

# Énergie mécanique

## Plan du cours

|            |                                                                        |           |
|------------|------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>I</b>   | <b>Puissance et travail d'une force</b>                                | <b>2</b>  |
| I.A        | Travail élémentaire et puissance . . . . .                             | 2         |
| I.B        | Travail d'une force le long d'une trajectoire . . . . .                | 3         |
| <b>II</b>  | <b>Théorème de l'énergie cinétique</b>                                 | <b>4</b>  |
| II.A       | Formulation instantanée : théorème de la puissance cinétique . . . . . | 4         |
| II.B       | Formulation intégrale le long d'une trajectoire. . . . .               | 5         |
| <b>III</b> | <b>Forces conservatives et énergies potentielles</b>                   | <b>6</b>  |
| III.A      | Définition . . . . .                                                   | 6         |
| III.B      | Énergies potentielles usuelles . . . . .                               | 7         |
| III.C      | De l'énergie potentielle à la force . . . . .                          | 11        |
| <b>IV</b>  | <b>Théorème de l'énergie mécanique</b>                                 | <b>13</b> |
| IV.A       | Formulation instantanée et formulation intégrale . . . . .             | 13        |
| IV.B       | Cas de conservation de l'énergie mécanique . . . . .                   | 14        |

**(R)** Résultat à connaître par cœur.

**(M)** Méthode à retenir, mais pas le résultat.

**(D)** Démonstration à savoir refaire.

**(Q)** Aspect qualitatif uniquement.

*Les paragraphes sans mention en marge sont là pour faciliter votre compréhension ou pour votre culture mais n'ont pas forcément besoin d'être appris en tant que tel.*

Nous avons jusqu'à présent raisonné uniquement en termes de forces pour établir les équations du mouvement ... avec à la clé un certain nombre d'inconvénients : forces de liaisons inconnues (tension d'un fil, réaction normale), projections peu pratiques, etc. Ce chapitre aborde une autre approche, en termes d'énergie, qui permet dans certains cas de contourner très efficacement ces difficultés.

Comme précédemment, on se restreint aux systèmes modélisables par un **point matériel**, c'est-à-dire concrètement aux systèmes dont la position du centre de masse suffit à décrire le mouvement. Cela exclut en particulier les solides en rotation, qui feront l'objet d'un chapitre dédié plus tard dans l'année, et les systèmes déformables.

## I - Puissance et travail d'une force

Une force subie par un système a (en général) pour effet de modifier sa vitesse : en termes d'énergie, cela se traduit par une variation de son énergie cinétique. Le travail et la puissance permettent de décrire la quantité d'énergie apportée au système par l'opérateur qui applique la force.

### I.A - Travail élémentaire et puissance

#### • Travail élémentaire

R



On appelle **travail élémentaire** fourni par une force  $\vec{F}$  au point matériel  $M$  au cours d'un déplacement élémentaire  $d\vec{M}$  la quantité infinitésimale d'énergie reçue par  $M$ , qui se calcule par

$$\delta W_{/R} = \vec{F} \cdot d\vec{M}.$$

Le travail est une énergie, qui s'exprime en joules :  $[\delta W] = J$ .

\*\*\* **Attention !** Respecter le symbole  $\delta$  ou  $d$  dans les notations est crucial. La notation  $\delta$  évoque une *quantité échangée* infinitésimale, alors que la notation  $d$  est celle d'une *variation* infinitésimale, pouvant se calculer comme la différence entre une valeur initiale et une valeur finale.

$\leadsto d\vec{M} = d\vec{OM} = \vec{OM}(t + dt) - \vec{OM}(t)$  mais il n'y pas d'équivalent pour le travail.

Le déplacement élémentaire dépend du référentiel d'étude, donc le travail élémentaire en dépend aussi.

#### • Puissance

Le déplacement élémentaire  $d\vec{M}$  est parcouru pendant la durée infinitésimale  $dt$ , donc :

$$d\vec{M} = \vec{v} dt \quad \text{et} \quad \delta W = \vec{F} \cdot \vec{v} dt.$$

R



On appelle **puissance** fournie par la force  $\vec{F}$  au point matériel la quantité

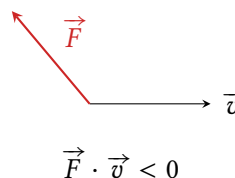
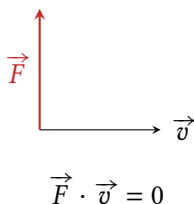
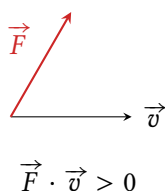
$$\mathcal{P}_{/R} = \frac{\delta W}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}_{M/R}.$$

La puissance s'exprime en watt,  $1 W = 1 J \cdot s^{-1}$ .

Qualitativement, la puissance décrit la vitesse à laquelle le système reçoit de l'énergie.

#### • Interprétation du signe

Le travail et la puissance sont définis par un produit scalaire : ils peuvent être positif ou négatif.



► si  $\mathcal{P} > 0 \Leftrightarrow \delta W > 0$ , la force augmente l'énergie cinétique de  $M$  : elle a un **effet moteur**.

$\leadsto$  l'accélération est globalement dans le même sens que la vitesse.

► si  $\mathcal{P} < 0 \Leftrightarrow \delta W < 0$ , la force diminue l'énergie cinétique de  $M$  : elle a un **effet résistant**.

$\leadsto$  l'accélération est globalement de sens opposé à la vitesse.

► si  $\mathcal{P} = 0 \Leftrightarrow \delta W = 0$ , la force ne modifie pas l'énergie cinétique de  $M$  : on dit qu'elle **ne travaille pas**.

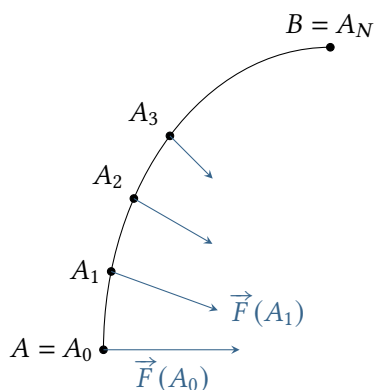
$\leadsto$  l'accélération est perpendiculaire à la vitesse, c'est-à-dire que  $\|\vec{v}\|$  ne change pas mais que sa direction change (cf. mouvement circulaire uniforme).

Q

## I.B - Travail d'une force le long d'une trajectoire

Notons  $\widehat{AB}$  la trajectoire suivie par le point  $M$ , et exprimons le travail total fourni par  $\vec{F}$  au point  $M$ .

→ idée : découpage de la trajectoire en  $N \rightarrow \infty$  portions élémentaires, puis somme des travaux élémentaires reçus sur chacune des portions infinitésimales.



$$\begin{aligned} W_{A \rightarrow B} &= \delta W_{A_0 \rightarrow A_1} + \delta W_{A_1 \rightarrow A_2} + \dots + \delta W_{A_{N-1} \rightarrow A_N} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \vec{F}(A_n) \cdot \overrightarrow{dM_{n \rightarrow n+1}} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \vec{F}(A_n) \cdot \overrightarrow{A_n A_{n+1}} \end{aligned}$$

Dans la limite  $N \rightarrow \infty$  où les subdivisions deviennent infiniment petites, la somme tend vers l'intégrale (méthode des rectangles).

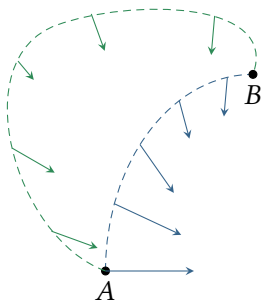
Espace 1

Le travail d'une force  $\vec{F}$  le long d'une trajectoire donnée allant de  $A$  à  $B$  est défini par

$$W_{\widehat{AB}} = \int_{\widehat{AB}} \vec{F}(M) \cdot \overrightarrow{dM}$$

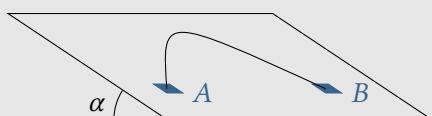
Il dépend a priori du détail de la trajectoire, et pas seulement des points  $A$  et  $B$ .

(R)



\*\*\* **Attention !** Il n'y a aucune raison que le travail de la force soit identique sur les deux trajectoires, puisqu'il n'y a aucune raison que la force soit identique en tout point.

### Application 1 : Calculs de travaux



Considérons un solide glissant le long d'un plan incliné. Il est soumis à son poids, à la réaction normale du support, et à une force de frottement solide de norme constante. Calculer le travail de ces trois forces au cours de son mouvement.

(M)

## II - Théorème de l'énergie cinétique

(R)

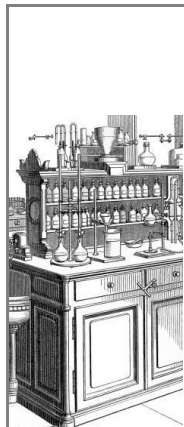


Un point matériel ou un solide en translation dans un référentiel  $\mathcal{R}$  possède une **énergie cinétique**

$$E_{c,M/\mathcal{R}} = \frac{1}{2} m v_{M/\mathcal{R}}^2$$

L'énergie cinétique dépend du référentiel.

⚠ **Attention !** Pas de généralisation aussi simple dans le cas général d'un solide en rotation ni en mouvement quelconque.



*Un peu d'histoire : La notion d'énergie cinétique a émergé au XVII<sup>e</sup> et XVIII<sup>e</sup> siècles, et a été au cœur d'une controverse scientifique sur la mesure de l'intensité du mouvement. Ce débat qui a duré près d'un siècle constitue une étape clé dans la formation de la physique moderne. D'un côté, Descartes puis Newton considéraient que la quantité de mouvement  $\vec{p} = m\vec{v}$  était la véritable intensité du mouvement, alors que Leibniz estimait que la grandeur réellement pertinente était la vis viva  $mv^2$ , que l'on pourrait traduire par « force vive ». Leibniz s'appuyait sur des observations expérimentales, notamment les travaux de Huygens et Mariotte, qui montraient que les effets produits par un corps en mouvement (comme la profondeur d'un impact) dépendent du carré de la vitesse. Les partisans de Descartes et Newton refusaient cette interprétation, car ils voyaient la mécanique uniquement sous l'angle de l'étude géométrique des trajectoires plutôt que de la capacité à produire un effet. Ce débat a duré plusieurs décennies. Ce n'est qu'au XIX<sup>e</sup> siècle, avec les travaux de d'Alembert, Lagrange (qui donna le premier la définition actuelle de l'énergie cinétique) et surtout le développement de la thermodynamique et du postulat de conservation de l'énergie, que l'on comprit que les deux grandeurs quantité de mouvement et énergie cinétique étaient légitimes mais distinctes. La controverse de la vis viva a ainsi préparé la voie au concept moderne d'énergie.*

### II.A - Formulation instantanée : théorème de la puissance cinétique

**Idée de la démonstration :** on cherche à relier les variations d'énergie cinétique, c'est-à-dire les variations de vitesse, aux puissances, c'est-à-dire aux forces.

↪ on connaît déjà un lien entre variations de vitesse et forces : le PFD, qui va servir de point de départ.

D'après le PFD,

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i$$

On veut faire apparaître la puissance des forces, on multiplie donc scalairement par  $\vec{v}$ ,

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v} = \sum_i P(\vec{F}_i)$$

Il reste maintenant à interpréter le terme de gauche,

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} m \frac{d}{dt} (\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) = \frac{dE_c}{dt}.$$

Ainsi,

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum_i P(\vec{F}_i)$$

Espace 2

**Théorème de la puissance cinétique :**

Pour un point matériel ou un solide indéformable *en translation* par rapport à un référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ ,

$$\left. \frac{dE_c}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \sum_i \mathcal{P}_{/\mathcal{R}}(\vec{F}_i)$$

⚠⚠⚠ **Attention !** Pas de généralisation au cas d'un solide en mouvement quelconque (en particulier de rotation), ni aux systèmes déformables.

**Application 2 : Glissement sur un plan incliné**

Un solide de masse  $m$  glisse sans frottement le long d'un plan incliné d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale. Établir par le théorème de l'énergie cinétique l'équation différentielle vérifiée par la norme  $v$  de sa vitesse et la résoudre.

**II.B - Formulation intégrale le long d'une trajectoire**

**Démonstration :** Passage de la puissance au travail par séparation des variables :

$$dE_c = \sum_i \mathcal{P}_i dt = \sum_i \delta W_i$$

On intègre alors sur toute la trajectoire,

$$\int_{AB} dE_c = \sum_i \int_{AB} \delta W_i \quad \text{d'où} \quad E_c(B) - E_c(A) = \sum_i W_{AB}(\vec{F}_i).$$

Espace 3

**Théorème de l'énergie cinétique :**

Pour un point matériel ou un solide indéformable *en translation* le long d'une trajectoire  $\widehat{AB}$  dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ ,

$$\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = \sum_i W_{\widehat{AB}}(\vec{F}_i).$$

⚠⚠⚠ **Attention !** Pas de généralisation au cas d'un solide en mouvement quelconque (en particulier de rotation), ni aux systèmes déformables.

M

**Application 3 : Distance de freinage**

Une voiture d'une tonne roule à 36 km/h. À cette vitesse, elle s'arrête en 10 m. On modélise l'action des freins par une force  $\vec{f}$  constante.

- 1 - Calculer la norme  $f$  de la force de freinage.
- 2 - Calculer la distance d'arrêt à 72 km/h.

**III - Forces conservatives et énergies potentielles****III.A - Définition**

R

Une force est dite **conservative** si :

- ▷ elle ne dépend que de la position du système (ni de la vitesse, ni du temps);
- ▷ elle ne dépend pas des autres forces subies par le système;
- ▷ son travail sur une trajectoire  $\widehat{AB}$  dépend uniquement des points  $A$  et  $B$  mais pas du détail de la trajectoire.

Q

→ l'indépendance vis-à-vis du temps, de la vitesse et des autres forces signifie que si le système repasse par la même position à un instant ultérieur alors il ressentira exactement la même force.

La définition sous-entend qu'une force conservative peut dans le principe être ressentie en n'importe quel point de l'espace : on parle alors de **champ de force conservatif**, par analogie avec un champ électrique ou magnétique défini dans tout l'espace.

Q

**Exemples :**

- ▷ poids : conservatif

Espace 4

- ▷ force de traînée : non-conservative car dépend de la vitesse

Espace 5

- ▷ force de réaction d'un support : non-conservative car dépend des autres forces

Espace 6

- ▷ force de frottement solide : non-conservative car le travail dépend de la trajectoire

Espace 7

- ▷ force de rappel d'un ressort : conservative (reste à prouver la propriété sur le travail)

Espace 8

- ▷ force de tension d'un fil : non-conservative car dépend des autres forces

Espace 9

- ▷ force de poussée exercée par un moteur de fusée : non-conservative car dépend du temps via la quantité de carburant

Espace 10

La propriété de travail indépendant de la trajectoire permet d'en déduire une caractérisation plus calculatoire d'une force conservative :

À toute force conservative  $\vec{F}$  peut être associée une fonction scalaire appelée **énergie potentielle**  $E_p$ , ne dépendant que de la position, telle que

$$W_{AB}(\vec{F}) = -\Delta E_p = -(E_p(B) - E_p(A)).$$

ou pour un déplacement élémentaire

$$\delta W(\vec{F}) = -dE_p.$$

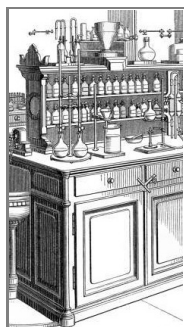
On dit alors que  $\vec{F}$  **dérive de l'énergie potentielle**  $E_p$ .

L'énergie potentielle est qualifiée de **grandeur d'état** : il suffit de connaître la position actuelle du système pour connaître son énergie potentielle, indépendamment de la façon dont il a été amené dans cette position.

Ainsi, le point important de cette caractérisation est que le travail d'une force conservative, normalement une *grandeur d'échange* dépendant de l'ensemble de la trajectoire, s'exprime en fait comme la *variation d'une grandeur d'état* entre la position initiale et la position finale.

**Remarque 1 :** On retrouve la différence de notation entre  $\delta$  pour une quantité échangée infinitésimale et  $d$  pour une variation infinitésimale d'une grandeur d'état. Respecter ces notations est essentiel pour indiquer le statut des différentes grandeurs : écrire  $dW$  ou  $\delta E_p$  est une erreur grave.

**Remarque 2 :** Cette différence fondamentale entre grandeur d'échange et grandeur d'état sera largement retravaillée dans le contexte de la thermodynamique dans les mois à venir.



**Un peu d'histoire :** La notion d'énergie potentielle s'est constituée progressivement entre la fin du XVIII<sup>e</sup> et le milieu du XIX<sup>e</sup> siècle. Joseph-Louis Lagrange, en 1788, introduit dans son ouvrage Mécanique analytique l'idée d'une « fonction des forces » dépendant uniquement de la position, anticipant la relation entre configuration et énergie. Au début du XIX<sup>e</sup> siècle, Siméon Denis Poisson et George Green précisent cette idée en définissant le potentiel comme une fonction dont le gradient représente la force exercée dans les champs gravitationnels ou électriques. C'est vers 1850 que William Thomson (Lord Kelvin) et William Rankine introduisent le terme d'énergie potentielle pour désigner l'énergie qu'un système emmagasine selon sa configuration spatiale.

### III.B - Énergies potentielles usuelles

Une énergie potentielle n'est définie que par ses variations :

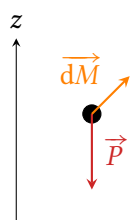
Une énergie potentielle est toujours définie à une constante additive près.

Cette constante est fixée en imposant  $E_p = 0$  en un point « librement » choisi : lieu où la force est nulle s'il existe, ou point particulier de la trajectoire.

Comme l'énergie potentielle dépend de la position, il est plus simple de définir un repère pour établir son expression.

#### • Énergie potentielle de pesanteur

Le poids ne dépend que de la position du système, mais pas de la vitesse ni du temps ni des autres forces subies par le système. Montrons qu'il dérive d'une énergie potentielle, en raisonnant en coordonnées cartésiennes.



▷ Expression du poids :  $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$

▷ Travail élémentaire :

$$\delta W(\vec{P}) = \vec{P} \cdot d\vec{M} = -mg\vec{e}_z \cdot d\vec{M}, \text{ et comme } d\vec{M} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z \text{ alors } \delta W(\vec{P}) = -mg dz$$

► **Énergie potentielle de pesanteur** : montrons qu'il existe une fonction  $E_{pp}$  telle que  $\delta W(\vec{P}) = -dE_{pp}$

$$\delta W(\vec{P}) = -dE_{pp} \quad \text{soit} \quad -dE_{pp} = -mgdz \quad \text{soit} \quad \int_0^{E_{pp}(z)} dE_{pp} = mg \int_{z_{\text{réf}}}^z dz$$

ce qui conduit à  $E_{pp}(z) = mg(z - z_{\text{réf}})$ .

Espace 12

R

**L'énergie potentielle de pesanteur** mesurée le long d'un axe **vertical vers le haut** s'écrit

$$E_{pp} = mgz + \text{cte}.$$

Elle est d'autant plus grande que l'altitude  $z$  est élevée.

Si l'axe est orienté vers le bas,

$$E_{pp} = -mgz + \text{cte}$$

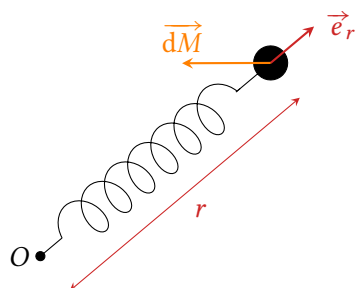
Elle est d'autant plus grande que l'altitude  $-z$  est élevée.

Le choix de la constante est « libre », au sens où il relève d'une convention. Pour des questions de facilité des calculs, on choisit souvent l'énergie potentielle nulle en un point géométriquement particulier de la trajectoire (position initiale, point le plus bas, sommet, etc.), ce qui permet de déterminer la constante.

### • Énergie potentielle élastique

La force de rappel d'un ressort ne dépend que de la longueur du ressort, directement liée à la position du système, mais pas de la vitesse ni du temps ni des autres forces. Montrons qu'elle dérive d'une énergie potentielle.

D



Pour être le plus général possible, supposons que le système attaché au ressort peut se déplacer dans les trois directions de l'espace : on raisonne donc en coordonnées sphériques, d'origine fixée au point d'attache du ressort.

► **Expression de la force de rappel :**

$$\vec{F}_r = -k(\ell - \ell_0)\vec{u}_{\text{ext}} = -k(r - \ell_0)\vec{e}_r.$$

Espace 13

► **Travail élémentaire :**

$$\delta W = \vec{F}_r \cdot d\vec{M} = -k(r - \ell_0)\vec{e}_r \cdot (dr\vec{e}_r + r d\theta\vec{e}_\theta + r \sin\theta d\varphi\vec{e}_\varphi) = -k(r - \ell_0)dr$$

Espace 14

► **Énergie potentielle élastique** : montrons qu'il existe une fonction  $E_{pe}$  telle que  $\delta W(\vec{F}_r) = -dE_{pe}$ .

$$\delta W(\vec{F}_r) = -dE_{pe} \quad \text{soit} \quad dE_{pe} = k(r - \ell_0)dr$$

La force de rappel du ressort est nulle si  $r = \ell_0$ , on prend donc cette position comme référence des énergies potentielles.

$$\int_0^{E_{pe}(r)} dE_{pe} = k \int_{\ell_0}^r (r - \ell_0)dr \quad \text{soit} \quad E_{pe}(r) = k \left[ \frac{r^2}{2} - \ell_0 r \right]_{\ell_0}^r = \frac{1}{2}k(r^2 - 2\ell_0 r + \ell_0^2) = \frac{1}{2}k(r - \ell_0)^2$$

Espace 15

Puisque la coordonnée  $r$  s'identifie à la longueur  $\ell$  du ressort, il est possible de donner une expression intrinsèque de cette énergie potentielle, c'est-à-dire indépendante de tout système de coordonnées.

**L'énergie potentielle élastique** dont dérive la force de rappel d'un ressort s'écrit

$$E_{pe} = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$$

Elle est nulle par convention lorsque la longueur du ressort est égale à sa longueur à vide, et d'autant plus grande que le ressort est déformé (comprimé ou étiré).

**Remarque** : Le choix de convention sur la position où  $E_{pe}$  est nulle peut éventuellement être différent, mais cela est très exceptionnel.

#### Application 4 : Démonstration simplifiée de l'énergie potentielle élastique

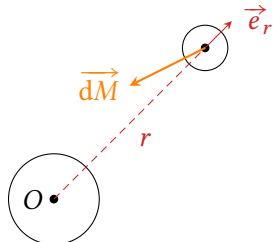
Démontrons l'expression de l'énergie potentielle élastique dans un cas particulier rendant les calculs un peu plus simples : on suppose que la masse attachée au ressort est astreinte à se déplacer à une dimension le long d'un axe ( $Ox$ ). Retrouver l'expression de  $E_{pe}$ .

Pour alléger encore davantage le calcul, il n'est « pas interdit » d'exhiber directement la primitive s'annulant à l'endroit souhaité !

## • Énergie potentielle gravitationnelle

La force de gravitation entre deux astres ne dépend que de leur position, mais pas de leurs vitesses, ni du temps, ni d'hypothétiques autres forces. Montrons qu'elle dérive d'une énergie potentielle, en raisonnant de nouveau en coordonnées sphériques.

D



► Expression de la force de gravitation :

$$\vec{F}_g = -\mathcal{G} \frac{m_0 m}{r^2} \vec{e}_r$$

Espace 16

► Travail élémentaire :

$$\delta W = \vec{F}_g \cdot \overrightarrow{dM} = -\mathcal{G} \frac{m_0 m}{r^2} \vec{e}_r \cdot (dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{e}_\varphi) = -\mathcal{G} \frac{m_0 m}{r^2} dr.$$

Espace 17

► Énergie potentielle gravitationnelle : montrons qu'il existe une fonction  $E_{pg}$  telle que  $\delta W(\vec{F}_g) = -dE_{pg}$ .

$$\delta W = -dE_{pg} \quad \text{soit} \quad dE_{pg} = -\mathcal{G} \frac{m_0 m}{r^2} dr$$

La force de gravitation est nulle pour  $r \rightarrow \infty$ , on prend donc cette position comme référence des énergies potentielles,

$$\int_0^{E_{pg}(r)} dE_{pg} = \mathcal{G} m_0 m \int_\infty^r \frac{dr}{r^2} = -\mathcal{G} \frac{m_0 m}{r}.$$

Espace 18

R



L'énergie potentielle gravitationnelle dont dérive la force de gravitation s'écrit

$$E_{pg} = -\mathcal{G} \frac{m_0 m}{r}.$$

Elle est nulle par convention pour  $r \rightarrow \infty$ , et d'autant plus grande que les astres sont proches.

### III.C - De l'énergie potentielle à la force

Le paragraphe précédent a montré comment établir l'expression de l'énergie potentielle connaissant celle de la force. On s'intéresse ici au cheminement inverse, c'est-à-dire établir l'expression de la force connaissant celle de l'énergie potentielle dont elle dérive.

#### • Retour sur les exemples précédents

| Expression de la force                            | Différentielle de l'énergie potentielle | Lien entre les deux                                            |
|---------------------------------------------------|-----------------------------------------|----------------------------------------------------------------|
| $\vec{P} = mg\vec{e}_z$                           | $dE_{pp} = mgdz$                        | $\vec{P} = -\frac{dE_{pp}}{dz}\vec{e}_z$<br><i>Espace 28</i>   |
| $\vec{F}_r = -k(r - \ell_0)\vec{e}_r$             | $dE_{pe} = k(r - \ell_0)dr$             | $\vec{F}_r = -\frac{dE_{pe}}{dr}\vec{e}_r$<br><i>Espace 29</i> |
| $\vec{F}_g = -\mathcal{G}\frac{m_0m}{r}\vec{e}_r$ | $dE_{pe} = \mathcal{G}\frac{m_0m}{r}dr$ | $\vec{F}_g = -\frac{dE_{pg}}{dr}\vec{e}_r$<br><i>Espace 30</i> |

#### • Opérateur gradient

On appelle **champ** une grandeur physique  $f$  définie en tout point de l'espace, c'est-à-dire une fonction du point  $M$  ou plus précisément de ses trois coordonnées  $x$ ,  $y$  et  $z$ . Selon la nature de la grandeur physique, un champ peut être **scalaire** ( $f(M) \in \mathbb{R}$ ) ou **vectoriel** ( $\vec{f}(M) \in \mathbb{R}^3$ ).

##### Exemples :

##### ► champs scalaires :

*température, pression dans l'atmosphère, etc.*

*Espace 31*

##### ► champs vectoriels :

*champ électrique, champ magnétique, champ des vitesses du vent, etc.*

*Espace 32*

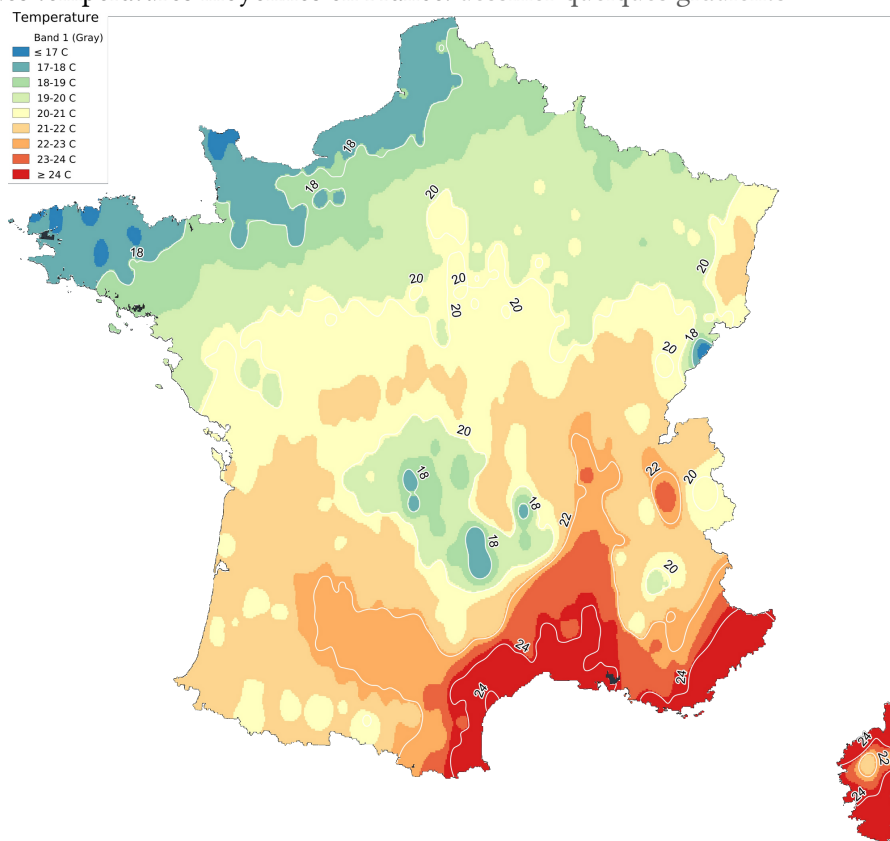
On appelle **gradient** d'un champ scalaire  $f$  le champ vectoriel  $\overrightarrow{\text{grad}} f$  tel que la variation infinitésimale de  $f$  entre deux points séparés de  $d\vec{M}$  s'écrive

$$df = \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot d\vec{M}.$$

Le gradient de  $f$  est perpendiculaire aux surfaces ou lignes  $f = \text{cte}$  et pointe dans la direction où  $f$  augmente le plus.



**Exemple :** carte des températures moyennes en France. dessiner quelques gradients



R

L'expression de l'opérateur gradient dépend du système de coordonnées choisi.

En coordonnées cartésiennes,

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z.$$

*L'expression de  $\overrightarrow{\text{grad}} f$  dans les autres systèmes de coordonnées doit être fournie si elle est utile.*

La notation  $\partial f / \partial x$  est celle d'une **dérivée partielle** : la fonction  $f(x, y, z)$  est dérivée *uniquement* par rapport à  $x$  en traitant les variables  $y$  et  $z$  comme des constantes.

**Exemple :** soit  $f(x, y, z) = 3x + yz^2$ .

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = z^2 \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2y.$$

Espace 33

### • Force et gradient d'énergie potentielle

Par définition d'une force conservative,

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{M} = -dE_p$$

En identifiant avec la définition du gradient,

Une force conservative s'exprime comme le gradient de l'énergie potentielle dont elle dérive,

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p$$

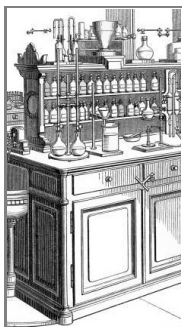
R

M

### Application 5 : Retrouvons le poids

Retrouver l'expression du poids à partir de l'énergie potentielle de pesanteur.

## IV - Théorème de l'énergie mécanique



*Un peu d'histoire : C'est au milieu du XIX<sup>e</sup> siècle que la notion d'énergie mécanique émerge grâce aux travaux de Hermann von Helmholtz, William Thomson (Lord Kelvin) et William Rankine. En 1847, Helmholtz publie son Mémoire sur la conservation de la force, où il démontre que la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle reste constante dans un système isolé. Parallèlement, Thomson et Rankine emploient le terme « énergie mécanique » pour désigner cette grandeur conservée, unifiant ainsi les travaux antérieurs de Lagrange, Poisson et Green sur les forces et les potentiels. Cette formalisation marque une étape décisive dans la formulation du principe général de conservation de l'énergie.*

L'énergie mécanique d'un point matériel est la somme de son énergie cinétique et de toutes les énergies potentielles auxquelles il est soumis ;

$$E_m = E_c + \sum_i E_{p,i} .$$

### IV.A - Formulation instantanée et formulation intégrale

**Démonstration :** le théorème de l'énergie mécanique se déduit directement de celui de l'énergie cinétique.

« Pour changer » par rapport à la démonstration du théorème de l'énergie cinétique, nous allons cette fois commencer par la formulation intégrale pour en déduire la formulation instantanée. Le raisonnement inverse est bien sûr tout à fait possible.

► Formulation intégrale :

$$\begin{aligned} \Delta E_c &= E_c(B) - E_c(A) = \sum_i W_{AB}(\vec{F}_i) \\ &= \sum_{\text{conservatives}} W_{AB}(\vec{F}_c) + \sum_{\text{non-conservatives}} W_{AB}(\vec{F}_{nc}) \\ &= - \sum \Delta E_p + \sum W_{AB}(\vec{F}_{nc}) \\ \boxed{\Delta E_m} &= \sum W_{AB}(\vec{F}_{nc}) \end{aligned}$$

Espace 34

► Formulation instantanée : raisonnons entre deux instants proches  $t$  et  $t + dt$ ,

$$dE_m = \sum \delta W_{nc} = \sum \mathcal{P}_{nc} dt \quad \text{d'où} \quad \frac{dE_m}{dt} = \sum \mathcal{P}_{nc}$$

Espace 35

**Théorème de l'énergie mécanique :**

Les variations d'énergie mécanique sont dus aux travaux (puissances) des forces non-conservatives.

Pour un point matériel ou un solide indéformable en translation par rapport à un référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ ,

$$\left. \frac{dE_m}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \sum \mathcal{P}(\vec{F}_{\text{non-cons.}}) \iff \Delta E_m = \sum W_{AB}(\vec{F}_{\text{non-cons.}}).$$

La version instantanée est parfois appelée « théorème de la puissance mécanique ».

⚠⚠⚠ **Attention !** Pas de généralisation au cas d'un solide en mouvement quelconque (en particulier de rotation), ni aux systèmes déformables.

**IV.B - Cas de conservation de l'énergie mécanique**

En conséquence du théorème précédent, l'énergie mécanique du système se conserve dès lors que la puissance des forces non conservatives est nulle.

L'énergie mécanique d'un système soumis uniquement à des forces conservatives ou des forces qui ne travaillent pas est une constante du mouvement.

On dit alors que l'énergie mécanique est une **intégrale première** du mouvement.

On peut ainsi comprendre le vocabulaire utilisé : une force « conservative » conserve l'énergie mécanique. On parle plus généralement de « mouvement conservatif ». Cependant, l'énergie mécanique se conserve globalement mais il peut y avoir conversion entre énergie cinétique et potentielle : l'énergie potentielle est celle qu'emmagasine le système de par sa position, et qui peut potentiellement se convertir en énergie cinétique.

**Application 6 : Vitesse atteinte par une balle**

Une balle de tennis est lâchée depuis le premier étage d'une maison ( $H = 4 \text{ m}$ ) sans vitesse initiale. Déterminer la vitesse à laquelle elle atteint le sol en négligeant tout frottement.

**Application 7 : Saut à la perche**

Un sprinter de niveau international court le 100 m en 10 s. Estimer la hauteur atteignable par un perchiste de niveau international. Le record du monde, détenu par Armand Duplantis, est (aujourd'hui) de 6,30 m : expliquer.

Scanner ou cliquer sur le QR-code ci-contre pour une analyse énergétique plus détaillée (et très accessible) du saut à la perche.

Lorsque l'on cherche à relier la vitesse et la position sans passer par la variable temps, une approche énergétique est toujours *la première* à envisager.

**Application 8 : Pendule simple**

Établir l'équation du mouvement d'un pendule simple par un théorème énergétique.

Un système est dit à **un degré de liberté** lorsqu'un seul paramètre géométrique suffit à décrire son mouvement.

Lorsque l'on cherche l'équation du mouvement d'un tel système, une approche énergétique est toujours intéressante à envisager.

## Correction des applications de cours

### Application 1 : Calculs de travaux

- **Travail d'une force constante : le poids**

$$W_{AB}(\vec{P}) = \int_{AB} m \vec{g} \cdot d\vec{M} = m \vec{g} \cdot \int_{AB} d\vec{M} \quad \text{d'où} \quad \boxed{W_{AB}(\vec{P}) = m \vec{g} \cdot \vec{AB}}$$

- **Travail d'une force constamment perpendiculaire à la trajectoire : la réaction normale**

$$W_{AB}(\vec{R}_N) \int_{AB} \vec{R}_N \cdot d\vec{M} = 0 \quad \text{car} \quad \vec{R}_N \perp d\vec{M}.$$

- **Travail d'une force de norme constante mais de direction variable : les frottements solides**

Les frottements solides sont de direction opposée à la vitesse, donc la force est nécessairement variable au cours du mouvement. En revanche, on peut montrer que dans cette situation  $\|\vec{R}_T\| = \text{cte}$ .

$$W_{AB}(\vec{R}_T) = \int_{AB} \vec{R}_T \cdot d\vec{M} = -R_T \int_{AB} d\ell$$

en notant  $d\ell$  la norme (infinitésimale) du déplacement élémentaire. En sommant, on fait donc apparaître la longueur  $\ell_{AB}$  de la trajectoire.

$$W_{AB}(\vec{R}_T) = -R_T \ell_{AB}$$

→ il est clair que le travail ne dépend pas seulement de A et B mais bien de toute la trajectoire !

### Application 7 : Saut à la perche

Un perchiste de niveau international est un excellent sprinteur. Conservation de l'énergie mécanique entre l'impulsion au niveau du sol et le sommet de la trajectoire où la vitesse est quasi-nulle :

$$H = \frac{v_0^2}{2g} = 5 \text{ m}$$

Comment fait Armand Duplantis pour sauter 6,30 m ? Il est un système déformable, ce qui lui permet d'une part d'apporter une puissance interne grâce à sa musculature, et d'autre part de faire passer tout son corps au dessus de la barre alors que son centre de masse passe en dessous.