

Forces centrales conservatives

I - Champ de force central et conservatif

- **Définition** : $\vec{F} = F_r(r) \vec{e}_r$ force toujours dirigée vers le même point O .

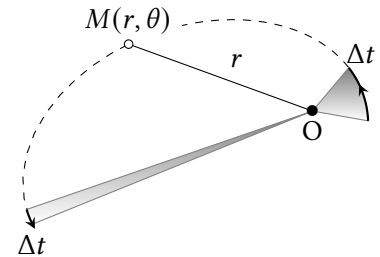
II - Lois de conservation

- **Théorème du moment cinétique** pour un point matériel M par rapport à un point fixe A dans $\mathcal{R}$ galiléen :

$$\begin{cases} \vec{L}_{A,M/\mathcal{R}} = \overrightarrow{AM} \wedge m \vec{v} & (\text{moment cinétique}) \\ \vec{M}_A(\vec{F}) = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F} & (\text{moment de la force } \vec{F}) \end{cases} \quad \leadsto \quad \left. \frac{d\vec{L}_A}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \sum_{n=1}^N \vec{M}_A(\vec{F}_n)$$

- **Conservation du moment cinétique** :

- $\vec{M}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = r \vec{e}_r \wedge F_r \vec{e}_r = \vec{0}$ donc $\vec{L}_O = \text{cte}$.
- **Conséquence 1** : $\overrightarrow{OM} \perp \vec{L}_O$ donc mouvement plan ;
- **Conséquence 2** : loi des aires (deuxième loi de Kepler)
 - géométriquement : les aires balayées par le vecteur $\overrightarrow{OM}$ pendant des durées égales sont égales, où que se trouve le point M ;
 - analytiquement : expression explicite de $\vec{L}_O \leadsto C = r^2 \dot{\theta} = \text{cte}$ (constante des aires).

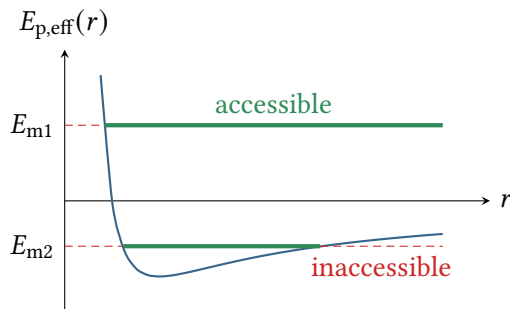


- **Énergie potentielle effective** : « astuce » permettant de se ramener à un seul degré de liberté apparent.

$$E_m = \underbrace{\frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2}_{=E_c} + E_p(r) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2}}_{=E_{p,\text{eff}}(r)} + E_p(r) .$$

- **Positions accessibles** en fonction de l'énergie mécanique.

- Comme $\frac{1}{2} m \dot{r}^2 > 0$, tous les r tels que $E_{p,\text{eff}}(r) < E_m$ sont accessibles.
- Sur une courbe d'énergie potentielle effective : (ici pour un champ newtonien attractif)



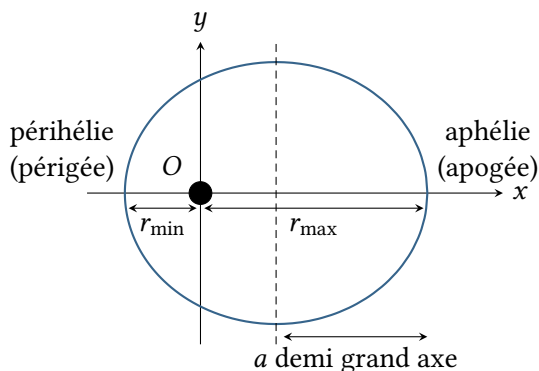
- la particule peut partir à l'infini $\leadsto$ état de diffusion ;
- domaine accessible borné $\leadsto$ état lié.

III - Classification des trajectoires dans un champ newtonien

- **Champ newtonien** : $\vec{F} = -\frac{K}{r^2} \vec{e}_r$ et $E_p = -\frac{K}{r}$ (mêmes signes).
 - gravitation : $\vec{F}_g = -\mathcal{G} \frac{m_0 m}{r^2} \vec{e}_r$;
 - force de Coulomb : $\vec{F}_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q}{r^2} \vec{e}_r$.
- **Interaction répulsive** : toujours état de diffusion.
- **Interaction attractive** :
 - $E_m \geq 0$: état de diffusion
 - vitesse de libération = vitesse requise pour s'extraire sur champ de gravitation d'un astre = celle qui permet d'atteindre la valeur seuil $E_m = 0$.
 - $E_m < 0$: état lié, trajectoire elliptique ou circulaire.
 - le centre de force est un foyer de l'ellipse (première loi de Kepler)
 - point le plus proche du centre de force : périégée/périhélie ; point le plus éloignée : apogée/aphélie.

IV - Planètes et satellites

- **Lois de Kepler** :



- *Première loi – loi des orbites* : Les planètes du système solaire décrivent des trajectoires elliptiques dont le Soleil est l'un des foyers.
- *Deuxième loi – loi des aires* : Les aires balayées par le segment Soleil-planète pendant des durées égales sont égales.
- *Troisième loi – loi des périodes* : La période de révolution T d'une planète et le demi grand axe a de sa trajectoire vérifient $T^2/a^3 = \text{cte}$ indépendante de la planète.

- **Orbite circulaire** :

- le mouvement est uniforme : PFD dans la base de Frénet

$$m \vec{a} = m \frac{dv}{dt} \vec{u}_T + m \frac{v^2}{R} \vec{u}_N = +\mathcal{G} \frac{m_0 m}{R^2} \vec{u}_N \quad \leadsto \quad v = \sqrt{\frac{m_0 \mathcal{G}}{R}}.$$

- vitesse de satellisation = vitesse en orbite circulaire basse $R \simeq R_T$ (environ $8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ sur Terre) ;
- orbite géostationnaire : plan de l'équateur, vitesse angulaire $\dot{\theta} = \text{cte}$ égale à celle de la Terre $\leadsto$ orbite circulaire d'altitude $h \simeq 36 \cdot 10^3 \text{ km}$.

- **Troisième loi de Kepler** : démo simple pour une orbite circulaire, généralisation admise.

$$T^2 = \left(\frac{2\pi R}{v} \right)^2 = \frac{4\pi^2}{m_0 \mathcal{G}} R^3 \quad \leadsto \quad \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{m_0 \mathcal{G}}.$$

- **Énergie mécanique et caractéristique de l'orbite** :

- orbite circulaire : $E_m = -\mathcal{G} \frac{m_0 m}{2R}$;
- orbite elliptique : $E_m = -\mathcal{G} \frac{m_0 m}{2a}$
 - démonstration : aux rayons extrêmes $\dot{r} = 0$, donc $E_m = E_{p,\text{eff}}(r_{\text{max/min}})$ donne une équation à résoudre donnant les rayons extrêmes en fonction de E_m .