Énergie mécanique

Restriction générale pour ce chapitre : uniquement point matériel ou solide en translation.

$\rightsquigarrow$ pas de solide en rotation, pas de système déformable.

I - Puissance et travail d'une force

- **Puissance :** $\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v} = \dfrac{\delta W}{\mathrm{d}t}$ (s'exprime en Watt, $1\,\mathrm{W} = 1\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{s}^{-1}$)
- **Signe :** $\mathcal{P} > 0$ force motrice ; $\mathcal{P} < 0$ force résistante ; $\mathcal{P} = 0$ force qui ne travaille pas (peut dévier le système mais ne modifie pas la norme de sa vitesse).
- **Travail élémentaire :** $\delta W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}M} = \mathcal{P}\,\mathrm{d}t$ (s'exprime en Joule)
- **Travail le long d'une trajectoire :** dépend a priori de toute la trajectoire, et pas seulement de A et B

$$W_{\overset{\frown}{AB}} = \int_{\overset{\frown}{AB}} \vec{F}(M) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}M}\,.$$

II - Théorème de l'énergie cinétique

- **Définition :** pour un point matériel ou pour un solide en translation,

$$E_\mathrm{c} = \frac{1}{2} m v^2\,.$$

- **Formulation instantanée :** « théorème de la puissance cinétique »

$$\left.\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t}\right|_\mathcal{R} = \sum_i \mathcal{P}_{/\mathcal{R}}(\vec{F}_i)$$

Démonstration : multiplier scalairement le PFD par la vitesse.

- **Formulation intégrale :** le long d'une trajectoire $\overset{\frown}{AB}$,

$$\Delta E_\mathrm{c} = E_\mathrm{c}(B) - E_\mathrm{c}(A) = \sum_i W_{\overset{\frown}{AB}}(\vec{F}_i)\,.$$

III - Forces conservatives et énergies potentielles

- **Définition :** une force est conservative si
  - ▹ elle ne dépend que de la position du système (ni de la vitesse, ni du temps) ;
  - ▹ elle ne dépend pas des autres forces subies par le système ;
  - ▹ son travail sur une trajectoire $\overset{\frown}{AB}$ dépend uniquement des points A et B mais pas du détail de la trajectoire.
- **Énergie potentielle :** à toute force conservative est associée une énergie potentielle telle que

$$W_{\overset{\frown}{AB}}(\vec{F}) = -\Delta E_\mathrm{p} = -(E_\mathrm{p}(B) - E_\mathrm{p}(A)) \quad\Longleftrightarrow\quad \delta W(\vec{F}) = -\mathrm{d}E_\mathrm{p} \quad\Longleftrightarrow\quad \vec{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,E_\mathrm{p}\,.$$

L'énergie potentielle est une grandeur d'état : elle ne dépend pas de l'historique du système, juste de sa position instantanée.

- **Énergies potentielles usuelles :**
  - une énergie potentielle est définie à une constante additive près $\Longleftrightarrow$ choisie nulle en un point particulier, souvent là où la force est nulle ;
  - énergie potentielle de pesanteur : $E_{pp} = \pm mgz + \text{cte}$ (+ si z vers le haut, − si z vers le bas) ;
  - énergie potentielle élastique : $E_{pe} = \dfrac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$ (choisie nulle pour $\ell = \ell_0$) ;
  - énergie potentielle gravitationnelle : $E_{pg} = -\mathcal{G}\dfrac{m_0 m}{r}$ (choisie nulle pour $r \to \infty$).

- **Gradient :**
  - définition : variation infinitésimale de f définie par $\mathrm{d}f = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}M}$;
  - expression en coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$$

  où $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est la dérivée partielle de f par rapport à x, à y et z constants.

IV - Théorème de l'énergie mécanique

- **Définition :** $E_m = E_c + \sum_i E_{p,i}$

- **Formulation instantanée :** « théorème de la puissance mécanique »

$$\left.\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \sum \mathcal{P}(\vec{F}_{\text{non-cons.}})$$

- **Formulation intégrale :** le long d'une trajectoire $\overset{\frown}{AB}$

$$\Delta E_m = \sum W_{\overset{\frown}{AB}}(\vec{F}_{\text{non-cons.}})$$

- **Cas de conservation de l'énergie mécanique :** uniquement des forces conservatives ou qui ne travaillent pas.

Bilan : quelle méthode privilégier ?

- Une approche énergétique est à privilégier si ...
  - on cherche à relier la vitesse et la position sans référence au temps ;
  - on cherche des informations uniquement sur $||\vec{v}||$;
  - le mouvement est à un degré de liberté.

- Une approche par le PFD est à privilégier si ...
  - on cherche les composantes du vecteur $\vec{v}$;
  - on cherche une force inconnue ;
  - le mouvement est à plusieurs degrés de liberté.