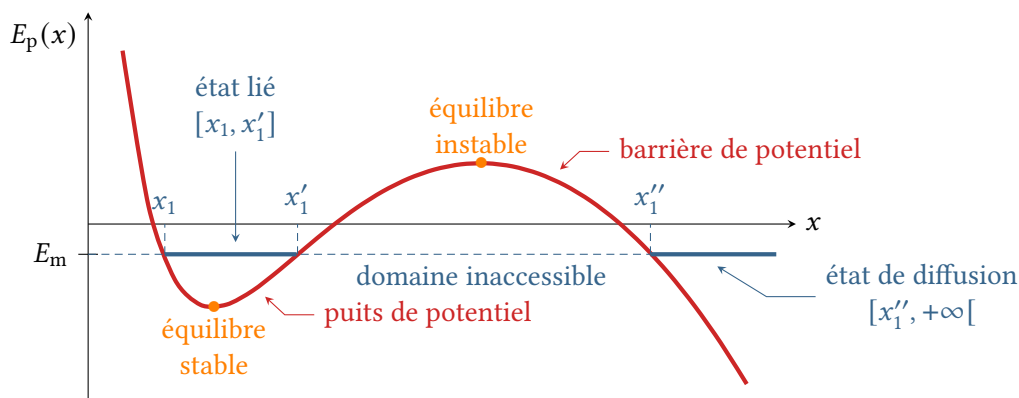


Mouvement conservatif à un degré de liberté

I - Analyse du profil d'énergie potentielle



- **Force et énergie potentielle** : $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p$ donc à 1d cartésien $F_x = -\frac{dE_p}{dx}$.
 $\leadsto$ la force est dirigée dans le sens des énergies potentielles décroissantes.
 $\leadsto$ un profil d'énergie potentielle peut se lire intuitivement comme celui d'une piste sur laquelle évoluerait une bille.
- **État lié ou de diffusion** :
 - ▷ positions accessibles : telles que $E_p(x) \leq E_m$ car $E_c \geq 0$.
 - ▷ état lié = mouvement dans un domaine borné ; état de diffusion = domaine infini.
- **Positions d'équilibre** = extrémum d'énergie potentielle $\frac{dE_p}{dx}(x=x_{\text{eq}}) = 0$
 - ▷ position stable = la force y ramène le système s'il en est légèrement écarté.
 $\leadsto$ minimum d'énergie potentielle $\frac{d^2E_p}{dx^2}(x=x_{\text{eq, st}}) > 0$.
 - ▷ position instable = le système s'en éloigne s'il en est légèrement écarté.
 $\leadsto$ tous les autres cas, et en particulier celui d'un maximum $\frac{d^2E_p}{dx^2}(x=x_{\text{eq, ins}}) < 0$.

II - Oscillations au voisinage d'une position d'équilibre stable

- **Approximation harmonique** : développement limité de l'énergie potentielle à l'ordre 2 au voisinage de x_{eq} :

$$\begin{aligned}
 f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + o((x-a)^3) \\
 E_p(x) &\simeq \underbrace{E_p(x=x_{\text{eq}})}_{=\text{cte}} + \underbrace{\frac{dE_p}{dx}(x=x_{\text{eq}})}_{=0}(x-x_{\text{eq}}) + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{d^2E_p}{dx^2}(x=x_{\text{eq}})}_{=k>0}(x-x_{\text{eq}})^2 \\
 &= \text{cte} + \frac{1}{2}k(x-x_{\text{eq}})^2
 \end{aligned}$$

- ↪ forme analogue à une énergie potentielle élastique de type ressort;
- ↪ le mouvement est celui d'un oscillateur harmonique : oscillations sinusoïdales, centrées sur la position d'équilibre, isochrones (période indépendante de l'amplitude).

• **Au delà de l'approximation harmonique** : les non-linéarités de l'équation du mouvement peuvent avoir plusieurs conséquences :

- ▷ les oscillations ne sont plus sinusoïdales ↪ enrichissement spectral (plusieurs fréquences dans le spectre);
- ▷ perte d'isochronisme : la période dépend de l'amplitude;
- ▷ dissymétrie par rapport à la position d'équilibre.

• **Adimensionnalisation d'une équation** : autant de grandeurs caractéristiques prises comme unité que de dimensions indépendantes ... mais pas plus.

• **Méthode d'Euler pour une équation différentielle d'ordre 2** :

❶ Se ramener à un système différentiel du premier ordre, en introduisant une fonction inconnue v égale à la dérivée première :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x) \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = f(x) \end{cases}$$

❷ Appliquer le schéma d'Euler explicite aux deux équations du système pour obtenir des relations de récurrence,

$$\begin{cases} \frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta t} = v_n \\ \frac{v_{n+1} - v_n}{\Delta t} = f(x_n) \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} x_{n+1} = x_n + \Delta t v_n \\ v_{n+1} = v_n + \Delta t f(x_n) \end{cases}.$$

• **Utilisation de odeint** :

❶ Identifier le vecteur $\vec{y}$ et la fonction F permettant d'écrire le système à résoudre sous la forme

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = F(\vec{y}, t) \quad \text{p.ex. ici : } \vec{y} = \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad F(\vec{y}, t) = \begin{bmatrix} v \\ f(x) \end{bmatrix}$$

❷ Définir la fonction d'évolution.

❸ Faire appel à la fonction odeint.

```

1  from scipy.integrate import odeint
2  t = np.linspace(0, t_max, N) # liste des temps

4  def F(yt, t):
5      xt, vt = yt
6      return [vt, f(xt)]

8  y0 = [x0, v0] # à définir p.ex. [0, np.sqrt(E)]
9  y = odeint(F, y0, t)
10 x = y[:,0]
```