman appliqué à l'entrée \ominus de l'ALI avec $v_- = v_+ = 0$,

$$0 = \frac{\frac{s}{R'} + \frac{e}{\underline{Z}}}{\frac{1}{R'} + \frac{1}{\underline{Z}}}$$

On en déduit

$$\underline{H} = \frac{s}{e} = -\frac{R'}{\underline{Z}} = -\frac{R'}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{-R'/R}{1 + \frac{1}{jRC\omega}}$$

On peut ainsi identifier à la forme canonique donnée,

$$\underline{H} = \frac{\underline{H}_0}{1 - j\frac{\omega_c}{\omega}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \underline{H}_0 = -R'/R \\ \omega_c = 1/RC \end{cases}$$

3 La capacité doit valoir

$$C = \frac{1}{R\omega_c} = 1 \cdot 10^{-7} \text{ F.}$$

En haute fréquence, $\underline{H} \sim \underline{H}_0$. Ainsi, si le gain est de 20 dB alors

$$|\underline{H}_0| = \frac{R'}{R} = 10^{20/20} = 10 \quad \text{d'où} \quad R' = 10 \text{ k}\Omega.$$

4 Dans la limite des hautes fréquences, d'après la question précédente,

$$G_{\text{dB}} = 20 \log |\underline{H}_0| = 20 \text{ dB.}$$

Dans la limite des basses fréquences,

$$\underline{H} \sim \frac{\underline{H}_0}{-j\frac{\omega_c}{\omega}} = \frac{j\omega \underline{H}_0}{\omega_c} \quad \text{soit} \quad G_{\text{dB}} = 20 \log |\underline{H}| = 20 \log \omega + 20 \log \frac{|\underline{H}_0|}{\omega_c}.$$

Comme toujours avec les filtres du premier ordre, les deux asymptotes se coupent en $\omega = \omega_c$. On en déduit le diagramme est représenté figure 1.

5 Le plus simple est de raisonner sur le diagramme de Bode, seul le dernier cas n'est pas évident.

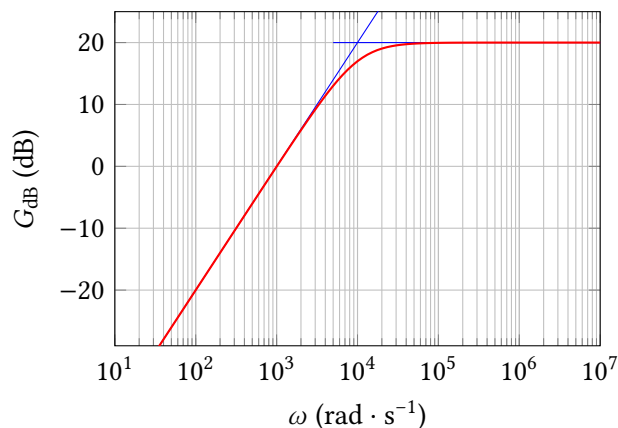
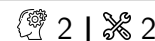


Figure 1 – Diagramme de Bode.

- ▷ $E_0 = 1 \text{ V}$ et $\omega = 1 \cdot 10^2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$: on calcule (ou on constate sur le diagramme) que $G_{\text{dB}} = -20 \text{ dB}$ donc $|\underline{H}| = 10^{-20/20} = 1/10$, le signal de sortie est donc sinusoïdal d'amplitude $E_0/10 = 0,1 \text{ V}$ et le spectre identique à celui de l'entrée, à l'amplitude près.
- ▷ $E_0 = 3 \text{ V}$ et $\omega = 1 \cdot 10^2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$: de même, le signal de sortie est sinusoïdal d'amplitude $0,3 \text{ V}$.
- ▷ $E_0 = 1 \text{ V}$ et $\omega = 1 \cdot 10^5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$: à cette pulsation, $G_{\text{dB}} = 20 \text{ dB}$ donc $|\underline{H}| = 10^{20/20} = 10$, le signal de sortie est donc sinusoïdal d'amplitude $10E_0 = 10 \text{ V}$.
- ▷ $E_0 = 3 \text{ V}$ et $\omega = 1 \cdot 10^5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$: en reprenant le raisonnement précédent, le signal de sortie devrait avoir une amplitude de 30 V ... ce qui est impossible, car la tension de sortie doit rester inférieure à la tension de saturation de l'ALI. Le signal de sortie est donc un sinus écrété, qui conserve la valeur de $\pm 15 \text{ V}$ dès que l'ALI est en saturation. Cela se traduit par un enrichissement spectral : outre le fondamental à $1 \cdot 10^5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, des harmoniques apparaissent dans le spectre à $2 \cdot 10^5, 3 \cdot 10^5, 4 \cdot 10^5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ etc. mais prévoir leur amplitude n'est pas simple.

Exercice 7 : Filtre passe-tout déphaseur



- ▷ Fonction de transfert ;
- ▷ Tracé d'un diagramme de Bode ;
- ▷ Régime linéaire.

1 La double rétroaction rend impossible d'anticiper avec certitude le régime de fonctionnement de l'ALI. Le fonctionnement linéaire de l'ALI est possible (et on le suppose), mais a priori le fonctionnement en saturation aussi. Il faudrait un modèle d'ALI plus élaboré que le modèle de gain infini pour le démontrer.

2 Le théorème de Millman exprimé à l'entrée \ominus donne

$$\underline{V}_- = \frac{\frac{\underline{E}}{R} + \frac{\underline{S}}{R}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R}} = \frac{1}{2} (\underline{E} + \underline{S}) .$$

Un pont diviseur de tension dans la branche du bas donne

$$\frac{\underline{V}_+}{\underline{E}} = \frac{1/jC\omega}{1/jC\omega + R} = \frac{1}{1 + jRC\omega} .$$

Le fonctionnement linéaire permet d'identifier $\underline{V}_+ = \underline{V}_-$, soit

$$\frac{1}{1 + jRC\omega} \underline{E} = \frac{1}{2} (\underline{E} + \underline{S}) \quad \text{donc} \quad \underline{S} = \left(\frac{2}{1 + jRC\omega} - 1 \right) \underline{E}$$

et ainsi

$$\underline{H} = \frac{1 - jRC\omega}{1 + jRC\omega}$$

3 • **Diagramme en gain** : La fonction de transfert est le quotient de deux nombres complexes conjugués, donc de même module : on en déduit que $|\underline{H}| = 1$ et donc $G_{dB} = 0$ quelle que soit la pulsation. La courbe de gain est donc horizontale.

• **Diagramme en phase** :

$$\begin{aligned}\varphi &= \arg \underline{H} = \arg(1 - jRC\omega) - \arg(1 + jRC\omega) \\ &= \arctan \frac{-RC\omega}{1} - \arctan \frac{RC\omega}{1} \\ &= -2 \arctan(RC\omega).\end{aligned}$$

Ainsi,

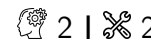
$$\varphi_{BF} \sim 0 \quad \text{et} \quad \varphi_{HF} \sim -\pi.$$

Rappelons que l'argument d'un complexe $\underline{Z} = X + jY$ vaut $\arctan Y/X$, **mais seulement si** $X > 0$... et si $X < 0$ on traite le signe séparément ($\arg(-1) = \pi$) pour s'y ramener.

Il y a ici un piège : une analyse asymptotique donne $\underline{H}_{HF} \sim -1$ et donne donc très envie d'écrire $\varphi \sim \pi$... ce qui s'avère faux. Je suis au regret de ne pas avoir d'idée de ce qu'il faudrait faire pour se rendre compte du piège facilement.

4 Le montage laisse passer toutes les fréquences, mais les déphase sélectivement.

Exercice 8 : Filtre passe-bande inverseur



- ▷ Fonction de transfert ;
- ▷ Tracé d'un diagramme de Bode ;
- ▷ Régime linéaire.

Raisonnons sur le schéma de la figure 2 où sont indiquées les différentes notations.

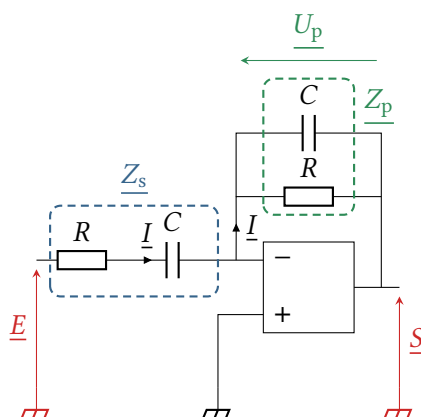


Figure 2 – Filtre passe-bande à ALI.

1 L'ALI ne compte qu'une **unique rétroaction négative**, il fonctionne donc probablement en régime linéaire. Cependant, il pourrait aussi fonctionner en régime de saturation si l'amplitude du signal d'entrée était trop élevée.

2 L'association parallèle, encadrée en vert sur la figure 2, est soumise à la tension $\underline{U}_p = \underline{V}_- - \underline{S} = -\underline{S}$ car le fonctionnement linéaire de l'ALI impose $\underline{V}_- = \underline{V}_+ = 0$.

- ▷ Limite haute fréquence : le condensateur équivaut à un fil, donc la tension \underline{U}_p à ses bornes est nulle, donc $\underline{S} = 0$.
- ▷ Limite basse fréquence : les condensateurs équivalent à un interrupteur ouvert, donc le courant \underline{I} est nul. Aucun courant ne traverse donc la résistance de l'association parallèle, donc la tension \underline{U}_p à ses bornes est nulle, donc $\underline{S} = 0$.

En conclusion, il s'agit bien d'un **filtre passe-bande**.

3] Puisque $\underline{V}_- = \underline{V}_+ = 0$, le théorème de Millman appliqué à l'entrée \ominus de l'ALI s'écrit

$$\frac{Y_s \underline{E} + Y_p \underline{S}}{\underline{Y}_s + \underline{Y}_p} = 0,$$

d'où on déduit

$$\underline{H} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = -\frac{Y_s}{Y_p} = -\frac{1}{Z_s Y_p}.$$

Les admittance et impédance équivalentes aux deux associations valent respectivement

$$\underline{Z}_s = R + \frac{1}{jC\omega} \quad \text{et} \quad \underline{Y}_p = \frac{1}{R} + jC\omega = \frac{1 + jRC\omega}{R}.$$

En remplaçant,

$$\begin{aligned} \underline{H} &= -\frac{1}{\left(R + \frac{1}{jC\omega}\right) \frac{1 + jRC\omega}{R}} \\ &= -\frac{1}{jRC\omega + 1 + 1 + \frac{1}{jRC\omega}} \\ &= -\frac{jRC\omega}{(jRC\omega)^2 + 2jRC\omega + 1} \\ \underline{H} &= -\frac{jRC\omega}{1 + 2jRC\omega - (RC)^2\omega^2}. \end{aligned}$$

4] Par identification des termes dépendant de ω ,

$$\begin{cases} \frac{j\omega H_0}{\omega_0 Q} = -jRC\omega \\ \frac{j\omega}{\omega_0 Q} = 2jRC\omega \\ -\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = -(RC)^2\omega^2 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} \omega_0 = \frac{1}{RC} \\ Q = \frac{1}{2} \\ H_0 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Attention à ne pas oublier le signe de H_0 ! Le montage est ici un filtre passe-bande inverseur, qui n'a pas d'équivalent avec les seuls dipôles R , L et C .

5] Raisonnons sur la forme canonique pour établir les équations des asymptotes.

• **Limite basse fréquence :**

$$\underline{H} \sim \frac{\frac{jx}{Q} H_0}{1} = \frac{jx}{Q} H_0 \quad \text{d'où} \quad \left\{ G_{dB} = 20 \log x + 20 \log \left| \frac{H_0}{Q} \right| = 20 \log x \varphi = -\frac{\pi}{2} \right.$$

puisque dans ce cas précis $Q = -H_0 = 1/2$.

• **Limite haute fréquence :**

$$\underline{H} \sim \frac{jx}{-x^2} H_0 = -\frac{j}{Qx} H_0 \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} G_{\text{dB}} = -20 \log x + 20 \log \left| \frac{H_0}{Q} \right| = -20 \log x \\ \varphi = +\frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

La nécessité de prendre une phase de $-3\pi/2$ apparaît ensuite, compte tenu de la valeur en $x = 1$.

• **Valeur exacte en $x = 1$:**

$$\underline{H}(x=1) = \frac{j}{j/Q} H_0 = H_0 = -\frac{1}{2} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} G_{\text{dB}}(x=1) = -20 \log 2 = -6 \text{ dB} \\ \varphi = -\pi \end{cases}$$

On en déduit le tracé de la figure 3.

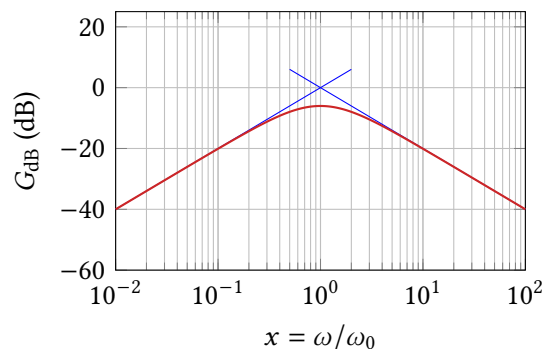
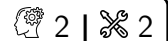


Figure 3 – Diagramme de Bode du filtre passe-bande actif.

Simulation de dipôles

Exercice 9 : Résistance négative



- ALI en régime linéaire ;
- Impédance d'entrée.

1 L'ALI compte une rétroaction sur chaque borne, il est donc **impossible** d'anticiper son régime de fonctionnement.

2 D'après la loi des nœuds appliquée à l'entrée \ominus , on a

$$i + \frac{v_s - v^-}{R} = 0 \quad \text{soit} \quad \boxed{v^- = v_s + Ri}$$

⚠⚠⚠ **Attention !** Le théorème de Millman ne peut pas être appliqué à l'entrée \ominus , car il n'y a ni admittance ni potentiel associé au courant i . Dans une telle situation, il faut revenir à la base, c'est-à-dire à la loi des nœuds dont découle le théorème de Millman.

Par un pont diviseur sur la branche contenant les deux résistances R_1 et R_2 , on trouve

$$\boxed{v^+ = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_s}$$

3 En régime linéaire, $v^+ = v^- = u$, donc

$$u = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_s \quad \text{soit} \quad v_s = \frac{R_1 + R_2}{R_1} u$$

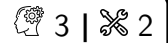
En réinjectant dans l'expression de v^- , il vient

$$u \left(1 - \frac{R_1 + R_2}{R_1} \right) = Ri \quad \text{soit} \quad -\frac{R_2}{R_1} u = Ri \quad \text{d'où} \quad \boxed{u = -R \frac{R_1}{R_2} i.}$$

L'intensité i et la tension u sont orientées en convention récepteur. La « loi de comportement » du montage est donc formellement identique à la loi d'Ohm, mais pour une résistance négative :

$$u = R_N i \quad \text{avec} \quad \boxed{R_N = -R \frac{R_1}{R_2}.}$$

Exercice 10 : Simulateur d'inductance



- ▷ Impédance d'entrée ;
- ▷ Régime linéaire.

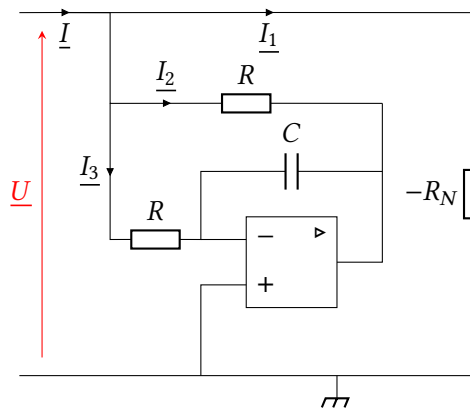


Figure 4 – Notations pour l'étude du simulateur d'inductance.

1 On utilise les notations de la figure 4. D'après la loi des nœuds,

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3$$

La résistance $-R_N$ est directement soumise à la tension \underline{U} , donc

$$\underline{I}_1 = -\frac{\underline{U}}{R_N}.$$

De plus, comme l'ALI est en régime linéaire alors $V_- = V_+ = 0$ et on en déduit

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}}{R}$$

car la résistance se trouve directement soumise à la tension \underline{U} elle aussi. Enfin, pour exprimer \underline{I}_2 , on applique la loi des mailles aux deux branches « R » et « RC »,

$$R\underline{I}_2 = R\underline{I}_3 + \frac{\underline{I}_3}{jC\omega} \quad \text{d'où} \quad \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}}{R} \left(1 + \frac{1}{jRC\omega} \right).$$

On en déduit donc

$$\underline{I} = -\frac{\underline{U}}{R_N} + \frac{\underline{U}}{R} \left(1 + \frac{1}{jRC\omega} \right) + \frac{\underline{U}}{R}$$

d'où

$$\boxed{\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{2}{R} + \frac{1}{jR^2C\omega} - \frac{1}{R_N}.}$$

Contrairement à la majorité des exercices avec ALI, exprimer la tension de sortie n'a aucun intérêt ici, voire est contre-productif car cela introduit une inconnue supplémentaire dans les calculs.

- 2 Une inductance pure a une admittance complexe $\underline{Y}_L = 1/jL\omega$: l'admittance d'entrée du montage prend une telle forme pour $R_N = R/2$, et auquel cas

$$L_{\text{éq}} = R^2 C.$$

Régime de saturation

Exercice 11 : Régulation de température

inspiré écrit Centrale TSI 2018 |  2 |  2



► Comparateur à hystérésis.

- 1 Il s'agit d'un pont diviseur de tension,

$$v_1 = \frac{R_0}{R_0 + R(T)} V_0.$$

- 2 L'ALI ne possède qu'une unique rétroaction positive, il fonctionne donc nécessairement en régime de saturation. La loi des nœuds en potentiel appliqué à la borne \oplus de l'ALI s'écrit

$$\frac{v_s - v_+}{R_2} + \frac{E - v_+}{R_1} = 0 \quad \text{soit} \quad R_1 v_s + R_2 E - (R_1 + R_2)v_+ = 0$$

et ainsi

$$v_+ = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_s + \frac{R_2}{R_1 + R_2} E = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_s + \left(1 - \frac{R_1}{R_1 + R_2}\right) E$$

ce qui s'écrit bien

$$v_+ = k v_s + (1 - k) E.$$

- 3 Supposons l'ALI en saturation haute : on a alors $v_s = V_{\text{sat}}$. Il y reste tant que

$$v_- < v_+ \quad \text{soit} \quad v_e < k V_{\text{sat}} + (1 - k) E.$$

Supposons maintenant l'ALI en saturation basse, soit $v_s = -V_{\text{sat}}$. Il y reste tant que

$$v_- > v_+ \quad \text{soit} \quad v_e > -k V_{\text{sat}} + (1 - k) E.$$

- 4 En plaçant les tensions de basculement de manière symétrique par rapport à $(1 - k)E$, on en déduit la caractéristique du montage de la figure 5. Il s'agit d'un comparateur à hystérésis inverseur décalé.

- 5 On souhaite que le comparateur bascule en saturation haute lorsque $T = T_c - \Delta T$. Traduit en termes de tension, cela donne

$$v_1(T = T_c - \Delta T) = -k V_{\text{sat}} + (1 - k) E(T_c)$$

soit

$$\begin{aligned} \alpha + \beta(T_c - \Delta T) &= -k V_{\text{sat}} + (1 - k)(a + b T_c) \\ \beta T_c + \alpha - \beta \Delta T &= (1 - k)b T_c + (1 - k)a - k V_{\text{sat}} \end{aligned} \quad (1)$$

À l'inverse, la condition d'arrêt du dispositif s'écrit

$$\begin{aligned} \alpha + \beta(T_c + \Delta T) &= +k V_{\text{sat}} + (1 - k)(a + b T_c) \\ \beta T_c + \alpha + \beta \Delta T &= (1 - k)b T_c + (1 - k)a + k V_{\text{sat}} \end{aligned} \quad (2)$$

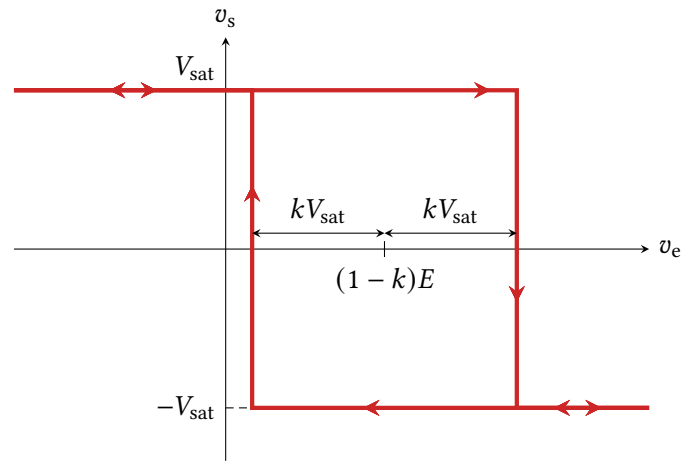


Figure 5 – Caractéristique entrée-sortie du montage comparateur à hystérésis décalé.

En prenant la différence (2)–(1), on obtient

$$2\beta \Delta T = 2kV_{\text{sat}} \quad \text{soit} \quad \boxed{k = \frac{\beta \Delta T}{V_{\text{sat}}}}$$

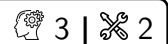
6 On peut alors simplifier les conditions de basculement sous la même forme,

$$\beta T_c + \alpha = (1 - k)b T_c + (1 - k)a \quad \text{soit} \quad \boxed{[(1 - k)b - \beta] T_c + [(1 - k)a - \alpha] = 0,}$$

et comme cette relation doit être vérifiée quelle que soit la température de consigne T_c , on en déduit que les deux coefficients sont nuls, soit

$$\boxed{a = \frac{\alpha}{1 - k} \quad \text{et} \quad b = \frac{\beta}{1 - k}}$$

Exercice 12 : Trigger de Schmidt



- ▶ Montage à deux ALI ;
- ▶ Oscillateur auto-entretenu ;
- ▶ Régime linéaire et de saturation.

1 Le bloc ① est un **comparateur à hystérésis** non-inverseur. Nous avons montré en cours que l'ALI fonctionne en régime de saturation (une seule rétroaction positive), et établi les conditions de basculement suivantes :

- ▶ si l'ALI est en saturation basse, il y reste tant que $u_1 < \beta V_{\text{sat}}$;
- ▶ si l'ALI est en saturation haute, il y reste tant que $u_1 > -\beta V_{\text{sat}}$.

2 Le bloc ② est un **intégrateur pur**. Nous avons montré en cours que la relation entrée-sortie dans le domaine temporel s'écrit

$$u_1(t) = u_1(0) - \frac{1}{\tau} \int_0^t u_2(t) dt .$$

3 L'ALI ① fonctionne en régime de saturation, sa tension de sortie u_2 ne peut donc prendre que les valeurs $\pm V_{\text{sat}}$: il s'agit nécessairement de la courbe en traits pleins, et $V_2 = V_{\text{sat}}$. La courbe en traits pointillés correspond donc à la tension u_1 , sur laquelle on identifie $\pm V_1$ comme les tensions de basculement $\pm \beta V_{\text{sat}}$ de l'ALI ①.

4 La tension aux bornes du condensateur C vaut $u_1 - v_{2-} = u_1$, qui est donc toujours continue. Puisque l'ALI ① bascule en saturation haute pour $u_1(0^-) = \beta V_{\text{sat}}$, on a également $u_1(0^+) = \beta V_{\text{sat}}$.

Il est important de noter que c'est la valeur à $t = 0^-$ qui entraîne le basculement de l'ALI, et que certaines tensions peuvent être discontinues donc prendre une valeur différente à $t = 0^+$, à commencer par la tension de sortie du comparateur à hystérésis. Un argument supplémentaire est donc nécessaire pour justifier la continuité.

Déterminons l'instant t_1 tel que l'ALI bascule de nouveau, c'est-à-dire tel que $u_1(t_1) = -\beta V_{\text{sat}}$. D'après la relation entrée-sortie écrite au cours de cette phase,

$$u_1(t_1) = u_1(0^+) - \frac{1}{\tau} \int_0^{t_1} V_{\text{sat}} dt \quad \text{soit} \quad -\beta V_{\text{sat}} = \beta V_{\text{sat}} - \frac{t_1}{\tau} V_{\text{sat}}$$

d'où on déduit

$$t_1 = 2\beta\tau.$$

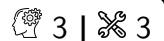
5 Procédons de même entre $t = t_1$ et $t = T$,

$$u_1(T) = u_1(t_1) - \frac{1}{\tau} \int_{t_1}^T V_{\text{sat}} dt \quad \text{soit} \quad \beta V_{\text{sat}} = -\beta V_{\text{sat}} - \frac{(T - t_1)}{\tau} V_{\text{sat}} \quad \text{donc} \quad T = t_1 + 2\beta\tau$$

d'où on déduit

$$T = 4\beta\tau.$$

Exercice 13 : Astable compact



- ▷ Régime de saturation ;
- ▷ Oscillateur auto-entretenu.

1 Supposons le fonctionnement linéaire, ce qui permet d'utiliser le formalisme complexe. Avec deux ponts diviseurs,

$$v_+ = \frac{R_1}{R_1 + R_2} u_2 \quad \text{et} \quad v_- = \frac{1/jC\omega}{1/jC\omega + R} u_2 = \frac{1}{1 + jRC\omega} u_2$$

Or si le fonctionnement était linéaire on aurait $v_- = v_+$, ce qui est impossible avec les expressions ci-dessus puisque $\text{Im}(v_-) \neq 0$ alors que $\text{Im}(v_+) = 0$. L'hypothèse est donc fautive : l'ALI fonctionne en régime de saturation ... et le formalisme complexe n'est pas utilisable.

2 En toute généralité,

$$\varepsilon = v_+ - v_- = \frac{R_1}{R_1 + R_2} u_2 - u_1$$

- ▷ Si l'ALI est en saturation haute, il y reste tant que $\varepsilon > 0$, soit $u_1 < \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{\text{sat}} = \alpha V_{\text{sat}}$.
- ▷ Si l'ALI est en saturation basse, il y reste tant que $\varepsilon < 0$, soit $u_1 > -\frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{\text{sat}} = -\alpha V_{\text{sat}}$.

Cette relation est représentée figure 6.

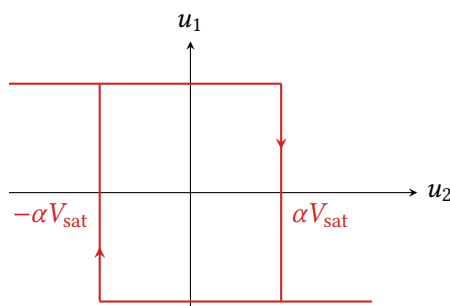


Figure 6 – Relation d'hystérésis entre u_1 et u_2 .

3 Le même courant i_1 traverse la résistance R et le condensateur C . La loi des mailles s'écrit donc

$$u_2 = u_1 + Ri_1 \quad \text{soit} \quad -V_{\text{sat}} = u_1 + RC \frac{du_1}{dt}$$

qui se résout en

$$u_1(t) = A e^{-t/\tau} - V_{\text{sat}}.$$

La tension aux bornes d'un condensateur est toujours continue, donc $u_1(0^+) = u_1(0^-) = \alpha V_{\text{sat}}$, donc

$$u_1(0^+) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{expr}}}{A} - V_{\text{sat}} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{basc}}}{\alpha V_{\text{sat}}} \quad \text{d'où} \quad \boxed{u_1(t) = (1 + \alpha)V_{\text{sat}} e^{-t/\tau} - V_{\text{sat}}}.$$

Il y a basculement à l'instant t_1 tel que

$$u_1(t_1) = -\alpha V_{\text{sat}} \quad \text{soit} \quad e^{-t_1/\tau} = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \quad \text{donc} \quad \boxed{t_1 = \tau \ln \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha}}.$$

4 L'équation différentielle est presque la même, si ce n'est que l'ALI est désormais en saturation haute :

$$+V_{\text{sat}} = u_1 + \tau \frac{du_1}{dt}$$

On pourrait procéder comme à la question précédente en résolvant l'équation à tout instant puis en déterminant l'instant auquel l'ALI bascule. Toutefois, comme seul cet instant nous importe, procédons différemment en séparant les variables :

$$\tau \frac{du_1}{dt} = V_{\text{sat}} - u_1 \quad \text{soit} \quad \frac{du_1}{V_{\text{sat}} - u_1} = \frac{dt}{\tau}.$$

On intègre alors entre $t' = 0$ (basculement en saturation haute) et $t' = t'_2$ (basculement en saturation basse), et avec la continuité de la tension aux bornes du condensateur il vient

$$-\int_{-\alpha V_{\text{sat}}}^{\alpha V_{\text{sat}}} \frac{du_1}{u_1 - V_{\text{sat}}} = \frac{1}{\tau} \int_0^{t'_2} dt \quad \text{soit} \quad -\ln \frac{\alpha V_{\text{sat}} - V_{\text{sat}}}{-\alpha V_{\text{sat}} - V_{\text{sat}}} = \frac{t'_2}{\tau}$$

qui se simplifie en

$$\boxed{t'_2 = \tau \ln \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha}}.$$

5 La période des oscillations est simplement $t_1 + t'_2$, soit

$$\boxed{T = 2\tau \ln \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha}}.$$

Les signaux sont représentés figure 7.

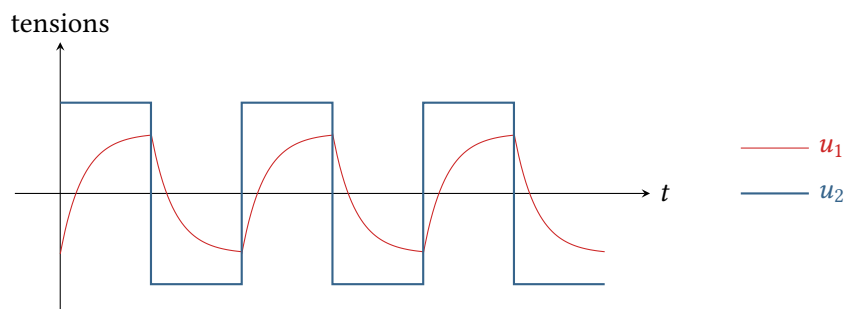


Figure 7 – Chronogramme des tensions u_1 et u_2 .