

Mouvement conservatif à un degré de liberté

-  Difficulté d'analyse et compréhension, initiative requise ;
-  Difficulté technique et calculatoire ;
-  Exercice important.

Flasher ou cliquer
pour accéder
au corrigé



Se préparer

Applications de cours

Ces applications de cours sont des briques élémentaires des raisonnements à mener dans les exercices : les maîtriser est incontournable. Elles sont toutes traitées de manière exhaustive dans le cours.

M7.1 - Montrer à l'aide d'un développement limité que les petites oscillations au voisinage d'une position d'équilibre stable peuvent s'approximer par celles d'un oscillateur harmonique. Exprimer la pulsation des oscillations en fonction des caractéristiques du profil d'énergie potentielle. On raisonnera sur une énergie potentielle quelconque $E_p(x)$ dépendant d'une coordonnée cartésienne x .

M7.2 - Compléter le code ci-dessous pour résoudre l'équation différentielle adimensionnée $\ddot{x} = f(x)$ par la méthode d'Euler et représenter la courbe $x(t)$. On établira les relations de récurrence utiles avant toute écriture de code.

M7.3 - Compléter le code ci-dessous pour résoudre l'équation différentielle adimensionnée $\ddot{x} = f(x)$ en utilisant la fonction `odeint` du module `scipy.integrate` et représenter la courbe $x(t)$. On rappelle que cette fonction permet de résoudre un système différentiel écrit sous la forme

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = F(\vec{y}, t).$$

La fonction `odeint(F, y0, t)`

- prend trois arguments obligatoires : la fonction d'évolution $F(y, t)$, une condition initiale y_0 et une liste ou tableau numpy d'instants t ;
- renvoie le vecteur Y à tout instant contenu dans t sous forme d'un tableau numpy à $n + 1$ dimensions.

On explicitera le vecteur $\vec{y}$ et la fonction d'évolution F avant toute écriture de code.

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 from scipy.integrate import odeint

4
5 ### Paramètres de la simulation :
6 dt = 0.001          # pas de temps adimensionné
7 t_max = 70          # durée de la simulation adimensionnée
8 N = int(t_max/dt)   # nombre de points de la simulation
```

```

11  ### Conditions initiales :
12  x0 = 0          # pas d'énergie potentielle (fond du puits)
13  v0 = .5

15  ### Force adimensionnée dérivant du potentiel de Morse
16  def f(x):
17      return - np.exp(-x) * (1-np.exp(-x))

19  ### code à écrire à partir d'ici.

```

Cahier d'Entraînement



Le *Cahier d'Entraînement* est un projet collaboratif mené par des enseignants de CPGE, proposant aux étudiants des entraînements leur permettant de travailler en autonomie sur des techniques et « réflexes » utiles dans les exercices, en particulier calculatoires. Il est librement téléchargeable en scannant ou cliquant sur le QR-code ci-contre.

↪ pour ce chapitre : 12.10 à 12.13.

Autour des positions d'équilibre

Exercice 1 : Train à sustentation magnétique



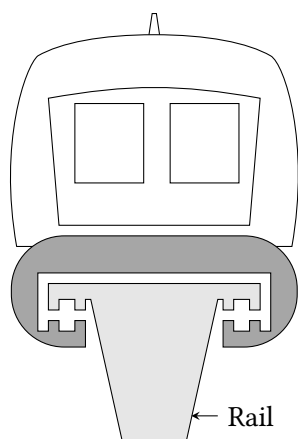
► Stabilité d'une position d'équilibre.

Le Transrapid est un train à sustentation magnétique, c'est-à-dire qu'il lévite au dessus de la voie grâce à des aimants et n'est donc pas en contact avec les rails, contrairement aux trains classiques. Ce faisant, les frottements sont grandement réduits, ce qui lui permet d'atteindre la vitesse de $430 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

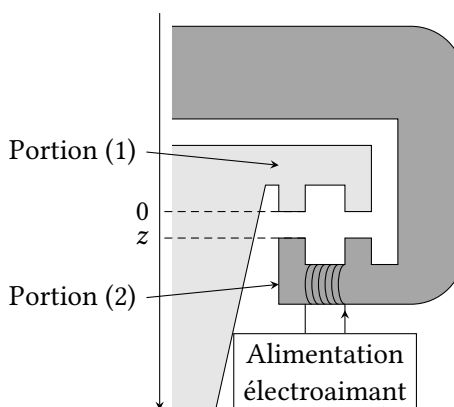
Le système de sustentation, schématisé figure 1, est composé d'une portion de rail (1) et d'une portion (2) solidaire de la rame, sur laquelle sont bobinés plusieurs électroaimants, sources de champ magnétique. Les deux portions sont séparées par d'une distance z variable. La lévitation du Transrapid est due à une force magnétique dérivant de l'énergie potentielle

$$E_{\text{pm}} = -\frac{\alpha}{z} \quad \text{avec} \quad \alpha = 180 \text{ uSI},$$

qui vient compenser le poids de la rame (masse $m = 180$ tonnes).



Vue de face



Système de sustentation (demi-coupe)

Figure 1 – Transrapid et son système de sustentation.

- 1 - Déterminer l'unité de α en termes des unités de base du système international.
- 2 - Exprimer et représenter graphiquement l'énergie potentielle totale $E_p(z)$ de la rame. Justifier l'existence d'une position d'équilibre et identifier sa stabilité.
- 3 - Déterminer numériquement la distance séparant le rail de la rame à l'équilibre. Retrouver sa stabilité par le calcul.
- 4 - Pourquoi le système tel qu'il est décrit est-il inutilisable ? Quelle solution technique a pu être ajoutée le rendre exploitable ?

Exercice 2 : Barrière de potentiel polynômiale



- Stabilité d'une position d'équilibre ;
- Petites oscillations au voisinage d'un équilibre stable ;
- Barrière de potentiel.

Un point matériel de masse m se déplace sans frottement le long d'un axe (Ox) dans un champ de force dérivant de l'énergie potentielle

$$E_p(x) = m\omega^2 \left(\frac{x^4}{a^2} - x^2 \right),$$

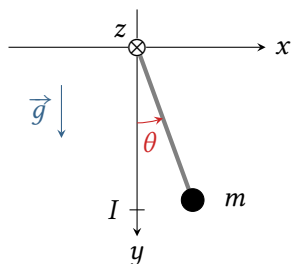
où ω et a sont des constantes positives.

- 1 - Déterminer les positions d'équilibre et leur stabilité. En déduire l'allure du profil d'énergie potentielle.
- 2 - En raisonnant sur l'énergie potentielle, déterminer la pulsation des petites oscillations autour des positions d'équilibre stable.
- 3 - On suppose M au repos dans l'une des deux positions d'équilibre stable, et on souhaite le déplacer jusqu'à l'autre position d'équilibre stable. Quelle vitesse minimale faut-il lui communiquer ?

Exercice 3 : Pendule rigide



- Stabilité d'une position d'équilibre ;
- Petites oscillations au voisinage d'un équilibre stable.



Considérons une masse m suspendue au bout d'une tige rigide de longueur L et de masse négligeable. L'ensemble évolue en rotation libre autour de l'axe (Oz). Tous les frottements sont négligés.

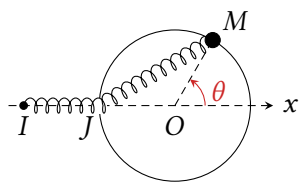
- 1 - Exprimer l'énergie potentielle du système en fonction de la coordonnée angulaire θ .
- 2 - Déterminer les positions d'équilibre et analyser leur stabilité. Ces conclusions se généralisent-elles au pendule simple traditionnel, où la tige est remplacée par un fil ?
- 3 - Montrer que les petites oscillations autour de la position d'équilibre stable peuvent être approchées par celles d'un système masse-ressort équivalent, oscillant à une dimension le long de l'axe (Ix). Déterminer la raideur du ressort équivalent.

Exercice 4 : Équilibre sur un anneau

2 | ✂ 2 | ⚙



▷ Stabilité d'une position d'équilibre.



Un point matériel M de masse m évolue sur un anneau de rayon R . Ce point matériel est attaché à un ressort de raideur k , dont l'autre extrémité est fixé en I . Le ressort est maintenu colinéaire à l'axe (Ox) le long du segment IJ de longueur égale à sa longueur à vide, puis peut s'incliner à partir du point J . Tous les frottements, aussi bien en M qu'en J , sont négligés.

Question : Déterminer la/les position(s) d'équilibre du point M et leur stabilité.

Exercice 5 : Chandelle

3 | ✂ 2



▷ Barrière de potentiel.

Dans *Astérix chez les Bretons*, un rugbyman ayant bu de la potion magique tire dans le ballon avec une force telle qu'il retombe en pleine mer, sur le bateau pirate ... mais si le joueur avait bu davantage de potion magique, le ballon aurait pu sortir du champ d'attraction terrestre.

Question : Quelle vitesse minimale aurait-il fallu qu'il donne au ballon ?

Figure 2 – Extrait de *Astérix chez les Bretons*.

Données :

- ▷ constante de Cavendish $\mathcal{G} = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$;
- ▷ rayon de la Terre $R = 6,4 \cdot 10^3 \text{ km}$;
- ▷ masse de la Terre $M = 6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$.

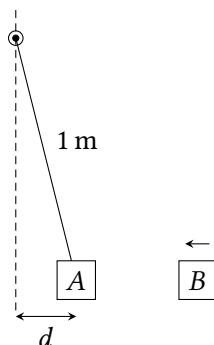
Exercice 6 : Pendule attiré par un aimant

oral X MP | 3 | 3



► Problème ouvert.

Un oral de concours, encore plus pour les oraux sans préparation comme c'est le cas à l'école Polytechnique, n'est pas fait pour être résolu en totale autonomie par le candidat, mais pour être résolu grâce à la discussion avec l'examineur. Ainsi, il est tout à fait normal de buter sur l'exercice ! J'ai ajouté quelques indications pour vous aider à vous débloquer, mais elles ne peuvent pas remplacer une vraie discussion avec l'examineur.



Un aimant A est suspendu au bout d'un fil de longueur 1 m. Un second aimant B est lentement approché de l'aimant A. On admet que la force d'interaction entre les deux aimants a pour norme

$$\|\vec{F}\| = \frac{K}{AB^n}.$$

Lorsque la distance entre les deux aimants atteint 4 cm, l'aimant A qui se trouve alors à une distance $d = 1$ cm de la verticale se colle brutalement à l'aimant B.

Question : déterminer la valeur de n .

Indication 3 : penser à faire des petits tracés pour y voir clair et identifier la meilleure méthode de résolution.

Indication 2 : la clé n'est pas la stabilité mais l'existence.

Indication 1 : penser énergie est généralement un très bon réflexe ... mais ce n'est pas la méthode à privilégier ici.

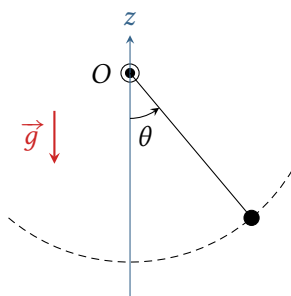
Résolution numérique d'une équation différentielle

Exercice 7 : Schéma d'Euler appliqué au pendule simple

1 | 2 | 3



► Méthode d'Euler pour une équation différentielle d'ordre 2.



Un pendule simple est constitué d'une masse m suspendue à un fil idéal (masse nulle, inextensible, etc.) de longueur ℓ . Cette masse oscille en formant un angle $\theta(t)$ avec la verticale, qui vérifie l'équation différentielle

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \Omega_0^2 \sin \theta = 0 \quad \text{avec} \quad \Omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}.$$

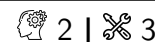
On prendra par la suite $\ell = 20$ cm.

- 1 - Écrire l'équation différentielle comme un système différentiel du premier ordre. En déduire les relations de récurrence issues du schéma d'Euler explicite appliqué à cette équation différentielle.
- 2 - Analyser l'équation différentielle pour proposer une valeur de pas de temps raisonnable a priori.
- 3 - L'implémenter en Python pour résoudre l'équation sur une durée totale correspondant à trois oscillations. On supposera le pendule lâché sans vitesse initiale depuis un angle de 45° .
- 4 - Vérifier en augmentant la durée totale de calcul que la solution numérique finit toujours par diverger, et ce quel que soit le pas de temps.
- 5 - Que représente la quantité

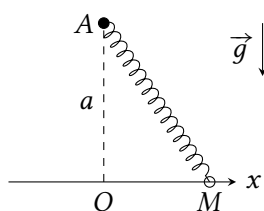
$$E = m\ell^2 \left(\Omega_0^2 (1 - \cos \theta) + \frac{\dot{\theta}^2}{2} \right).$$

Comment est-elle censée se comporter pour un pendule simple ? En utilisant les calculs précédents issus de la méthode d'Euler, représenter $E/m\ell^2$ en fonction du temps. Proposer une interprétation à la divergence constatée.

Exercice 8 : Oscillateur de Landau



- Stabilité d'une position d'équilibre ;
- Adimensionnalisation d'une équation différentielle ;
- Résolution numérique d'une équation différentielle d'ordre 2.



L'oscillateur de Landau est un modèle théorique permettant de modéliser efficacement des systèmes physiques pour lesquelles des faibles non-linéarités sont à prendre en compte. Un exemple de système modèle permettant de réaliser un oscillateur de Landau est un petit anneau, assimilé à un point matériel M de masse m , astreint à se déplacer sans frottement le long d'une tige rectiligne horizontale choisie comme axe (Ox) . Cet anneau est relié à un ressort, de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k , dont l'autre extrémité est fixée en A . La distance de A à la tige est notée $AO = a$.

1 - Montrer que le mouvement de l'anneau est conservatif, et exprimer son énergie potentielle $E_p(x)$.

2 - Positions d'équilibre

— **2.a** - Pour alléger les calculs, on raisonne sur une forme adimensionnée en prenant a comme unité de longueur et $\varepsilon = ka^2$ comme unité d'énergie. Écrire l'énergie potentielle adimensionnée E_p^* en fonction d'une position adimensionnée u et de la longueur à vide adimensionnée b du ressort.

— **2.b** - Montrer que $u = 0$ est toujours une position d'équilibre, mais qu'il peut en exister d'autres selon la valeur de b . Analyser leur stabilité sans calculer de dérivée seconde.

— **2.c** - En déduire l'allure qualitative du profil d'énergie potentielle E_p^* en fonction de b .

3 - Étude dynamique. On souhaite étudier la dynamique du système en résolvant numériquement l'équation adimensionnée du mouvement.

— **3.a** - Identifier dimensionnellement un temps caractéristique τ , fonction de ε , a et m . Que représente-t-il physiquement ?

— **3.b** - On note d'un point la dérivée par rapport au temps adimensionné $t^* = t/\tau$. Exprimer l'énergie mécanique adimensionnée E_m^* et en déduire l'équation du mouvement, d'abord sous la forme

$$\ddot{u} + u \left(1 - \frac{b}{\sqrt{1+u^2}} \right) = 0.$$

— **3.c** - Traduire cette équation sous la forme d'un système différentiel du premier ordre impliquant les fonctions u et $v = \dot{u}$.

— **3.d** - On utilise la librairie de calcul scientifique `scipy` pour la résolution numérique du système, écrit sous forme vectorielle $\dot{\vec{y}} = f(\vec{y})$. Compléter le code ci-dessous.

```

1  import scipy.integrate as sp
2
3  ### Temps adimensionné :
4  ### 5000 points entre 0 et 50
5  t = np.linspace(0, 50, 5000)
6
7  b = 2
8
9  def f(y,t):
10     # renvoie le vecteur dy/dt à partir du vecteur y et de l'instant t
11     # code à compléter
12
13     ### Condition initiale :
14     ### position ui et vitesse vi
15     ui = -2
16     vi = 0
17     yi = [ui, vi]
18
19     ### Résolution
20     y = sp.odeint(f, yi, t)
21     u = y[:,0]
```



```

23 | ### Tracé
24 | plt.figure()
25 | plt.plot(t,u)
26 | plt.xlabel('t* (adimensionné)')
27 | plt.ylabel('u (adimensionné)')

```

4 - On représente figure 3 trois allures de courbes obtenues pour différentes valeurs de b et u_i . Expliquer leur allure : que peut-on dire de b ? de l'énergie mécanique adimensionnée ?

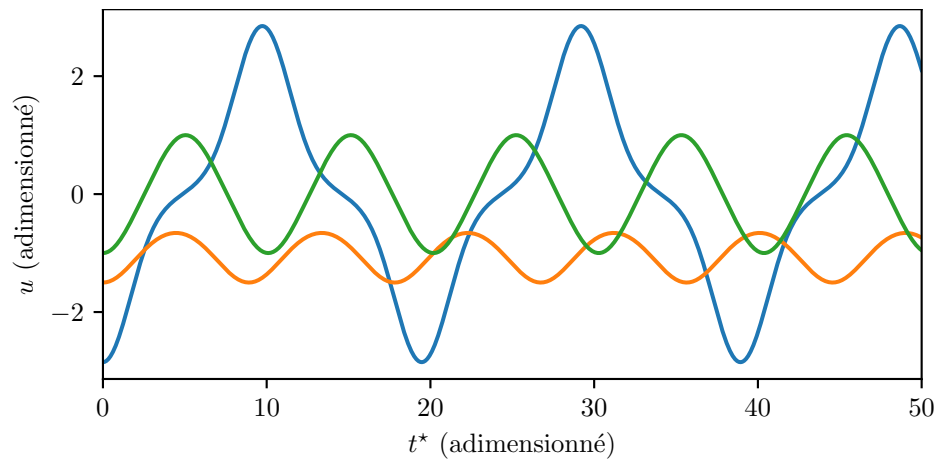


Figure 3 – Différents comportements de l'oscillateur de Landau.