

Forces centrales conservatives

Plan du cours

I	Champ de force central et conservatif	2
I.A	Définition et exemples	2
I.B	Forme mathématique générique	2
II	Lois de conservation	3
II.A	Conservation du moment cinétique.	3
II.B	Conservation de l'énergie mécanique.	7
III	Classification des trajectoires dans un champ newtonien	8
III.A	Champ newtonien	8
III.B	Quelques mots sur les coniques	9
III.C	Trajectoire pour une interaction répulsive : état de diffusion	11
III.D	Trajectoires pour une interaction newtonienne attractive	11
IV	Planètes et satellites	14
IV.A	Introduction	14
IV.B	Orbite circulaire	16
IV.C	Énergie mécanique et caractéristiques de l'orbite	19

(R) Résultat à connaître par cœur.

(M) Méthode à retenir, mais pas le résultat.

(D) Démonstration à savoir refaire.

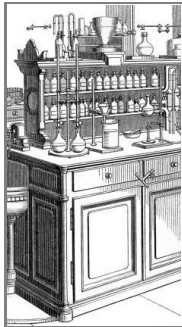
(Q) Aspect qualitatif uniquement.

Les paragraphes sans mention en marge sont là pour faciliter votre compréhension ou pour votre culture mais n'ont pas forcément besoin d'être appris en tant que tel.

Ce chapitre se focalise sur le cas particulier des mouvements dans un champ de force central et conservatif, qui s'avère incontournable tant du point de vue fondamental que de celui des applications puisque qu'il inclut notamment (mais pas seulement) la gravitation.



Un peu d'histoire : Au début du XVII^e siècle, Johannes Kepler établit ses lois empiriques du mouvement planétaire à partir des observations de Tycho Brahe, montrant que les planètes décrivent des ellipses autour du Soleil. Quelques décennies plus tard, Isaac Newton unifie ces résultats en formulant simultanément la loi de la gravitation universelle et les lois fondamentales de la mécanique, qu'il applique pour établir et résoudre les équations du mouvement dans le champ de gravitation. Il y démontre que le mouvement d'un corps soumis à une force centrale en $1/r^2$ conduit à des trajectoires coniques (ellipses, paraboles ou hyperboles). Il établit ainsi mathématiquement que les lois empiriques de Kepler découlent de sa loi de la gravitation universelle. Cependant, Newton utilise une méthode géométrique, le « langage des proportions ». La résolution analytique moderne par des équations différentielles et des quantités conservées sera développée plus systématiquement au XVIII^e siècle par Leonhard Euler, Joseph-Louis Lagrange et Pierre-Simon Laplace.



Un peu d'histoire : Au début du XX^e siècle, la compréhension de la gravitation est profondément transformée par Albert Einstein. En 1915, sa théorie de la relativité générale remplace la force gravitationnelle de Newton par une vision géométrique : la matière et l'énergie courbent l'espace-temps, et les corps et la lumière suivent les trajectoires imposées par cette courbure. Cette nouvelle conception explique des phénomènes inexpliqués par la mécanique classique, comme l'avance du périhélie de Mercure, la déviation de la lumière par les masses (et notamment les étoiles), ou l'existence des trous noirs. Confirmée par l'observation des ondes gravitationnelles en 2015, la relativité générale constitue le cadre théorique moderne de la gravitation.

I - Champ de force central et conservatif

I.A - Définition et exemples

Une force est qualifiée de **champ de force** si une particule test la ressent en tout point de l'espace, indépendamment des caractéristiques de son mouvement (vitesse, autres forces).

Un champ de force est dit **central** s'il est en tout point de l'espace dirigé vers un même point appelé **centre de force**.

Un champ de force est dit **conservatif** s'il dérive d'une énergie potentielle.

Exemples et contre-exemples :

Exemple	Champ de force	Central	Conservatif
Poids $\vec{P} = m\vec{g}$	plutôt oui	non	oui
Gravitation $\vec{F} = -G\frac{m_0m}{r^2}\vec{e}_r$	oui	oui	oui
Force de Lorentz électrique $\vec{F} = q\vec{E}$	oui	non en général	oui
Force de Lorentz magnétique $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$	oui	non	non
Force de réaction d'un support $\vec{N}$	non	non	non
Force de frottement fluide $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$	non	non	non
Force de rappel d'un ressort $\vec{F}_r = -k(\ell - \ell_0)\vec{u}_{\text{ext}}$	oui	oui	oui

Remarque : Compte tenu de la manière dont une énergie potentielle est définie, une force conservative est forcément un champ de force. Par ailleurs, et bien que cela puisse théoriquement exister, je n'ai pas réussi à trouver d'exemple simple de champ de force qui soit central mais non-conservatif.

I.B - Forme mathématique générique

Un champ de force central particularise un point de l'espace : le centre de force. Il est donc naturel de travailler en coordonnées sphériques dont l'origine O coïncide avec le centre de force, et de choisir un référentiel dans lequel O est fixe. La force s'écrit donc a priori sous la forme

$$\vec{F} = F_r(r, \theta, \varphi) \vec{e}_r.$$

Conséquence de la nature conservative : en utilisant l'expression du gradient en coordonnées sphériques, il existe une énergie potentielle telle que

$$\vec{F} = -\vec{\text{grad}} E_p \quad \text{soit} \quad F_r(r, \theta, \varphi) \vec{e}_r = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial E_p}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial E_p}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi \right).$$

Projections sur $\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_\varphi$:

$$\frac{\partial E_p}{\partial \theta} = \frac{\partial E_p}{\partial \varphi} = 0 \quad \leadsto \quad E_p(r, \theta, \varphi) = E_p(r) \text{ uniquement}$$

Projection sur $\vec{e}_r$:

$$F_r(r, \theta, \varphi) = -\frac{dE_p}{dr}(r) \quad \leadsto \quad F_r(r, \theta, \varphi) = F_r(r) \text{ uniquement}$$

Il n'y a pas de dépendance en θ et φ , ni pour l'énergie potentielle ni pour F_r .

Espace 1

Conclusion :



Une force centrale conservative est radiale et ne dépend que de la distance r au centre de force,

$$\vec{F} = F_r(r) \vec{e}_r$$



II - Lois de conservation

Ce paragraphe vise à mettre en évidence des **quantités conservées**, aussi appelées **intégrales premières** ou **constantes du mouvement**, c'est-à-dire des grandeurs qui demeurent constantes lors du mouvement d'une particule test dans un champ de force central conservatif. Les connaître et les interpréter apporte beaucoup d'informations sur le mouvement à peu de frais, c'est-à-dire sans calcul trop technique.

II.A - Conservation du moment cinétique

II.A.1 - Théorème du moment cinétique pour un point matériel par rapport à un point fixe

Il existe plusieurs variantes de la notion de moment cinétique. Nous allons ici nous intéresser au moment cinétique d'un *point matériel* par rapport à un *point de référence*, ce qui nous mènera à une reformulation du PFD. Nous étudierons dans la suite de l'année le moment cinétique d'un *solide* par rapport à un *axe de référence*.

• Définitions



On appelle **moment cinétique** d'un point matériel M par rapport à un point de référence A la grandeur

$$\vec{L}_{A,M/\mathcal{R}} = \overrightarrow{AM} \wedge m \vec{v}_{M/\mathcal{R}}.$$

Il dépend du point de référence A et du référentiel dans lequel il est calculé.



Remarque : on rencontre parfois la notation alternative $\vec{\sigma}$.

💣💣💣 **Attention !** Il est souvent possible de sous-entendre le point M et le référentiel, en revanche le point A doit toujours être précisé lorsqu'on parle de moment cinétique.

(R)



On appelle **moment** d'une force $\vec{F}$ appliquée en M par rapport à un point de référence A

$$\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}) = \vec{AM} \wedge \vec{F}$$

Il dépend du point de référence A .

• Théorème du moment cinétique

(R)



Théorème du moment cinétique :

Les variations de moment cinétique d'un point matériel sont dues aux moments des forces qu'il subit.

Pour un point matériel en évolution dans un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen, et A un point fixe dans ce référentiel,

$$\left. \frac{d\vec{L}_A}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \sum_{n=1}^N \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}_n)$$

⚠⚠⚠ **Attention !** Ne pas oublier l'hypothèse de point fixe !

Démonstration : Considérons un point matériel M de masse m , en évolution dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, et A un point fixe de ce référentiel. Il subit un ensemble de forces notées $\vec{F}_n$ ($1 \leq n \leq N$).

$$\left. \frac{d\vec{L}_A}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \frac{d\vec{AM}}{dt} \wedge m\vec{v} + \vec{AM} \wedge m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Comme le point A est fixe,

$$\frac{d\vec{AM}}{dt} = \frac{d\vec{AO}}{dt} + \frac{d\vec{OM}}{dt} = \vec{v} \quad \text{donc} \quad \frac{d\vec{AM}}{dt} \wedge m\vec{v} = \vec{v} \wedge m\vec{v} = \vec{0}$$

D'après le PFD,

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{AM} \wedge \sum_{n=1}^N \vec{F}_n = \sum_{n=1}^N \vec{AM} \wedge \vec{F}_n = \sum_{n=1}^N \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}_n)$$

• Mise en pratique

Application 1 : Pendule simple et moment cinétique

Retrouver l'équation du mouvement du pendule simple par application du théorème du moment cinétique.

(M)

→ le TMC n'apporte pas plus d'information qu'une projection du PFD, ce qui le rend généralement peu efficace pour établir les équations du mouvement d'un point matériel ... ce sera très différent pour étudier le mouvement d'un solide !

II.A.2 - Conservation du moment cinétique dans un champ de force central

Système : particule test assimilée à un point matériel ;

Référentiel : $\mathcal{R}$ galiléen (sans plus de précision pour rester général) ;

Repérage : coordonnées sphériques de centre O confondu avec le centre de force ;

Bilan des forces : uniquement la force $\vec{F} = F_r(r) \vec{e}_r$;

Théorème du moment cinétique : par rapport au centre de force O , qui est bien un point fixe.

$$\left. \frac{d\vec{L}_O}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{OM} \wedge \vec{F} = r \vec{e}_r \wedge F_r(r) \vec{e}_r = \vec{0}$$

(D)

Espace 3

Conclusion :



Le moment cinétique par rapport au centre de force est une constante du mouvement dans un champ de force central conservatif.

(R)

II.A.3 - Planéité du mouvement

Par définition on a à tout instant $\vec{OM} \perp \vec{L}_O = \vec{cte}$, c'est-à-dire que le mouvement est plan

(D)

Espace 4



Le mouvement d'un point matériel dans un champ de force central conservatif est plan.
Le plan du mouvement contient le centre de force O et est orthogonal à $\vec{L}_O$.

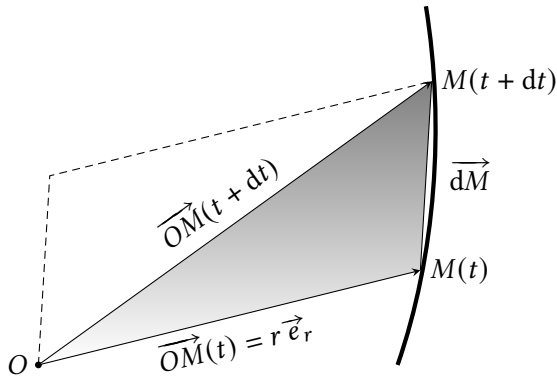
(R)

Le moment cinétique $\vec{L}_O$ étant une constante du mouvement, il est fixé par les conditions initiales. Ainsi, comme on pouvait s'y attendre, le plan du mouvement est lui aussi fixé par les conditions initiales : il s'agit du plan engendré par $\vec{OM}(t=0)$ et $\vec{v}(t=0)$.

Remarque : Cette caractérisation pose des problèmes de définition dans le cas où les deux vecteurs sont colinéaires et/ou si l'un des deux est nul ... mais le résultat est encore plus fort dans ce cas car le mouvement est rectiligne, ce qui est bien un cas particulier de mouvement plan.

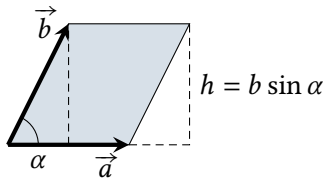
Conséquence : La conservation du moment cinétique particularise une direction de l'espace, celle de $\vec{L}_O$. Plus que les coordonnées sphériques, il devient naturel de travailler en coordonnées *cylindriques* dont l'axe (Oz) est orienté dans la direction de $\vec{L}_O$.

II.A.4 - Loi des aires



L'aire $d\mathcal{A}$ balayée par le vecteur $\overrightarrow{OM}$ pendant la durée dt est égale (au premier ordre en dt) à la moitié de celle du parallélogramme engendré par les vecteurs $\overrightarrow{OM}(t)$ et $d\vec{M}$.

Géométrie de collège :



L'aire d'un parallélogramme de côtés a et b formant un angle α est donnée par

$$\mathcal{A} = ah = ab \sin \alpha = \|\vec{a} \wedge \vec{b}\|.$$

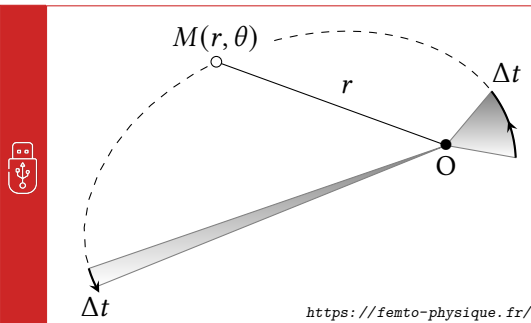
Application à la trajectoire :

$$d\mathcal{A} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{OM} \wedge d\vec{M}\| = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}\| dt = \frac{1}{2} \frac{\|\vec{L}_O\|}{m} dt$$

Espace 5

→ l'aire balayée par unité de temps $d\mathcal{A}/dt$, appelée **vitesse aréolaire**, est constante.

R



Loi des aires :

L'aire balayée par le vecteur $\overrightarrow{OM}$ pendant une durée Δt ne dépend que de cette durée, mais pas de la position de M .

La loi des aires est valable pour tout mouvement dans un champ de force central conservatif.

<https://femto-physique.fr/>

Remarque : On le formule parfois « les aires balayées pendant des durées égales sont égales ».

On retrouve ici la **deuxième loi de Kepler** ... mais dans un contexte beaucoup large, car Kepler n'a formulé les lois qui portent son nom que pour le mouvement d'une planète.

II.A.5 - Constante des aires

Expression explicite de $\vec{L}_O$:

$$\vec{L}_O = r \vec{e}_r \wedge m(\dot{r} \vec{e}_r + r\dot{\theta} \vec{e}_\theta) = mr^2 \dot{\theta} \vec{e}_z$$

Espace 6

R



La grandeur $C = r^2 \dot{\theta}$ est une constante du mouvement appelée **constante des aires**.

Interprétation : la constante des aires est donc égale au double de la vitesse aréolaire,

$$d\mathcal{A} = \frac{1}{2} \frac{\|\vec{L}_O\|}{m} dt = \frac{1}{2} C dt.$$

II.B - Conservation de l'énergie mécanique

Le point matériel étudié n'est soumis par hypothèse qu'à la force centrale conservative $\vec{F}$, qui dérive de l'énergie potentielle $E_p(r)$.



L'énergie mécanique est une constante du mouvement dans un champ de force central conservatif.

R

• Énergie potentielle effective

Motivation : L'analyse qualitative d'un mouvement (positions d'équilibre, positions accessibles à partir d'une condition initiale donnée, état lié ou de diffusion, etc.) est facile à mener dans le cas d'un seul degré de liberté ... or ici il y en a deux, r et θ .

↪ la loi des aires permet de les relier et de se ramener au cas d'un seul degré de liberté apparent.

Mise en équation :

M

Par définition, $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + E_p(r)$

Or $C = r^2\dot{\theta}$ donc $\dot{\theta} = \frac{C}{r^2}$

Ainsi, $E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\frac{C^2}{r^4} + E_p(r)$

soit encore $E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} + E_p(r)$

On peut alors identifier une énergie cinétique radiale et une énergie potentielle effective $E_{p,\text{eff}}(r)$

Espace 7

↪ pour se ramener à une forme effective à un degré de liberté, un terme d'énergie cinétique est regroupé avec l'énergie potentielle pour former l'**énergie potentielle effective** $E_{p,\text{eff}}(r)$.

🔴🔴🔴 **Attention !** L'identification est seulement formelle : $E_{p,\text{eff}}$ n'est pas une vraie énergie potentielle, en particulier il n'y a aucune force associée.

***Remarque :** pour s'en convaincre, on peut constater qu'elle dépend via C des conditions initiales, ce qui n'est pas du tout le cas d'une vraie énergie potentielle.*

• État lié et de diffusion

(R)



Un système est dit **dans un état lié** si sa trajectoire est restreinte à un domaine fini de l'espace. Réciproquement, il est dit **dans un état de diffusion** si sa trajectoire se fait dans un domaine infini.

↪ la nature bornée ou non de la trajectoire dépend uniquement de r , et peut donc s'analyser avec l'énergie potentielle effective.

• Exemple

(M)

Application 2 : Énergie potentielle effective avec ressort

Considérons un point matériel M lié à un ressort de raideur k et longueur à vide ℓ_0 , dont l'extrémité fixe est attachée à l'origine du repère. À l'instant $t = 0$, on le lâche à une distance r_0 du centre avec une vitesse v_0 .

1 - Exprimer l'énergie potentielle effective et la représenter graphiquement.

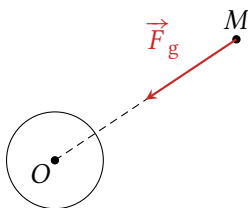
2 - La trajectoire peut-elle être circulaire ? peut-elle diverger ?

III - Classification des trajectoires dans un champ newtonien

III.A - Champ newtonien

Le champ de force newtonien historique est bien sûr celui de gravitation, mais l'analogie formelle entre force de gravitation et force de Coulomb invite à élargir un peu la définition.

(R)



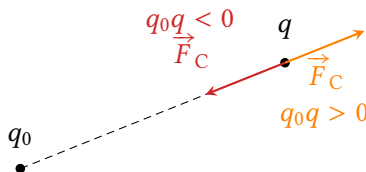
Un astre sphérique de masse m_0 exerce sur une particule de masse m une force

$$\vec{F}_g = -G \frac{m_0 m}{r^2} \vec{e}_r$$

Espace 8

où $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ est la **constante de gravitation universelle** ou **constante de Cavendish**.

(R)



Une charge q_0 exerce sur une charge test q une force

$$\vec{F}_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q}{r^2} \vec{e}_r$$

Espace 9

avec $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ la **permittivité diélectrique du vide**.

⇒ Généralisation :

(R)



Un champ de force central conservatif est dit **newtonien** s'il est tel que

$$\vec{F} = -\frac{K}{r^2} \vec{e}_r \quad \text{et} \quad E_p = -\frac{K}{r}$$

avec K une constante de signe quelconque.

↪ $K_g = Gm_0m > 0$ et $K_C = -\frac{q_0q}{4\pi\epsilon_0} \geq 0$

⚠⚠⚠ **Attention !** Contrairement à ce que la relation $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p$ peut laisser croire, le signe est le même dans la force et l'énergie potentielle car il y a compensation des $-$ dans la démonstration.

Démonstration : comme on a compris que les coordonnées cylindriques sont les plus naturelles pour décrire les trajectoires, partons de l'expression du gradient dans ce système :

$$\vec{F} = -\vec{\text{grad}} E_p = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial E_p}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial E_p}{\partial z} \vec{e}_z\right).$$

Remarque : une démonstration en coordonnées sphériques serait exactement analogue.

On en déduit que E_p ne dépend que de r , et

$$-\frac{K}{r^2} = -\frac{dE_p}{dr}$$

ce qui permet d'intégrer par séparation des variables en prenant l'énergie potentielle nulle à l'infini

$$\int_0^{E_p(r)} dE_p = \int_\infty^r \frac{K}{r^2} dr \quad \text{soit} \quad E_p(r) = -\frac{K}{r}.$$

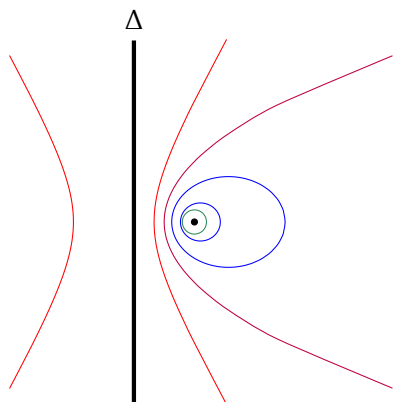
Espace 10

Remarque : Se reporter au cours sur l'énergie mécanique pour une démonstration alternative passant par le travail élémentaire, qui permet de prouver que la force est conservative, ce que cette démonstration ne prouve pas.

III.B - Quelques mots sur les coniques

Ce paragraphe complète (ou est complété par) l'animation Geogebra mise en ligne sur le site de la classe. Les seules notions au programme de physique concernent la définition d'une ellipse en terme de grand et petit axe et d'équation cartésienne. Aucune autre définition ou formule n'est à mémoriser, vous devez simplement savoir les utiliser si elles vous sont fournies par un énoncé.

• Définition géométrique par foyer et directrice



Considérons dans un plan une droite Δ et un point $F \notin \Delta$. On appelle **conique** de droite directrice Δ , de foyer F et d'**excentricité** $e > 0$ l'ensemble des points M du plan tels que le rapport entre distance de M à F et la distance de M à Δ soit égal à e :

$$\frac{d(M, F)}{d(M, \Delta)} = e.$$

La nature de la conique change en fonction de l'excentricité,

- $0 < e < 1$: **ellipse**, courbe fermée ;
- $e = 1$: **parabole**, courbe ouverte « fermée à l'infini » ;
- $e > 1$: **hyperbole**, courbe ouverte comportant deux branches ;
- par passage à la limite, le cas $e = 0$ donne un **cercle** (cf. plus loin).

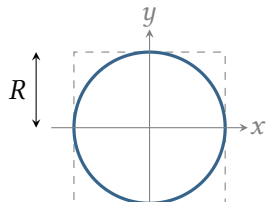
Par symétrie, les ellipses et hyperboles possèdent deux droites directrices et deux foyers.

• Équation en coordonnées cartésiennes

Toutes les coniques sont décrites en coordonnées cartésiennes par des équations de degré 2 au plus, de la forme

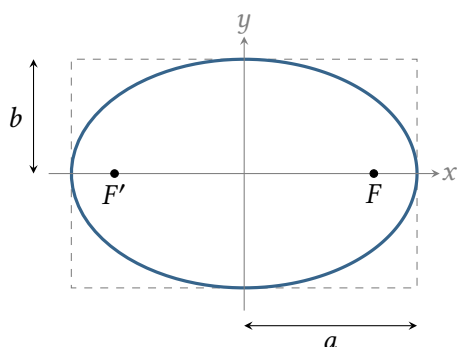
$$a_1 x^2 + a_2 xy + a_3 y^2 + a_4 x + a_5 y + a_6 = 0$$

Un choix judicieux de repère permet de réduire ces équations sous une forme simple à plusieurs coefficients nuls.



Équation cartésienne d'un cercle de rayon R de centre O :

$$\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2} = 1$$



Équation cartésienne d'une ellipse de centre O : une ellipse est un « cercle dilaté » dans une direction

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

où a est le **semi grand axe** et $b < a$ le **semi petit axe** de l'ellipse.

• Équation en coordonnées polaires

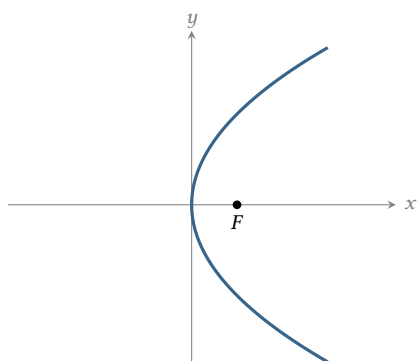
Dans un repère polaire dont l'origine coïncide avec un foyer (ce n'est donc pas la même origine que le repère cartésien), un cercle et une ellipse sont décrites par une équation polaire de la forme

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

où $e \geq 0$ est l'excentricité de la conique, et $p > 0$ est appelé paramètre de la conique, qui décrit qualitativement sa taille. Cette équation montre sans ambiguïté qu'une conique d'excentricité nulle est un cercle de rayon p . Dans le cas d'une ellipse,

$$\begin{cases} a = \frac{p}{1 - e} \\ b = \frac{p}{1 + e} \end{cases} \iff \begin{cases} e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \\ p = \frac{b^2}{a} \end{cases}$$

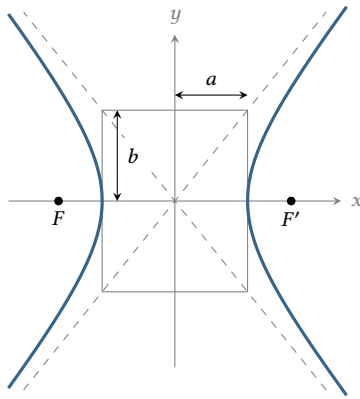
► **Pour approfondir** : Nous ne nous en servons pas, mais des équations analogues existent évidemment pour la parabole et l'hyperbole. Attention, l'origine du repère polaire est l'un des foyers de la conique, différente de l'origine du repère cartésien.



Une parabole, conique d'excentricité 1, admet les équations

$$y^2 = 2px \quad \text{et} \quad r(\theta) = \frac{p}{1 + \cos \theta}$$

où $p > 0$ est le paramètre de la parabole. En permutant les axes du repère, on retrouve bien la forme habituelle $y = x^2/2p$.



Une hyperbole, conique d'excentricité $e > 1$, admet les équations

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{et} \quad r(\theta) = \frac{p}{\pm 1 + e \cos \theta}.$$

Le signe $\pm$ de l'équation polaire conduit aux deux branches de l'hyperbole : pour un angle θ donné, il y a *deux* points appartenant à l'hyperbole, un par branche.

L'équation classique de la forme $y = k/x$ s'obtient en considérant un repère dont les axes coïncident avec les asymptotes des deux branches d'hyperbole, avec quelques subtilités liées au fait qu'il n'est a priori pas ortho-normé.

Toutes les figures de ce paragraphe sont adaptées de <https://femto-physique.fr/>.

III.C - Trajectoire pour une interaction répulsive : état de diffusion

La seule possibilité d'interaction newtonienne répulsive est celle de deux charges de même signe, q_0 placée en O et la particule-test de charge q placée à distance r .

$$\vec{F}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q}{r^2} \vec{e}_r \quad \leadsto \quad E_p(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q}{r} \quad \leadsto \quad E_{p,\text{eff}}(r) = \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q}{r}.$$

L'énergie potentielle effective $E_{p,\text{eff}}$ est toujours positive et décroissante, voir figure 1, ce qui montre que la particule se trouve forcément dans un état de diffusion. Plus de calculs permettraient de montrer que la trajectoire est une hyperbole dont le centre de force O est le foyer extérieur.

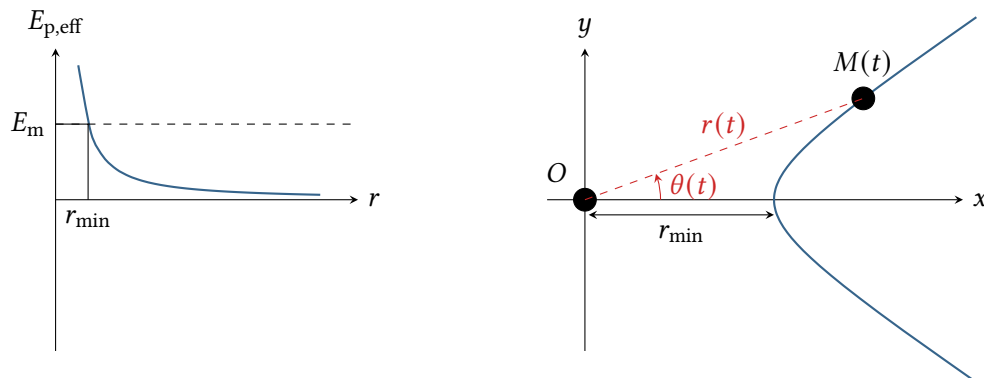


Figure 1 – Énergie potentielle effective et trajectoire. Cas d'une interaction newtonienne répulsive entre deux charges de même signe.

III.D - Trajectoires pour une interaction newtonienne attractive

L'exemple type est celui de la force gravitationnelle entre deux masses, m_0 placée en O et la particule-test de masse m placée à distance r .

$$\vec{F}(r) = -\mathcal{G} \frac{m_0 m}{r^2} \vec{e}_r \quad \leadsto \quad E_p(r) = -\mathcal{G} \frac{m_0 m}{r} \quad \leadsto \quad E_{p,\text{eff}}(r) = \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} - \mathcal{G} \frac{m_0 m}{r}.$$

Une force coulombienne entre deux charges opposées conduit évidemment aux mêmes résultats.

III.D.1 - Allure du profil d'énergie potentielle effective

- ▷ pour r petit :
terme en $1/r^2$ dominant, donc $E_{p,\text{eff}} > 0$, décroissante, tendant vers $+\infty$ en 0

- ▷ pour r grand :
terme en $-1/r$ dominant, donc $E_{p,\text{eff}} < 0$, croissante, tendant vers 0 en $+\infty$

- conséquence sur l'allure de la courbe :
passage par un minimum négatif



Espace 13

Remarque : Un calcul de dérivée montre que ce minimum est atteint en $r_0 = C^2/m_0\mathcal{G}$... mais nous verrons par la suite un moyen plus efficace d'établir cette expression.

III.D.2 - Énergie mécanique positive : état de diffusion

La trajectoire suivie par le point matériel M est une branche d'hyperbole dont le centre de force O est le foyer intérieur, voir figure 2.

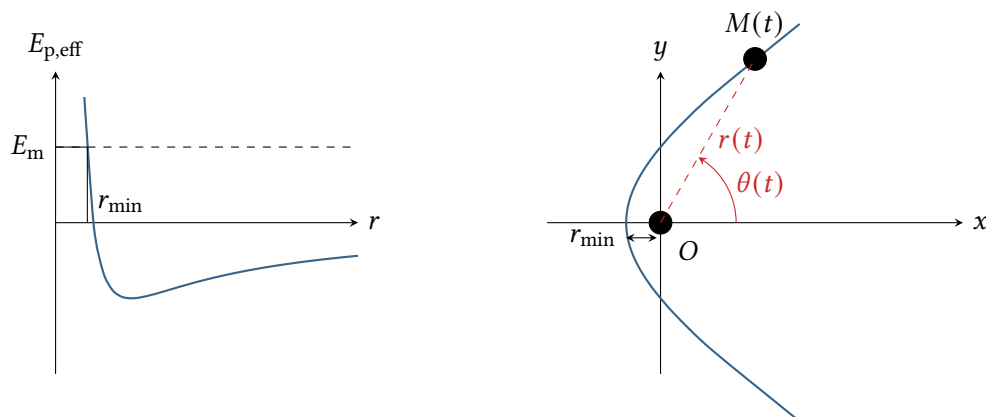


Figure 2 – Énergie potentielle effective et trajectoire. Cas d'une interaction newtonienne attractive avec $E_m > 0$.

Comment interpréter que la trajectoire soit bornée pour r petit ?



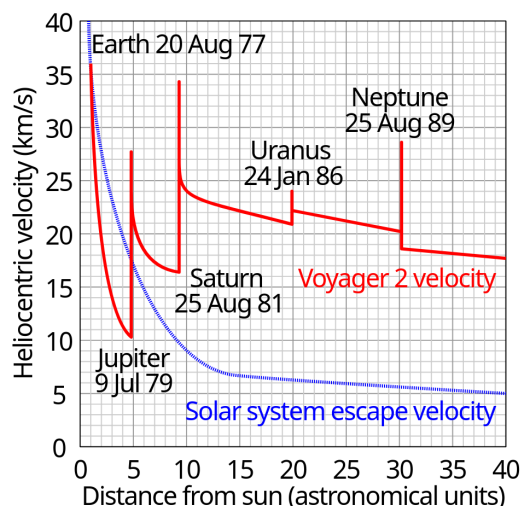
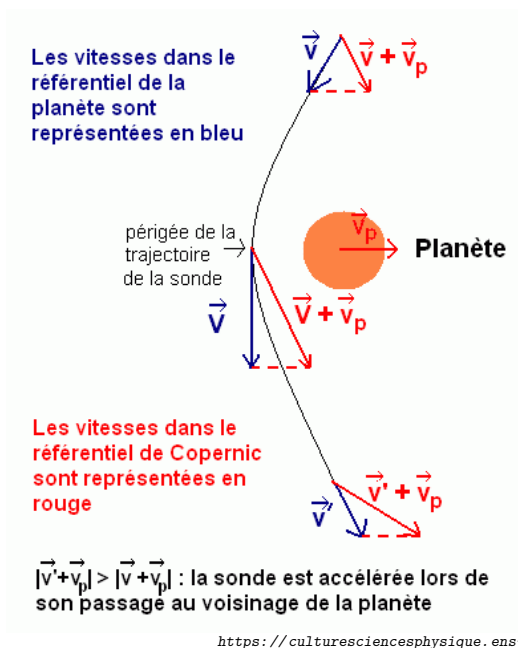
La force ne devient pas répulsive ! Il faut se rappeler qu'on considère une énergie potentielle effective : le terme en $1/r^2$ qui diverge est lié à l'énergie cinétique. Lorsque r diminue, la vitesse augmente beaucoup, et donc on atteint la limite imposée par E_m .

Espace 14

Remarque culturelle : Des trajectoires de ce type sont exploitées pour modifier la vitesse et la trajectoire d'une sonde spatiale en exploitant l'attraction d'une planète : on parle d'assistance gravitationnelle ou d'effet de fronde gravitationnelle, qu'illustre la figure 3.

Lorsqu'un engin s'approche d'un astre comme Jupiter ou Vénus, il plonge dans son puits gravitationnel, accélère, puis repart avec une direction et une vitesse différentes. Dans le référentiel de la planète, l'énergie mécanique de la sonde se conserve : elle gagne de la vitesse en s'approchant vers l'astre puis en perd en s'en éloignant, retrouvant sa valeur initiale loin de celui-ci. Cependant, dans le référentiel de Copernic (= référentiel héliocentrique), la planète est elle-même en mouvement sur son orbite, contrairement à la situation envisagée dans le cours, si bien que dans ce référentiel, il se produit un échange d'énergie et de quantité de mouvement entre la sonde et la planète. La sonde gagne ainsi un peu d'énergie mécanique tandis que la planète en perd autant ... ce qui est imperceptible compte tenu du rapport des masses.

De nombreuses sondes spatiales ont utilisé cet effet, par exemple Voyager 2, seul engin à avoir survolé Uranus et Neptune puis à avoir quitté le système solaire en 2018, ou encore Cassini-Huygens, destinée à l'exploration de Saturne.



Wikipedia

Figure 3 – Effet de fronde gravitationnelle. Gauche : explication de principe. Droite : vitesse de la sonde Voyager exprimée dans le référentiel de Copernic (héliocentrique) en fonction de sa distance au Soleil exprimée en unités astronomiques, définie comme la distance moyenne Terre-Soleil.

III.D.3 – Énergie mécanique nulle : seuil entre état lié et état de diffusion

La trajectoire suivie par le point matériel M est une parabole dont le centre de force O est le foyer, voir figure 4.

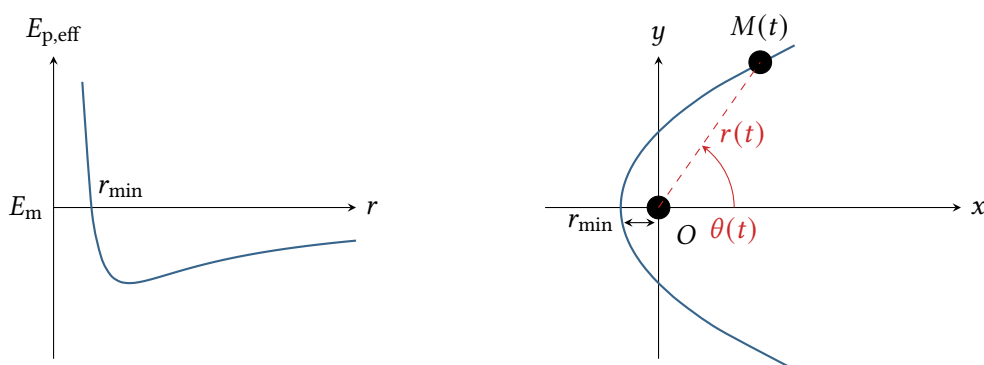


Figure 4 – Énergie potentielle effective et trajectoire. Cas d'une interaction newtonienne attractive avec $E_m = 0$.

Application : On appelle **vitesse de libération** ou **seconde vitesse cosmique** la vitesse minimale d'une particule test pour qu'elle puisse s'extraire du champ gravitationnel d'un astre.

Application 3 : Vitesse de libération

Quelle doit être la vitesse d'une fusée pour qu'elle puisse s'extraire du champ gravitationnel terrestre ?

Données : rayon terrestre $R_T = 6,4 \cdot 10^3$ km, masse terrestre $M_T = 6,0 \cdot 10^{24}$ kg.

Remarque culturelle : Lors d'un lancement typique, la fusée atteint d'abord la vitesse minimale de satellisation (cf. plus loin), qui est d'environ $7,9 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ en orbite basse, en prenant progressivement de la vitesse tout en s'inclinant pour se placer en orbite. Une fois en orbite, si l'on souhaite quitter la Terre (vers la Lune ou au-delà), un moteur est rallumé pour fournir un surplus de vitesse. C'est seulement à ce moment que la vitesse totale par rapport à la Terre dépasse la vitesse de libération. Cette stratégie permet de minimiser les frottements exercés par l'air sur la fusée, et donc de limiter sa consommation de carburant et les contraintes mécaniques et thermiques qu'elle subit.

III.D.4 - Énergie mécanique négative : état lié



La trajectoire suivie par le point matériel M est une ellipse dont le centre de force O est un foyer, voir figure 5.

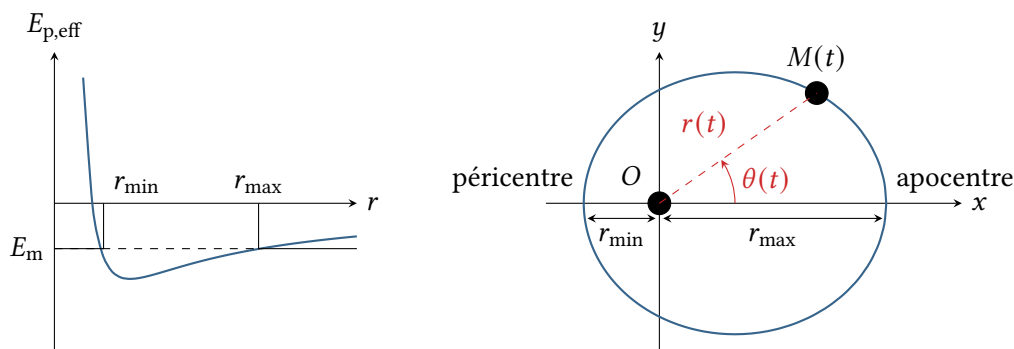


Figure 5 – Énergie potentielle effective et trajectoire. Cas d'une interaction newtonienne attractive avec $E_m < 0$.

Points extrêmes de la trajectoire : en géométrie, le point de l'ellipse le plus proche de O est appelé le péricentre ; le point le plus éloigné de O est appelé l'apocentre.



↪ noms usuels en mécanique céleste : **apogée** et **périgée** pour un mouvement autour de la Terre, **aphélie** et **périhélie** pour un mouvement autour du Soleil.

Le demi-grand axe a de l'ellipse est relié aux rayons $r_{\min}$ au péricentre et $r_{\max}$ à l'apocentre : $2a = r_{\min} + r_{\max}$.

Espace 15



Cas particulier : si $E_m = E_{m,\min}$, le rayon ne peut prendre qu'une seule valeur : la trajectoire est un cercle.

IV - Planètes et satellites

IV.A - Introduction

IV.A.1 - Le Soleil et la Terre



Caractéristiques du Soleil : $R_{\odot} \simeq 7,0 \cdot 10^5 \text{ km}$ et $m_{\odot} = 2,0 \cdot 10^{30} \text{ kg}$

Espace 16

Caractéristiques de la Terre : $R_{\oplus} \simeq 6,4 \cdot 10^3 \text{ km}$ et $m_{\oplus} = 6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

Espace 17

Distance moyenne Terre-Soleil (= 1 unité astronomique par définition) : $150 \cdot 10^6 \text{ km}$

Espace 18

IV.A.2 - Le système solaire



Le système solaire compte huit planètes, voir figure 6 : Mercure, Vénus, la Terre, Mars, Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune, ici par ordre croissant d'éloignement au Soleil, nommées d'après des dieux romains. Jupiter est plus volumineuse et plus massive que toutes les autres planètes réunies, mais est environ dix fois plus petite et mille fois moins massive que le Soleil : si le Soleil avait la taille d'un ballon de football, Jupiter ne serait pas plus grosse qu'une noix posée à 123 m du ballon-Soleil ... et la Terre un grain de semoule de diamètre 2 mm qui en serait éloigné de 22 m !

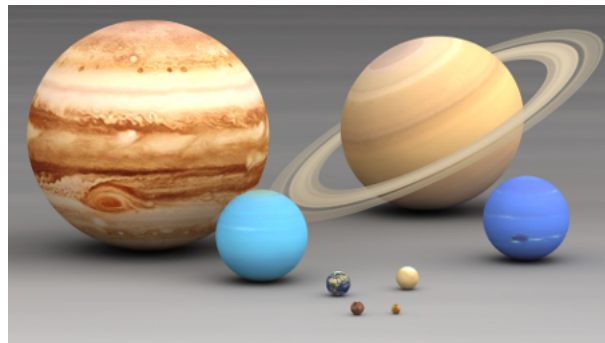
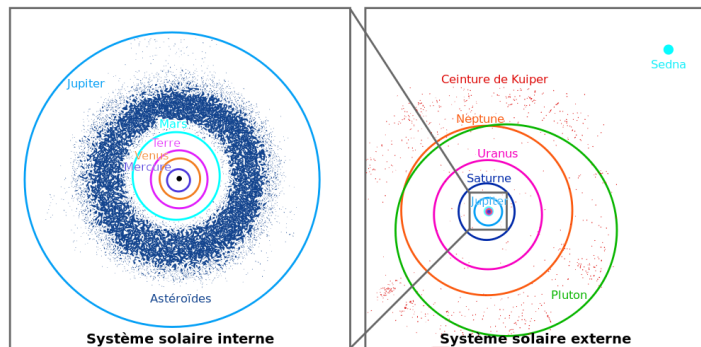
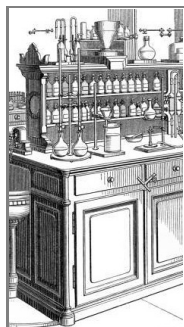
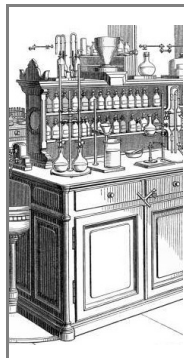


Figure 6 – Représentation à l'échelle du système solaire. Gauche : orbites des différentes planètes. Droite : les planètes elles-mêmes, par ordre croissant de taille Mercure, Mars, Vénus, la Terre, Neptune, Uranus, Saturne et Jupiter.



***Un peu d'histoire :** Les cinq planètes les plus proches de la Terre — Mercure, Vénus, Mars, Jupiter et Saturne — figurent parmi les objets les plus brillants du ciel et ont été observées dès l'Antiquité. Le mot « planète » vient du grec $\pi\lambda\alpha\nu\eta\tau\eta\zeta$, signifiant « errant », en référence à leur trajectoire différente de celle des étoiles fixes. Uranus et Neptune furent découvertes respectivement en 1781 par William Herschel et en 1846 par Urbain Le Verrier et Johann Galle. Le « cahier des charges » qu'un astre doit remplir pour être qualifié de planète a été précisé en 2006, ce qui a eu pour conséquence de reléguer Pluton au rang de « planète naine » alors qu'elle était considérée comme neuvième planète depuis sa découverte par Clyde Tombaugh en 1930.*



***Un peu d'histoire :** Dans l'Antiquité, Aristote et Ptolémée défendaient un modèle géocentrique où la Terre occupait le centre du monde. En 1543, Nicolas Copernic propose un modèle héliocentrique plaçant le Soleil au centre, qui sera précisé par Johannes Kepler au tout début du XVII^e siècle en s'appuyant sur les observations de Tycho Brahé. Actif à la fin du XVI^e siècle (1546-1601), Brahé ne disposait pas encore de télescopes, mais ses observations visuelles sont d'une précision inégalée pour son époque, réduisant l'erreur des mesures d'un facteur dix par rapport à ses prédécesseurs. Ce n'est qu'en 1609 que Galilée invente la lunette astronomique et confirme définitivement le modèle héliocentrique. Accueilli avec prudence à l'époque de Copernic, ce modèle est interdit de diffusion par l'Église catholique en 1616, et Galilée est contraint de renier ses travaux en 1633. L'Église assouplit sa doctrine à partir du XVIII^e siècle, mais Galilée n'a été officiellement réhabilité qu'en ... 1992!*

IV.A.3 - Lois de Kepler

Les lois de Kepler ont été historiquement formulées pour décrire le mouvement des planètes autour du Soleil, mais s'appliquent tout aussi bien au mouvement des satellites autour d'une planète, et plus largement au mouvement d'un astre léger en orbite autour d'un astre beaucoup plus massif.

Lois de Kepler :

Première loi – loi des orbites

Les planètes du système solaire décrivent des trajectoires elliptiques dont le Soleil est l'un des foyers.

Deuxième loi – loi des aires

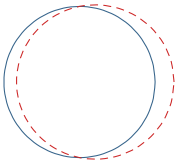
Les aires balayées par le segment Soleil-planète pendant des durées égales sont égales.

Troisième loi – loi des périodes

La période de révolution T d'une planète et le demi grand axe a de sa trajectoire vérifient $T^2/a^3 = \text{cte}$ indépendante de la planète.



Validité expérimentale : voir figures 7 et 8.



Planète	Mercure	Vénus	Terre	Mars	Jupiter	Saturne	Uranus	Neptune
Excentricité	0,206	0,007	0,017	0,093	0,005	0,055	0,048	0,009

Figure 7 – Excentricités des trajectoires des planètes. Un cercle (en trait plein) et une ellipse d'excentricité 0,2 (en trait pointillé) de même foyer sont également représentés.

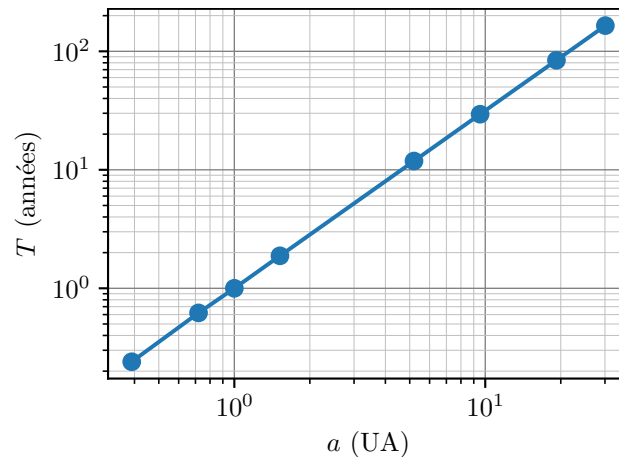


Figure 8 – Troisième loi de Kepler. Les points correspondent aux valeurs de T et a pour les huit planètes du système solaire. La modélisation linéaire donne une droite de pente 3/2 en échelle logarithmique ($\log T$ augmente de 1,5 lorsque $\log a$ augmente de 1), conformément à la troisième loi de Kepler.

IV.B - Orbite circulaire

IV.B.1 - Vitesse en orbite circulaire

(D)

Application 4 : Étude de l'orbite circulaire

Considérons un satellite de masse m en orbite circulaire de rayon R autour de la Terre, de masse m_0 (le raisonnement se généralise sans peine à une planète autour du Soleil!).

- 1 - Montrer que le mouvement est uniforme, et déterminer la vitesse v en fonction du rayon R de l'orbite.
- 2 - En déduire la troisième loi de Kepler pour l'orbite circulaire.

(R)



Un mouvement en orbite circulaire est uniforme, la vitesse étant reliée au rayon de l'orbite par

$$v = \sqrt{\frac{m_0 G}{R}}$$

⚠⚠⚠ **Attention !** Un mouvement elliptique n'est pas uniforme :

la loi des aires implique que la vitesse est plus grande au périhélie qu'à l'aphélie.

Espace 19

Remarque : Le caractère uniforme du mouvement circulaire s'interprète énergétiquement : puisque le mouvement est conservatif et que l'énergie potentielle ne dépend que de r , alors sur une trajectoire circulaire où $r = \text{cte}$ l'énergie cinétique est constante également. On peut aussi l'interpréter avec la conservation du moment cinétique,

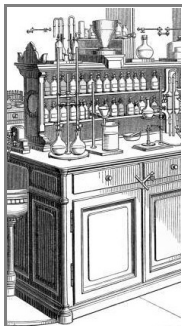
$$\vec{L} = mR^2\dot{\theta}\vec{u}_z = \vec{c\acute{t}e} \quad \text{donc} \quad v = R\dot{\theta} = \text{cte}$$

⇒ **Généralisation** : On admet que l'expression de la troisième loi de Kepler se généralise à une trajectoire elliptique en remplaçant le rayon R par le demi-grand axe a .

Pour un corps en orbite elliptique de demi grand axe a autour d'un astre attracteur de masse m_0 ,

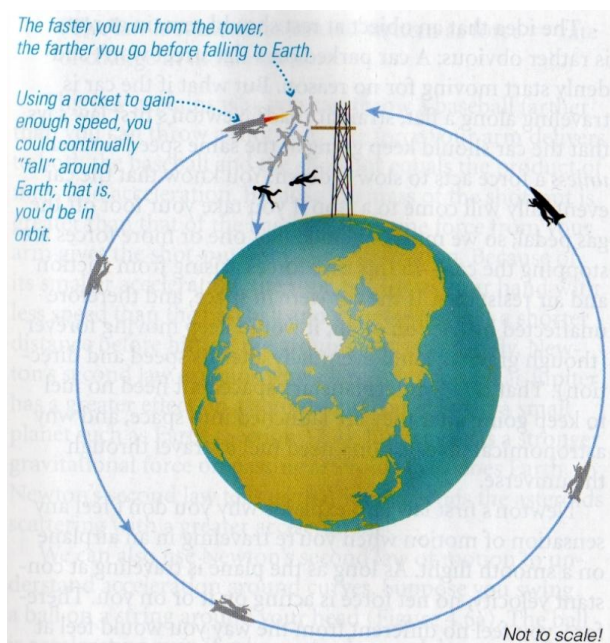
$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{m_0 G}$$

Le résultat ne dépend pas du corps en gravitation.



Un peu d'histoire : La troisième loi de Kepler a servi bien au-delà de la simple description des orbites planétaires. Dès le XVIII^e siècle, les astronomes ont commencé à l'utiliser pour déterminer des distances et masses. Après avoir mesuré la période orbitale et estimé le rayon moyen de l'orbite terrestre, on a pu estimer la masse du Soleil. Cette première estimation précise est généralement attribuée à Isaac Newton, qui, en combinant sa loi de la gravitation universelle avec la loi de Kepler, calcula que le Soleil était environ 330 000 fois plus massif que la Terre. L'existence de petits écarts à la troisième loi de Kepler pour l'orbite d'Uranus permit également de prévoir l'existence de Neptune avant son observation directe, ce qui guida sa découverte par Le Verrier en 1846.

IV.B.2 - Vitesse de satellisation



La **vitesse de satellisation** ou **première vitesse cosmique** est la vitesse à donner à un satellite pour le mettre en orbite circulaire basse autour de la Terre.

Imaginez que vous sautez d'une tour en prenant de l'élan. Plus vous courez vite sur le tremplin, plus vous retombez loin. Si vous courez suffisamment vite (ou que vous vous aidez d'une fusée), vous irez tellement loin que vous retombez continuellement « à côté » de la Terre : vous serez en orbite autour de la Terre.

Ainsi, on peut dire que la Lune et les satellites tombent en permanence sur Terre ... mais à côté, ce qui a inspiré cette phrase à Paul Valéry : « Il fallait être Newton pour s'apercevoir que la Lune tombe alors que tout le monde voit bien qu'elle ne tombe pas. » (1939).

Figure extraite du cours en ligne de Rémy Duperray ... et probablement d'une autre origine.

Pour une orbite basse, on approxime $R \simeq R_T$:

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T}} \simeq 7,9 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} = 28 \cdot 10^3 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$$

Espace 20

Remarque culturelle : L'intérêt des orbites basse est une communication rapide entre le satellite et la Terre, ainsi qu'une bonne résolution des instruments d'observation. Cependant, les frottements atmosphériques rendent les orbites d'altitude inférieure à environ 200 km inutilisables : celle de l'ISS est elliptique, comprise entre des altitudes de 330 et 420 km.

IV.B.3 - Orbite géostationnaire

On appelle **satellite géostationnaire** un satellite artificiel immobile dans le référentiel terrestre, c'est-à-dire constamment à la même altitude au dessus d'un même point de la surface terrestre.

Remarque culturelle : L'orbite géostationnaire a énormément d'applications dans le domaine des télécommunications, bien qu'elle présente l'inconvénient de ne pas desservir directement les pôles et d'être éloignée de la Terre, ce qui implique que le temps de communication est perceptible. Plus de 300 satellites s'y trouvent, elle est donc très encombrée, et directement gérée par l'Union Internationale des Télécommunications, qui dépend de l'ONU. La précision imposée sur la position du satellite est inférieure à 50 km, et l'exploitant doit retirer son satellite de l'orbite lorsqu'il est en fin de vie. La durée de vie des satellites vient principalement des perturbations qui peuvent dévier le satellite de son orbite. Il dispose alors de réserves de carburant pour y revenir, et se trouve en fin de vie lorsque ces réserves sont épuisées.



Schéma à l'échelle montrant la Terre, les principales orbites (orbites basse, moyenne, géostationnaire et de rebut) utilisées par les satellites, les vitesses et les périodes orbitales à différentes altitudes ainsi que la position de quelques satellites ou constellations de satellites remarquables. L'orbite de la Lune est environ 9 fois plus grande que l'orbite géostationnaire.

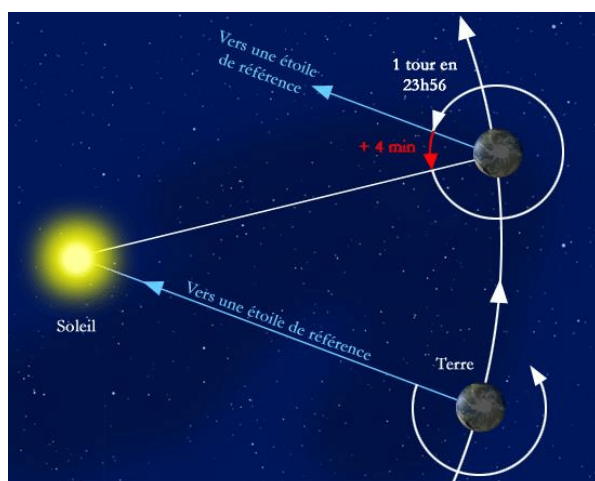
Application 5 : Orbite géostationnaire

- 1 - Montrer que le plan de l'orbite géostationnaire coïncide nécessairement avec le plan de l'équateur.
- 2 - Déterminer la période du mouvement géostationnaire dans le référentiel géocentrique.
- 3 - Montrer que l'orbite géostationnaire est nécessairement circulaire.
- 4 - Déterminer son rayon, et l'altitude d'un satellite géostationnaire par rapport à la Terre.

☹☹☹ **Attention !** Comme on s'intéresse à des mouvements où la rotation de la Terre n'est pas négligeable, le référentiel terrestre n'est pas galiléen : le mouvement d'un satellite géostationnaire s'étudie dans le référentiel géocentrique.

Remarque : On se rend compte d'un problème rien qu'en essayant d'écrire le PFD dans le référentiel terrestre : le satellite serait immobile mais soumis à une unique force non nulle.

Remarque culturelle :



Un jour sidéral définit la période de rotation propre de la Terre, qu'il ne faut pas confondre avec un jour solaire : au bout de 24 heures (jour solaire) la Terre est revenue face au Soleil, mais comme elle a avancé sur son orbite alors elle a parcouru un peu plus d'un tour. Un jour sidéral ne dure que 23h56.

Mis bout à bout, ces décalages font faire à la Terre un tour supplémentaire sur elle-même en un an : une année compte 365 jours solaires ... mais 366 jours sidéraux.

Un **satellite géostationnaire** est fixe dans le référentiel terrestre.

Dans le référentiel géocentrique, l'orbite géostationnaire est circulaire dans le plan de l'équateur, à l'altitude $h \sim 36 \cdot 10^3$ km, parcourue à vitesse constante avec une période $T \sim 24$ heures.

IV.C - Énergie mécanique et caractéristiques de l'orbite

IV.C.1 - Cas particulier d'une orbite circulaire

L'énergie mécanique en orbite circulaire de rayon R s'écrit

$$E_m = -\mathcal{G} \frac{m_0 m}{2R}$$

où m_0 est la masse de l'astre attracteur et m celle de l'astre en orbite.

Remarque : $E_m < 0$ car il s'agit d'un état lié.

Démonstration :

$$\begin{cases} E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m \times \frac{m_0 \mathcal{G}}{R} \\ E_p = -\mathcal{G} \frac{m_0 m}{R} \end{cases} \quad \text{d'où} \quad E_m = -\mathcal{G} \frac{m_0 m}{2R}$$

Espace 21

IV.C.2 - Cas général d'une orbite elliptique

L'énergie mécanique en orbite elliptique de demi grand axe a s'écrit

$$E_m = -\mathcal{G} \frac{m_0 m}{2a}$$

où m_0 est la masse de l'astre attracteur et m celle de l'astre en orbite.

Démonstration : Plus subtil cette fois-ci, car ni E_c ni E_p ne sont des constantes du mouvement.

Déterminons en fonction de E_m les valeurs extrêmes du rayon, pour lesquelles $\dot{r} = 0$ et donc $E_m = E_{p,\text{eff}}(r)$:

$$E_m = \frac{1}{2}m \frac{C^2}{r^2} - \mathcal{G} \frac{m_0 m}{r} \quad \text{soit} \quad E_m r^2 + \mathcal{G} m_0 m r - m \frac{C^2}{2} = 0$$

En notant Δ le discriminant de cette équation (que l'on n'a pas besoin de calculer!), ses solutions s'écrivent

$$r_{\text{max/min}} = \frac{-\mathcal{G} m_0 m \pm \sqrt{\Delta}}{2E_m}$$

d'où on déduit

$$2a = r_{\text{max}} + r_{\text{min}} = -\frac{\mathcal{G} m_0 m}{E_m} > 0$$

d'où le résultat.

Espace 22

Correction des applications de cours

Application 2 : Énergie potentielle effective avec ressort

1 La force de rappel du ressort s'écrit en coordonnées cylindriques de centre O

$$\vec{F}_r = -k(r - \ell_0) \vec{e}_r$$

et elle dérive de l'énergie potentielle élastique

$$E_{pe}(r) = \frac{1}{2}k(r - \ell_0)^2$$

On en déduit l'énergie potentielle effective,

$$E_{p,eff} = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} + \frac{1}{2}k(r - \ell_0)^2.$$

Or la constante des aires est fixée par les CI et vaut $C = r^2\dot{\theta} = r_0^2\omega_0$, d'où

$$E_{p,eff} = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} + \frac{1}{2}k(r - \ell_0)^2.$$

On en déduit le tracé de la figure 9.

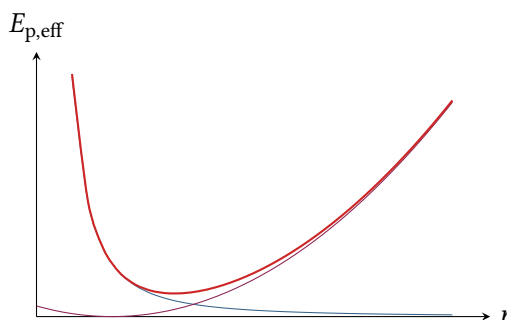


Figure 9 – Énergie potentielle effective avec un ressort.

2 Pour que le mouvement soit circulaire, il faut que l'énergie mécanique soit telle qu'une seule valeur de r est accessible : c'est possible si les CI apportent une énergie mécanique $E_m = \min(E_{p,eff})$... mais le rayon n'est pas quelconque, et il faut donc que la condition initiale « tombe bien » (notamment sur la direction du vecteur vitesse). Le mouvement ne peut pas être divergent, car $E_{p,eff}(r) \rightarrow +\infty$ pour $r \rightarrow +\infty$, donc quelle que soit la condition initiale $E_m < E_{p,eff}(+\infty)$.

Application 3 : Vitesse de libération

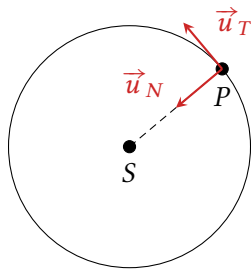
La fusée décolle à une distance $r = R_T$ du centre de la Terre, avec une vitesse v_0 . Pour que son énergie mécanique soit nulle, il faut avoir

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \mathcal{G}\frac{M_T m}{R_T} = 0 \quad \text{soit} \quad v_0 = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}M_T}{R_T}} = 11,2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

Application 4 : Orbite circulaire

1 **Système** : planète P de masse m , ayant une trajectoire circulaire autour du Soleil S de masse m_0 . Le raisonnement se généralise sans peine à un satellite autour de la Terre.

Référentiel : héliocentrique, aussi appelé référentiel de Copernic. Défini par une origine au centre du Soleil et trois axes pointant vers trois étoiles fixes, il est galiléen en excellente approximation.



Repérage : on pourrait travailler en coordonnées polaires, mais sur une trajectoire supposée circulaire le repère de Frénet est plus efficace.

$$\vec{v} = v \vec{u}_T \quad \text{et} \quad \vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{u}_T + \frac{v^2}{R} \vec{u}_N$$

Bilan des forces : uniquement la force gravitationnelle.

$$\vec{F} = +\mathcal{G} \frac{m_0 m}{R^2} \vec{u}_N$$

Attention au signe dans le repère de Frénet.

PFD :

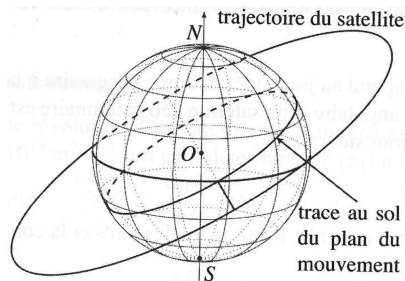
$$\begin{cases} m \frac{dv}{dt} = 0 \\ m \frac{v^2}{R} = \mathcal{G} \frac{m_0 m}{R^2} \end{cases} \quad \text{d'où} \quad v = \sqrt{\frac{m_0 \mathcal{G}}{R}}$$

2 Période de rotation :

$$T^2 = \left(\frac{2\pi R}{v} \right)^2 = \frac{4\pi R^2}{m_0 \mathcal{G}} = \frac{4\pi^2}{m_0 \mathcal{G}} R^3$$

Application 5 : Orbite géostationnaire

1 La conservation du moment cinétique a permis de montrer que la trajectoire du satellite est nécessairement plane, dans un plan qui contient le centre de masse de la Terre.



Dunod Tout-en-Un PCSI éd. 2013

Raisonnons maintenant par l'absurde, en supposant que le plan de l'orbite *n'est pas* le plan équatorial. La figure ci-contre montre que la latitude du point au dessus duquel se trouve le satellite varie, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse géostationnaire.

2 La période du mouvement d'un satellite géostationnaire dans le référentiel géocentrique est égale à la période de rotation propre de la Terre, appelée un **jour sidéral** ... qui diffère légèrement d'un jour solaire.

3 La Terre a une vitesse angulaire de rotation propre constante, il faut donc que le satellite parcoure sa trajectoire à vitesse angulaire constante identique. La loi des aires indique que $C = r^2 \dot{\theta} = \text{cte}$ donc $r = \text{cte}$ car $\dot{\theta} = \text{cte}$.

4 D'après la troisième loi de Kepler :

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{m_0 \mathcal{G}} \quad \text{d'où} \quad R = \left(\frac{m_0 \mathcal{G} T^2}{4\pi^2} \right)^{1/3}$$

Comme $T = 1$ jour sidéral, $m_0 = 6,0 \cdot 10^{24}$ kg et $\mathcal{G} = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N · m² · kg⁻², on trouve

$$R = 42\,164 \text{ km} \quad \text{soit} \quad h = R - R_T = 35\,786 \text{ km}.$$