

Particules chargées dans un champ électromagnétique

Plan du cours

I	Préambule : produit vectoriel	1
II	Force de Lorentz	3
II.A	Charges sources et charge test	4
II.B	Expression de la force de Lorentz	4
II.C	Énergie fournie par le champ électromagnétique à une charge test	6
III	Mouvement dans un champ électrostatique uniforme	8
III.A	Réalisation pratique d'un champ électrostatique uniforme	8
III.B	Vitesse atteinte par une charge accélérée par une tension	9
III.C	Étude d'une trajectoire quelconque	9
IV	Mouvement dans un champ magnétostatique uniforme	10
IV.A	Analyse qualitative	10
IV.B	Étude dans le repère de Frénet	11

(R) Résultat à connaître par cœur.

(M) Méthode à retenir, mais pas le résultat.

(D) Démonstration à savoir refaire.

(Q) Aspect qualitatif uniquement.

Les paragraphes sans mention en marge sont là pour faciliter votre compréhension ou pour votre culture mais n'ont pas forcément besoin d'être appris en tant que tel.

Ce chapitre concerne le mouvement des particules chargées dans un champ électromagnétique extérieur. Son champ d'application est extrêmement vaste : la couleur bleue du ciel, la radiographie médicale ou le fonctionnement des antennes d'un réseau de téléphonie repose sur de tels mouvements.

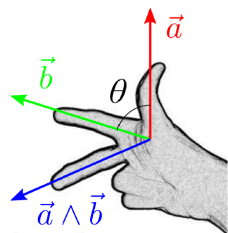
I - Préambule : produit vectoriel



Un peu d'histoire : Le produit vectoriel trouve ses origines au XIX^e siècle. En 1843, William Rowan Hamilton introduit les quaternions, dont certaines composantes anticipent cette opération. Vers 1878, William Kingdon Clifford formalise les algèbres géométriques, offrant un cadre plus large. En 1881, Josiah Willard Gibbs et Oliver Heaviside, travaillant indépendamment, définissent le produit vectoriel moderne dans l'espace tridimensionnel pour simplifier la physique. Leur notation se diffuse rapidement au début du XX^e siècle, notamment grâce aux applications en électromagnétisme et en mécanique. La notion s'impose ainsi comme un outil fondamental du calcul vectoriel et de l'analyse géométrique contemporaine.

• Définition géométrique

(R)



On appelle **produit vectoriel** de deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ le vecteur $\vec{a} \wedge \vec{b}$

- de direction orthogonale au plan $(\vec{a}, \vec{b})$;
- de sens direct, c'est-à-dire donné par la règle de la main droite;
- de norme $\|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin \theta$ avec θ l'angle non-orienté formé par les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

Propriétés fondamentales :

- le produit vectoriel de deux vecteurs colinéaires est nul :

(R)

Espace 1

- le produit vectoriel est anti-commutatif :

(R)

Espace 2

Application 1 : Représentation graphique de produits vectoriels

Représenter graphiquement le produit vectoriel $\vec{a} \wedge \vec{b}$ dans les situations de la figure 1. Dans les quatre situations, les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ appartiennent tous les deux au plan (Oxy) .

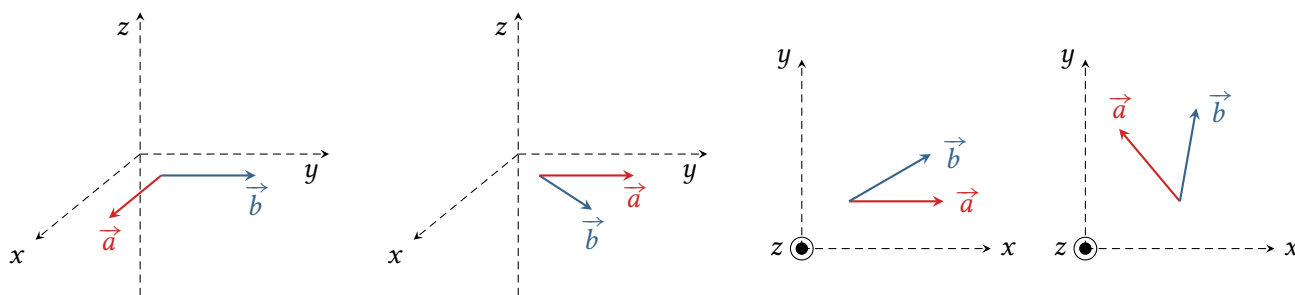


Figure 1 – Représentation de produits vectoriels. Les deux schémas de gauche représentent une vue 3d, les deux schémas de droite une vue plane.

• Produit vectoriel des vecteurs d'une base orthonormée directe

(R)



Soit $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ une base orthonormée directe. Pour $i \neq j$,

$$\vec{u}_i \wedge \vec{u}_j = \pm \vec{u}_k$$

avec un signe + si (i, j, k) est une permutation circulaire directe de $(1, 2, 3)$ et un signe – sinon.

$\leadsto (2, 3, 1)$ et $(3, 1, 2)$ sont des permutations circulaires directes, alors que $(3, 2, 1)$ ou $(2, 1, 3)$ n'en sont pas.

(M)

Application 2 : Produit vectoriel des vecteurs de base

Donner les produits vectoriels suivants :

(a) $\vec{e}_x \wedge \vec{e}_y$

(c) $\vec{e}_z \wedge \vec{e}_y$

(e) $\vec{e}_r \wedge \vec{e}_z$

(b) $\vec{e}_z \wedge \vec{e}_x$

(d) $\vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_r$

(f) $\vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_\theta$

• Coordonnées du produit vectoriel

Posons $\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z$ et $\vec{b} = b_x \vec{e}_x + b_y \vec{e}_y + b_z \vec{e}_z$. Alors, en développant le produit vectoriel

$$\begin{aligned}
 \vec{a} \wedge \vec{b} &= a_x b_x \underbrace{\vec{e}_x \wedge \vec{e}_x}_{=0} + a_x b_y \underbrace{\vec{e}_x \wedge \vec{e}_y}_{+\vec{e}_z} + a_x b_z \underbrace{\vec{e}_x \wedge \vec{e}_z}_{-\vec{e}_y} \\
 &\quad + a_y b_x \underbrace{\vec{e}_y \wedge \vec{e}_x}_{-\vec{e}_z} + a_y b_y \underbrace{\vec{e}_y \wedge \vec{e}_y}_{=0} + a_y b_z \underbrace{\vec{e}_y \wedge \vec{e}_z}_{+\vec{e}_x} \\
 &\quad + a_z b_x \underbrace{\vec{e}_z \wedge \vec{e}_x}_{+\vec{e}_y} + a_z b_y \underbrace{\vec{e}_z \wedge \vec{e}_y}_{-\vec{e}_x} + a_z b_z \underbrace{\vec{e}_z \wedge \vec{e}_z}_{=0} \\
 &= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{e}_x - (a_x b_z - a_z b_x) \vec{e}_y + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{e}_z
 \end{aligned}$$

ce que l'on peut résumer graphiquement de la façon suivante :

$$\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ -(a_x b_z - a_z b_x) \\ a_x b_y - a_y b_x \end{bmatrix}$$

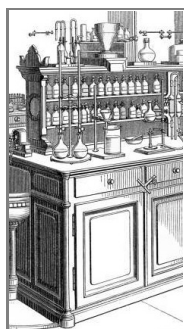
Application 3 : Calcul d'un produit vectoriel

Calculer le produit vectoriel

$$\begin{bmatrix} m \\ n \\ 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} n \\ 0 \\ p \end{bmatrix} =$$

(M)

II - Force de Lorentz



Un peu d'histoire : Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928), physicien néerlandais de premier plan, a profondément influencé la physique moderne. Professeur à Leyde dès 1878, il élabore la théorie de l'électron, qui postule que la matière contient de minuscules charges électriques – les futurs électrons – dont le mouvement et les interactions avec les champs électrique et magnétique sont la source des propriétés optiques, électriques et magnétiques de la matière. C'est dans ce cadre qu'il introduit la force qui porte aujourd'hui son nom. Il formule également les transformations de Lorentz, qui préparent le terrain à la relativité restreinte d'Einstein. Lauréat du prix Nobel 1902 avec Pieter Zeeman pour l'explication de l'effet Zeeman, il joue un rôle international majeur comme médiateur scientifique. Son héritage marque durablement la physique théorique et expérimentale.

II.A - Charges sources et charge test



Le **champ électromagnétique** décrit les effets de la présence de particules chargées, appelées **sources de champ** ou **charges sources**. Il est constitué de deux champs intrinsèquement liés :

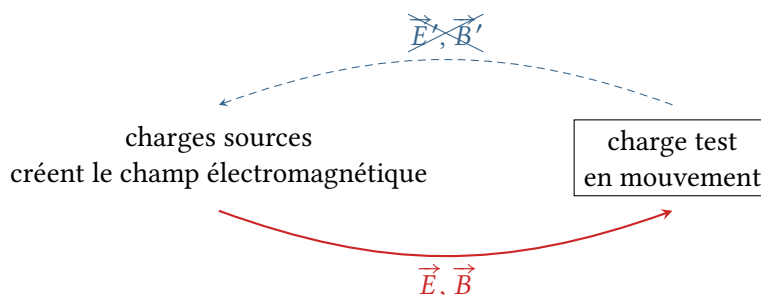
- le champ électrique $\vec{E}$, produit par les charges électriques, qui s'exprime en volt par mètre $V \cdot m^{-1}$;
- le champ magnétique $\vec{B}$, produit par les courants électriques, les charges en mouvement et la matière aimantée, qui s'exprime en Tesla T.

Ces deux champs ne sont en général pas indépendants : ils se génèrent l'un l'autre lorsqu'ils varient dans le temps, ce qui est par exemple à l'origine des ondes électromagnétiques. Ce couplage est décrit par les **équations de Maxwell**, qui sont à l'électromagnétisme ce que le PFD est à la mécanique.

On se restreindra cette année à des champs **statiques/stationnaires/permanents** (les trois termes sont synonymes), c'est-à-dire indépendants du temps, ce qui permet à $\vec{E}$ et $\vec{B}$ d'être indépendants l'un de l'autre. On se limitera également au cas de champs **uniformes**, c'est-à-dire indépendants de l'espace.



L'approche de ce chapitre consiste à étudier le mouvement d'une particule chargée dans une région où règne un champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$. Ce champ est nécessairement créé par d'autres charges sources, en grand nombre, que l'on ne cherchera pas à décrire. Pour distinguer les rôles, la particule étudiée est parfois qualifiée de **charge-test** ou **particule-test**. La particule test crée elle-même un champ électromagnétique, qui pourrait affecter les charges sources : on négligera cet effet en supposant le champ extérieur constant et indépendant de la particule-test.



II.B - Expression de la force de Lorentz



Une particule-test de charge q en mouvement dans un champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$ ressent la **force de Lorentz**

$$\vec{F}_L = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}.$$

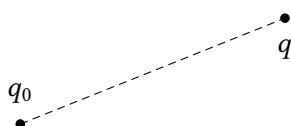
On parle parfois de composante électrique et composante magnétique de la force de Lorentz, ou encore de force de Lorentz électrique et force de Lorentz magnétique.

Remarque : Une vitesse dépend du référentiel choisi, au contraire d'une force : on en déduit qu'un champ électromagnétique dépend lui aussi du référentiel.

• Force de Lorentz et force de Coulomb

Rappel : on appelle **force de Coulomb** la force créée par une charge source q_0 immobile sur une charge test q se trouvant à distance r .

En coordonnées sphériques centrées sur la charge source,



Espace 3

avec $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} F \cdot m^{-1}$ la **permittivité diélectrique du vide**.

Lien à la force de Lorentz : les forces de Lorentz et de Coulomb sont deux points de vue différents sur l'interaction entre les deux charges q_0 et q . La charge source étant immobile, elle ne crée pas de champ magnétique. Ainsi,

$$\vec{F}_{q_0 \rightarrow q} = \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q}{r^2} \vec{e}_r}_{\text{Coulomb}} = \underbrace{q \vec{E} + q \vec{v} \wedge \vec{B}}_{\text{Lorentz}}$$

Généralisation :



Lorsque toutes les charges sources sont immobiles, la force de Lorentz est la résultante des forces de Coulomb exercées sur la charge test par chaque charge source.



→ considérer les deux dans un même bilan de forces revient à compter deux fois la même chose.

• Ordres de grandeur

Exemple : L'atmosphère contient de nombreuses particules chargées : par exemple des ions produits par l'ionisation de molécules d'air sous l'effet des rayonnements cosmiques ou du rayonnement UV en provenance du Soleil, ou encore les particules élémentaires constituant ces rayonnements cosmiques (à 90 % des protons) et leurs descendantes. À proximité de la surface de la Terre, le champ électrique est de l'ordre de $100 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ et le champ magnétique de $5 \cdot 10^{-5} \text{ T}$ (champs faibles comparativement à ceux utilisés dans les dispositifs dédiés).

► Cas d'un ion N_2^+ (masse $5 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$) évoluant à $100 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (vitesse d'agitation thermique) :

► Cas d'un proton du vent solaire évoluant à $1 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$:

Généralisation :



Le poids des particules microscopiques est négligeable devant la force de Lorentz. Les deux composantes de la force de Lorentz peuvent avoir des ordres de grandeur comparables.



II.C - Énergie fournie par le champ électromagnétique à une charge test

- Puissance de la force de Lorentz

D

Espace 4

R



La force de Lorentz magnétique ne travaille pas, seule la composante électrique travaille.

Un champ électrique peut modifier l'énergie cinétique d'une particule chargée et dévier sa trajectoire.

Un champ magnétique ne peut que dévier la trajectoire, sans modifier la norme de la vitesse.

↪ essentiel pour les applications : un champ électrique et un champ magnétique n'ont pas la même utilité.

- Énergie potentielle électrostatique

Considérons uniquement la composante électrique de la force de Lorentz, dans une situation sans champ magnétique où toutes les charges sources sont immobiles, et le champ électrique permanent.

Cas d'une charge source ponctuelle : montrons que la force de Coulomb est conservative.

D

Espace 5

La force de Coulomb dérive de l'énergie potentielle coulombienne

$$E_{\text{pC}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q}{r}$$

Cette énergie potentielle est choisie nulle pour $r \rightarrow \infty$ car la force y est nulle également.

Cas d'un ensemble de charges sources : La force de Lorentz électrique totale subie par la charge test est la somme des forces de Coulomb exercée par chaque charge source, et par additivité cette force est conservative et dérive d'une énergie potentielle électrique. Chaque énergie potentielle étant proportionnelle à la charge test q , on pose la définition suivante.

La force de Lorentz électrique dérive d'une énergie potentielle électrostatique définie par

$$E_{\text{pe}} = qV$$

où V est le **potentiel électrostatique**, qui s'exprime en Volt, qui s'identifie à celui de l'électronique.

En tant qu'énergie potentielle, le potentiel électrostatique est défini à une constante additive près.

Le champ électrostatique et le potentiel électrostatique sont reliés par

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V,$$

ce qui montre notamment que le champ électrique est orienté dans le sens des potentiels décroissants.

En effet :

Espace 6

Remarque 1 : Étant défini à une constante additive près, la valeur du potentiel électrostatique peut donc être librement choisie en un point : la masse.

Remarque 2 : Le lien entre champ électrostatique et potentiel est ici déduit d'une approche mécanique, mais il est en fait inclus dans les équations de Maxwell, qui sont les équations fondamentales de l'électromagnétisme. Ainsi, vous le retrouverez l'an prochain par une toute autre approche.

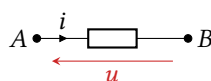
Remarque 3 : La relation entre $\vec{E}$ et V permet de retrouver l'unité usuelle du champ électrique. En effet,

$$\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial x} \vec{e}_x - \frac{\partial V}{\partial y} \vec{e}_y - \frac{\partial V}{\partial z} \vec{e}_z$$

d'où on déduit

$$[\vec{E}] = \left[\frac{\partial V}{\partial x} \right] = V \cdot m^{-1}.$$

► **Pour approfondir :** On peut déduire de l'expression de l'énergie potentielle électrostatique $E_{pe} = qV$ l'expression de la puissance électrique reçue par un dipôle. Considérons un dipôle AB quelconque, soumis à une tension $u_{AB} = V(A) - V(B)$ et parcouru par un courant i en convention récepteur.



Procédons à un bilan d'énergie pour le dipôle entre deux instants infiniment proches. On rappelle que dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS) il ne peut y avoir nulle part d'accumulation de charge. Ainsi, entre deux instants infiniment proches t et $t + dt$,

- une charge $\delta q = i dt$ entre dans le dipôle par la borne A , ce qui apporte au dipôle une énergie $\delta q V(A)$;
- la même charge $\delta q = i dt$ sort du dipôle par la borne B , ce qui prélève au dipôle une énergie $\delta q V(B)$.

Ainsi, le dipôle reçoit un travail électrique net

$$\delta W = \delta q V(A) - \delta q V(B) = i dt (V(A) - V(B))$$

ce qui permet d'identifier la puissance électrique reçue

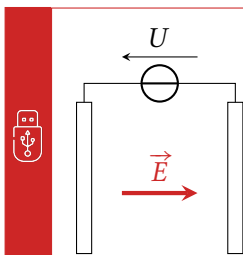
$$\mathcal{P} = \frac{\delta W}{dt} = u_{AB} i.$$

On démontre ainsi le résultat affirmé dans le cours d'électronique. Plutôt sympa, n'est-ce pas ?

III - Mouvement dans un champ électrostatique uniforme

III.A - Réalisation pratique d'un champ électrostatique uniforme

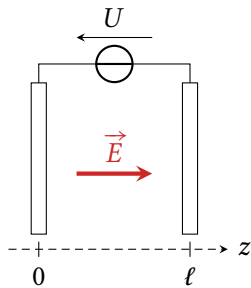
(R)



Deux électrodes planes parallèles distantes de ℓ soumises à une tension U créent un champ uniforme entre elles, de norme

$$E = \frac{|U|}{\ell}.$$

Démonstration : on *admet* que le champ est uniforme (il faut en garder pour l'an prochain), et on cherche à relier sa norme à la tension U supposée positive.



(D)

Espace 7

III.B - Vitesse atteinte par une charge accélérée par une tension

Application 4 : Vitesse d'une charge accélérée par une tension

Une particule de charge q est initialement immobile au voisinage d'une électrode.

- 1 - Au voisinage de quelle électrode faut-il la placer pour qu'elle traverse le dispositif?
- 2 - Déterminer la vitesse avec laquelle la seconde électrode est atteinte.

(M)

On définit l'électron-volt comme l'énergie cinétique acquise par un électron initialement immobile lorsqu'il a été accéléré sous une tension de 1 V.



$$1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

L'électron-volt est l'ordre de grandeur typique des énergies à l'échelle atomique.

(R)

Démonstration :

III.C - Étude d'une trajectoire quelconque

Application 5 : Particule chargée dans un champ électrostatique

On considère une particule de masse m , de charge q , plongée dans un champ électrostatique uniforme $\vec{E} = E\vec{e}_x$. La particule est initialement au point O et sa vitesse initiale $\vec{v}_0$ forme un angle α avec $\vec{e}_x$.

- 1 - Établir l'expression du vecteur position $\vec{OM}(t)$.
- 2 - En déduire l'équation de la trajectoire.
- 3 - La représenter pour $q \geq 0$.

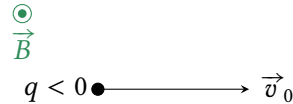
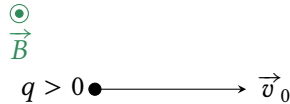
(M)

IV - Mouvement dans un champ magnétostatique uniforme

Un champ magnétostatique uniforme peut être obtenu par exemple à l'intérieur d'une bobine de grande longueur, nous y reviendrons plus tard cette année.

IV.A - Analyse qualitative

Considérons une particule de masse m , de charge q , plongée dans un champ magnétostatique uniforme $\vec{B} = B\vec{e}_z$. Elle est initialement au point O et sa vitesse initiale $\vec{v}_0$ est supposée orthogonale au champ magnétique.



Système : particule chargée ;

Référentiel : terrestre supposé galiléen ;

Bilan des forces : le poids étant négligeable, la particule ne subit que la force de Lorentz magnétique

$$\vec{F}_L = q\vec{v} \wedge \vec{B}.$$

Premières caractéristiques du mouvement : avant une étude exhaustive, établissons de premières propriétés.

► *Le mouvement est uniforme :*

D

Espace 8

► *Le mouvement est plan :*

Espace 9

► *Le sens de déviation dépend du signe de q :* le tracé de la force de Lorentz permet de déterminer comment la particule est déviée.

IV.B - Étude dans le repère de Frénet

La trajectoire étant plane, elle peut être étudiée en utilisant la **base de Frénet**, constituée des vecteurs $\vec{u}_t$ (tangent à la trajectoire, orienté dans le sens du mouvement) et $\vec{u}_n$ (normal à la trajectoire, orienté vers l'intérieur de la courbure).

💣💣💣 **Attention !** Le repère de Frénet dépend du sens de déviation de la particule.

Repérage :

Expression de la force de Lorentz : la particule ne subissant que la force de Lorentz, celle-ci est toujours dirigée vers l'intérieur de la courbure de la trajectoire, donc portée par $+\vec{u}_n$.

Espace 10

► **Pour approfondir :** Posons pour une fois pour toutes le calcul explicitement avec les signes, afin de se convaincre de la validité de l'expression donnée ci-dessus. La difficulté vient du fait que la base de Frénet change en fonction du signe de q ... ce qui demande d'être attentif en exprimant le produit vectoriel.

► si $q < 0$, alors la base $(\vec{u}_t, \vec{u}_n, \vec{e}_z)$ est directe et il n'y a pas particulièrement de complication :

$$qv \vec{u}_t \wedge B \vec{e}_z = qvB \underbrace{\vec{u}_t \wedge \vec{e}_z}_{\substack{\text{vecteurs de base} \\ \text{dans le mauvais ordre}}} = qvB (-\vec{u}_n) = +|q| vB \vec{u}_n$$

► en revanche si $q > 0$ alors la base directe s'écrit $(\vec{u}_t, \vec{u}_n, -\vec{e}_z)$, donc

$$qv \vec{u}_t \wedge B \vec{e}_z = -qvB \underbrace{\vec{u}_t \wedge (-\vec{e}_z)}_{\substack{\text{vecteurs de base} \\ \text{dans le mauvais ordre}}} = -qvB (-\vec{u}_n) = qvB \vec{u}_n = |q| vB \vec{u}_n.$$

On retrouve donc bien le résultat annoncé

PFD :

D

Espace 11

Périodicité : le cercle trajectoire étant parcouru à vitesse constante, le mouvement est périodique.

D

Espace 12

D Vitesse angulaire :

Espace 13

Généralisation :

R

Une particule de charge q dans un champ magnétostatique a un mouvement circulaire uniforme de rayon

$$R_c = \frac{mv_0}{|q|B}$$

parcouru à vitesse angulaire constante

$$\omega_c = \frac{|q|B}{m}.$$

Le mouvement est appelé **mouvement cyclotron**,
et ces caractéristiques sont appelées **rayon cyclotron** et **pulsation cyclotron**.

►► **Pour approfondir** : La nature circulaire du mouvement permet d'utiliser les coordonnées polaires d'origine le centre de la trajectoire. Néanmoins, cette approche est un peu moins générale car elle demande de *supposer* le mouvement circulaire et ne permet pas de le *démontrer*, contrairement à la base de Frénet.

► *Repérage* :

$$\vec{OM} = R_c \vec{e}_r \quad \vec{v} = R_c \dot{\theta} \vec{e}_\theta \quad \vec{a} = -R_c \dot{\theta}^2 \vec{e}_r = -\frac{v_0^2}{R_c} \vec{e}_r.$$

En effet, le mouvement est circulaire, donc $r = R_c = \text{cte}$, et uniforme donc $\dot{\theta} = \text{cte}$ et $v = v_0 = \text{cte}$.

► *Bilan des forces* :

$$\vec{F}_L = qR_c \dot{\theta} \vec{e}_\theta \wedge B \vec{e}_z = qR_c B \dot{\theta} \vec{e}_r = -|q| v_0 B \vec{e}_r$$

en utilisant comme précédemment une valeur absolue pour ne pas avoir à distinguer selon le signe de q et le fait que la force de Lorentz est forcément dirigée selon $-\vec{e}_r$ car c'est la seule à pouvoir dévier la particule. On peut en déduire le signe de $\dot{\theta}$, et donc le sens de parcours de la trajectoire.

► *Application du PFD* :

$$-m \frac{v_0^2}{R_c} \vec{e}_r = -|q| v_0 B \vec{e}_r \quad \text{d'où} \quad \boxed{R_c = \frac{mv_0}{|q|B}}.$$

On retrouve le même résultat qu'avec la base de Frénet, ce qui n'est pas une surprise : le rayon de la trajectoire (grandeur physique) ne doit pas dépendre pas de la base utilisée (outil mathématique). ■