

Forces centrales conservatives

Exercice 1 : Modèle classique de trou noir



- Lois de conservation ;
- Énergie potentielle effective ;
- Vitesse de libération.

- 1 La force de gravitation et l'énergie potentielle dont elle dérive s'écrivent

$$\vec{F} = -G \frac{m_0 m}{r^2} \vec{e}_r \quad \text{et} \quad E_p = -G \frac{m_0 m}{r}.$$

- 2 Voir cours : c'est une conséquence de la conservation du moment cinétique.

- 3 Voir cours : on remplace $\dot{\theta}$ par C/r^2 dans l'expression de l'énergie mécanique, ce qui permet d'identifier l'énergie potentielle effective

$$E_{p,\text{eff}}(r) = \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{G m_0 m}{r}.$$

Attention : c'est une « fausse » énergie potentielle, qui contient un terme issu de l'énergie cinétique. On peut s'en rendre compte en notant la présence de la constante des aires C , qui dépend des conditions initiales.

- 4 Voir cours et figure 1. Le point M peut échapper à l'attraction de l'astre si sa trajectoire est non-bornée pour $r \rightarrow \infty$, c'est-à-dire pour $E_m \geq 0$.

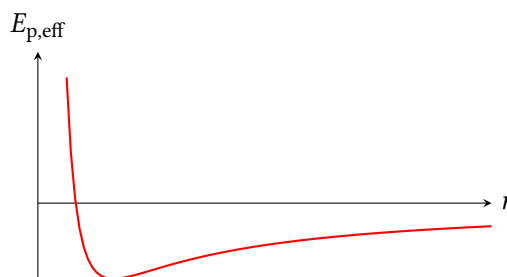


Figure 1 – Profil d'énergie potentielle effective au voisinage d'un astre sphérique.

- 5 Voir cours. On exprime la valeur de l'énergie mécanique à la limite d'un état de diffusion ($E_m = 0$) à la surface de l'astre (distance R , vitesse v_{lib}). On peut le retrouver plus qualitativement en exprimant la conservation de l'énergie mécanique entre la surface de l'astre et une distance infinie en indiquant qu'à la limite la particule s'est infiniment éloignée de l'astre ($r \rightarrow \infty$) mais n'a plus qu'une vitesse nulle ($v = 0$). Ainsi,

$$\frac{1}{2} m v_{\text{lib}}^2 - \frac{G m_0 m}{R} = 0 \quad \text{d'où} \quad v_{\text{lib}} = \sqrt{\frac{2 G m_0}{R}}$$

Attention à bien utiliser l'énergie cinétique et l'énergie potentielle « complètes », et surtout pas l'énergie potentielle effective. La vitesse v_{lib} a une composante orthoradiale, et la constante des aires ne doit pas rester dans le résultat.

- 6 Par définition du rayon de Schwarzschild, si l'astre a pour rayon R_S alors sa vitesse de libération est égale à c . On en conclut que l'astre est un trou noir si

$$R < R_S = \frac{2Gm_0}{c^2}$$

- 7 Numériquement,

$$R_{S,S} = 3,0 \text{ km} \quad \text{et} \quad R_{S,T} = 9,0 \text{ mm}$$

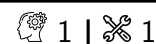
ce qui donne en termes de densité

$$\rho_S = 7,7 \cdot 10^{19} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \quad \text{et} \quad \rho_S = 8,5 \cdot 10^{30} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}.$$

C'est phénoménal : imaginez toute la masse de la Terre concentrée dans une balle de babyfoot ou de ping-pong !

- 8 Une première contradiction consiste à généraliser des résultats de mécanique classique à des vitesses égales à la vitesse de la lumière, qui se rapportent donc au **domaine de la relativité**. La seconde contradiction est la généralisation de résultats de gravitation, qui s'appliquent donc aux particules massives, à la lumière, alors qu'on sait que **les photons sont sans masse**.

Exercice 2 : Comète de Halley



- Loi de Kepler ;
- Équation polaire d'une conique.

- 1 Voir figure 2.

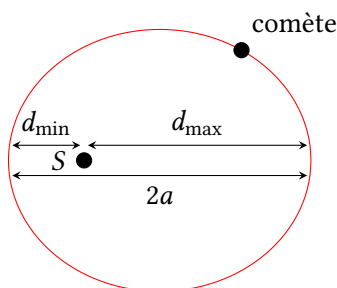


Figure 2 – Schéma de la trajectoire de la comète de Halley. Le Soleil S est un des foyers de l'ellipse. On représente en outre les distances minimale $d_{\min}$ et maximale $d_{\max}$ de la comète au Soleil, ainsi que le grand axe $2a$ de l'ellipse.

- 2 La troisième loi de Kepler permet de déterminer le demi-grand axe a , puisque

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{m_S G} \quad \text{d'où} \quad a = \left(\frac{T^2 m_S G}{4\pi^2} \right)^{1/3}.$$

Or d'après la figure

$$d_{\max} + d_{\min} = 2a$$

d'où on déduit

$$d_{\max} = 2 \left(\frac{T^2 m_S G}{4\pi^2} \right)^{1/3} - d_{\min} = 5,3 \cdot 10^{12} \text{ m} = 1,1 \cdot 10^2 \text{ u.a.}$$

- 3 D'après le schéma,

$$d_{\max} = r(0) = \frac{p}{1-e} \quad \text{et} \quad d_{\min} = r(\pi) = \frac{p}{1+e}$$

d'où on déduit

$$\frac{d_{\min}}{d_{\max}} = \frac{1-e}{1+e} \quad \text{soit} \quad e = \frac{1 - \frac{d_{\min}}{d_{\max}}}{1 + \frac{d_{\min}}{d_{\max}}} \quad \text{donc} \quad e = \frac{d_{\max} - d_{\min}}{d_{\max} + d_{\min}} = 0,97$$

et de même

$$p = d_{\min}(1+e) = 1,1 \text{ u.a.}$$

Exercice 3 : Satellite COBE



- Lois de Kepler;
- Énergie mécanique.

L'intérêt principal de l'exercice consisterait à refaire les démonstrations, qui sont dans votre cours : je vous laisse vous y reporter et je me limite ici à rappeler les résultats.

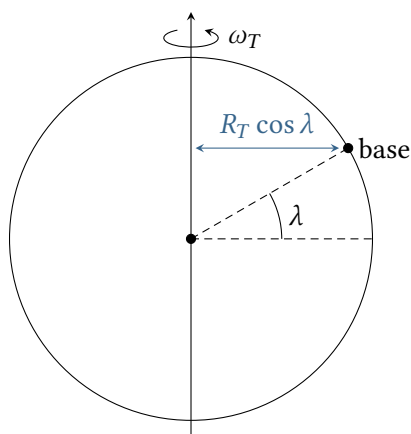
- 1 En utilisant la troisième loi de Kepler pour une orbite circulaire,

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2(R_T + h)^3}{M_T \mathcal{G}}} = 1 \text{ h } 43 \text{ min.}$$

- 2 L'énergie mécanique du satellite en orbite circulaire dans le référentiel géocentrique vaut

$$E_m = -\frac{\mathcal{G}mM_T}{2(R_T + h)} = -62,1 \text{ GJ.}$$

Trouver $E_m < 0$ est logique puisque le satellite est dans un état lié.



Pour que le calcul ait un sens, l'énergie mécanique du satellite au sol doit elle aussi être calculée dans le référentiel géocentrique. Le satellite a alors un mouvement circulaire uniforme de rayon $R_T \cos \lambda$ et de vitesse angulaire

$$\omega_T = \frac{2\pi}{23 \text{ h } 56 \text{ min}} = 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

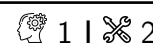
ce qui donne une énergie mécanique

$$E_m = \frac{1}{2}m(R_T \cos \lambda \omega_T)^2 - \frac{\mathcal{G}mM_T}{R_T} = -141,9 \text{ GJ.}$$

On en déduit qu'il a fallu fournir au satellite

$$\Delta E_m = 79,8 \text{ GJ.}$$

Exercice 4 : Constante des aires



- PFD en coordonnées polaires.

- Système : point matériel M de masse m ;
- Référentiel : peu importe car on se place dans un cas général, il faut seulement qu'il soit galiléen et que le centre de force soit un point fixe dans ce référentiel;

- Bilan des forces : M n'est soumis qu'à une force centrale $\vec{F} = F_r(r) \vec{e}_r$ dans un repérage polaire de centre le centre de force.
- Loi de la quantité de mouvement :

$$m \vec{a} = \vec{F}$$

ce qui donne en termes de composantes

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F_r \\ m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0 \end{cases}$$

Considérons la projection sur $\vec{u}_\theta$ en la multipliant par $\dot{r}$ comme indiqué par l'énoncé,

$$2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = 0$$

On identifie cette expression à la forme

$$u'v + uv' = 0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} u = r^2 \\ v = \dot{\theta} \end{cases}$$

Ainsi, en procédant à l'intégration, on trouve

$$uv = \text{cte} \quad \text{soit} \quad \boxed{C = r^2 \dot{\theta} = \text{cte.}}$$

Exercice 5 : Orbite de transfert de Hohmann



- Lois de conservation ;
- Orbite circulaire et elliptique ;
- Énergie mécanique.

1 Étudions dans le référentiel géocentrique le mouvement du satellite sur une orbite circulaire de rayon r . Il n'est soumis qu'à la force de gravitation exercée par la Terre de masse m_0 . D'après le PFD appliqué dans la base de Frénet,

$$\frac{v^2}{r} = \mathcal{G} \frac{m_0}{r^2} \quad \text{d'où} \quad \boxed{v = \sqrt{\frac{m_0 \mathcal{G}}{r}}}.$$

On en déduit

$$E_m = \frac{1}{2} m \frac{m_0 \mathcal{G}}{r} - \mathcal{G} \frac{m_0 m}{r} \quad \text{soit} \quad \boxed{E_m = -\mathcal{G} \frac{m_0 m}{2r}}.$$

— Trouver $E_m < 0$ est normal car le satellite est dans un état lié.

2 On constate sur la figure que le grand-axe de l'orbite de transfert vaut

$$2a = r_1 + r_2.$$

Ainsi,

$$E_{m1} = -\mathcal{G} \frac{m_0 m}{2r_1} \quad E'_m = -\mathcal{G} \frac{m_0 m}{r_1 + r_2} \quad \boxed{E_{m2} = -\mathcal{G} \frac{m_0 m}{2r_2}}.$$

Le travail fourni par le moteur pour le passage sur l'orbite de transfert est égale à la différence d'énergie mécanique pour un rayon r_1 ,

$$W_1 = E'_m - E_{m1} = -\mathcal{G} \frac{m_0 m}{r_1 + r_2} + \mathcal{G} \frac{m_0 m}{2r_1} = \mathcal{G} m_0 m \left(\frac{1}{2r_1} - \frac{1}{r_1 + r_2} \right)$$

et finalement

$$\boxed{W_1 = \frac{\mathcal{G} m_0 m (r_2 - r_1)}{2r_1 (r_1 + r_2)}}.$$

De même,

$$W_2 = E_{m2} - E'_m = -\mathcal{G} \frac{m_0 m}{2r_2} + \mathcal{G} \frac{m_0 m}{r_1 + r_2} = \mathcal{G} m_0 m \left(\frac{1}{r_1 + r_2} - \frac{1}{2r_2} \right)$$

et finalement

$$W_2 = \frac{\mathcal{G} m_0 m (r_2 - r_1)}{2r_2(r_1 + r_2)}.$$

3 La variation d'énergie mécanique se fait à $r = r_1$, donc sans variation d'énergie potentielle, mais uniquement en modifiant l'énergie cinétique. Ainsi,

$$W_1 = \frac{1}{2} m v_1'^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 \quad \text{soit} \quad \frac{\mathcal{G} m_0 m (r_2 - r_1)}{2r_1(r_1 + r_2)} = \frac{1}{2} m v_1'^2 - \mathcal{G} \frac{m_0 m}{2r_1}$$

ce qui donne

$$v_1'^2 = \mathcal{G} m_0 \left(\frac{r_2 - r_1}{r_1(r_1 + r_2)} + \frac{1}{r_1} \right) \quad \text{soit} \quad v_1' = \sqrt{\frac{2r_2}{r_1(r_1 + r_2)} \mathcal{G} m_0}.$$

4 Appliquons le théorème du moment cinétique au satellite, par rapport au centre O de la Terre,

$$\left. \frac{d\vec{L}_O}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = (r \vec{e}_r) \wedge \left(-\mathcal{G} \frac{m_0 m}{r^2} \vec{e}_r \right) = \vec{0} \quad \text{d'où} \quad \vec{L}_O = \text{cte}.$$

Or par définition du moment cinétique, exprimé en coordonnées polaires,

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p} = r \vec{e}_r \wedge m(\dot{r} \vec{e}_r + r\dot{\theta} \vec{e}_\theta) = mr^2 \dot{\theta} \vec{e}_z.$$

La conservation du moment cinétique au cours du mouvement implique donc la conservation de la constante des aires $C = r^2 \dot{\theta}$.

5 Par définition, l'apogée et le périégée correspondent aux positions de rayon extrême, donc en ces points $\dot{r} = 0$ et $\vec{v} = r\dot{\theta} \vec{e}_\theta$. Ainsi, la constante des aires écrite au périégée et à l'apogée donne

$$C = r_1 v_1' = r_2 v_2' \quad \text{d'où} \quad v_2' = \frac{r_1}{r_2} v_1'.$$

Exercice 6 : Incident de satellisation



- Lois de conservation ;
- Orbite circulaire et elliptique.

- **Système** : satellite ;
- **Référentiel** : géocentrique, supposé galiléen ;
- **Repérage** : polaire de centre O

$$\overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r \quad \text{donc} \quad \vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r\dot{\theta} \vec{e}_\theta ;$$

- **Bilan des forces** : uniquement la force gravitationnelle,

$$\vec{F} = -\mathcal{G} \frac{M_T m}{r^2} \vec{e}_r \quad \rightsquigarrow \quad E_p = -\mathcal{G} \frac{M_T m}{r}.$$

1 Pour que le satellite soit en orbite circulaire de rayon r_0 , il doit avoir une vitesse

$$\vec{v} = \sqrt{\frac{M_T \mathcal{G}}{r_0}} \vec{e}_\theta,$$

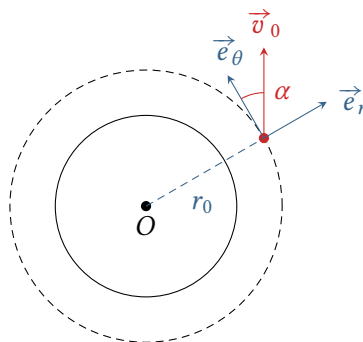


Figure 3 – Conditions initiales communiquées au satellite.

mais compte tenu de l'incident sa vitesse initiale s'écrit

$$\vec{v} = \sqrt{\frac{M_T \mathcal{G}}{r_0}} (\sin \alpha \vec{e}_r + \cos \alpha \vec{e}_\theta)$$

2 L'énergie mécanique du satellite n'est pas modifiée par l'incident par rapport à ce qui était prévu, elle reste donc négative. Le satellite est toujours dans un état lié, mais sa trajectoire n'est pas circulaire, elle est elliptique. L'énergie mécanique pour une trajectoire elliptique est reliée au demi-grand axe a de la trajectoire par

$$E_m \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ellipse}}}{=} -\frac{\mathcal{G}M_T m}{2a}.$$

Si l'orbite avait été circulaire, l'énergie mécanique se serait écrite

$$E_m \underset{\substack{\uparrow \\ \text{circulaire}}}{=} -\frac{\mathcal{G}M_T m}{2r_0}.$$

On en déduit donc

$$a = r_0.$$

Ce résultat peut sembler en contradiction avec le schéma de la figure 3 ... mais il ne faut pas oublier que si le centre de la Terre aurait dû être le centre de l'orbite circulaire, il n'est qu'un des foyers de l'ellipse, et non pas son centre. Ainsi, le satellite peut bien s'éloigner du centre de la Terre d'une distance supérieure à r_0 comme le suggère le schéma.

3 L'apogée et le périégée correspondent aux points extrêmes de la trajectoire, pour lesquels $\dot{r} = 0$. L'énergie mécanique sur la trajectoire elliptique s'écrit alors

$$E_m \underset{\substack{\uparrow \\ \text{extrême}}}{=} \frac{1}{2} m (\cancel{\dot{r}^2} + r^2 \dot{\theta}^2) - \mathcal{G} \frac{M_T m}{r} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CI}}}{=} -\frac{\mathcal{G}M_T m}{2r_0}.$$

La vitesse angulaire $\dot{\theta}$ est reliée au rayon instantané r par la constante des aires. La conservation du moment cinétique entre la position initiale et une position quelconque sur la trajectoire s'écrit

$$\begin{aligned} \vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m \vec{v} & \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CI}}}{=} m(r_0 \vec{e}_r) \wedge v_0 (\sin \alpha \vec{e}_r + \cos \alpha \vec{e}_\theta) = m r_0 v_0 \cos \alpha \vec{e}_z \\ & \underset{\substack{\uparrow \\ \text{qcq}}}{=} m(r \vec{e}_r) \wedge (\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta) = m r^2 \dot{\theta} \vec{e}_z \end{aligned}$$

d'où on déduit

$$C = r^2 \dot{\theta} = r_0 v_0 \cos \alpha \quad \text{soit} \quad \dot{\theta} = \frac{C}{r^2} = \frac{r_0 v_0 \cos \alpha}{r^2}.$$

Par conséquent, l'équation à résoudre devient

$$\frac{1}{2}m \frac{r_0^2 v_0^2 \cos^2 \alpha}{r^2} - \mathcal{G} \frac{M_T m}{r} = -\frac{\mathcal{G} M_T m}{2r_0}.$$

De nombreuses simplifications sont possibles grâce à l'expression de v_0

$$\frac{\mathcal{G} M_T m r_0 \cos^2 \alpha}{2r^2} - \frac{\mathcal{G} M_T m}{r} = -\frac{\mathcal{G} M_T m}{2r_0} \quad \text{soit} \quad \frac{r_0 \cos^2 \alpha}{2r^2} - \frac{1}{r} + \frac{1}{2r_0} = 0$$

En multipliant par $2r_0 r^2$, on aboutit à une équation polynômiale du second degré

$$r^2 - 2rr_0 + r_0^2 \cos^2 \alpha = 0$$

dont les racines sont

$$r_{\pm} = \frac{2r_0 \pm \sqrt{4r_0^2 - 4r_0^2 \cos^2 \alpha}}{2} = r_0 (1 \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}) \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} r_A = r_0(1 + \sin \alpha) \\ r_P = r_0(1 - \sin \alpha) \end{cases}$$

4 Le satellite s'écrase si sa trajectoire théorique pénètre à l'intérieur de la Terre (et en toute rigueur de l'atmosphère, dont on négligera l'épaisseur ici), c'est-à-dire si

$$r_0(1 - \sin \alpha) < R_T \quad \text{soit} \quad \sin \alpha > 1 - \frac{R_T}{r_0}.$$

Exercice 7 : Frottements sur un satellite en orbite basse

oral banque PT | 3 | 2



- Conservation du moment cinétique ;
- Orbite circulaire ;
- Énergie mécanique.

Travaillons en coordonnées cylindriques dont l'origine O se trouve au centre de la Terre et d'axe (Oz) normal au plan de la trajectoire.

1 La force de gravitation subie par le satellite vaut

$$\vec{F} = -G \frac{mM}{r^2} \vec{e}_r$$

donc son moment par rapport au centre O est

$$\vec{M}_O = \vec{OS} \wedge \vec{F} = \vec{0}$$

car $\vec{OS} = r \vec{e}_r$ et $\vec{F}$ sont colinéaires. D'après le théorème du moment cinétique appliqué au satellite S dans le référentiel géocentrique supposé galiléen,

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O = \vec{0} \quad \text{d'où} \quad \vec{L}_O = \text{cte}.$$

Exprimons $\vec{L}_O$ dans la base cylindrique :

$$\vec{L}_O = \vec{OS} \wedge m \vec{v} = r \vec{e}_r \wedge r \omega \vec{e}_\theta = r^2 \omega \vec{e}_z.$$

La conservation du moment cinétique permet donc de conclure que

$$C = r^2 \omega = \text{cte}.$$

La vitesse en orbite circulaire s'écrit

$$v = r \omega = \frac{C}{r} = \text{cte}$$

car $r = \text{cte}$. Le mouvement est donc effectivement **uniforme**.

2 Appliquons le théorème de la résultante cinétique au satellite, en orbite circulaire uniforme autour de la Terre :

$$m \vec{a} = \vec{F} \quad \text{soit} \quad -m \frac{v^2}{r} \vec{e}_r = -G \frac{mM}{r^2} \vec{e}_r.$$

Vous devez connaître et pouvez directement utiliser l'expression $\vec{a} = -v^2/r \vec{e}_r$ pour un mouvement circulaire uniforme ... mais attention, elle ne se généralise à aucun autre mouvement !

On en déduit directement

$$v = \sqrt{\frac{MG}{r}}.$$

Pour l'orbite d'altitude $h = 1 \cdot 10^3$ km, on a

$$v = \sqrt{\frac{MG}{R+h}} = 7,4 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 27 \cdot 10^3 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}.$$

3 L'énergie potentielle du satellite est purement gravitationnelle et vaut

$$E_p = -G \frac{mM}{r}.$$

L'énergie cinétique est

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \quad \text{soit} \quad E_c = \frac{mMG}{2r}.$$

L'énergie mécanique vaut donc

$$E_m = E_c + E_p = \frac{mMG}{2r} - G \frac{mM}{r} \quad \text{soit} \quad E_m = -\frac{mMG}{2r}.$$

4 La puissance de la force de frottements $\vec{f}$ est

$$\mathcal{P}_f = \vec{f} \cdot \vec{v} = -\lambda mv^3 = -\lambda m \left(\frac{MG}{r} \right)^{3/2}.$$

D'après le théorème de l'énergie mécanique, on a donc

$$\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}_f \quad \text{soit} \quad -\frac{mMG}{2} \times \frac{-1}{r^2} \frac{dr}{dt} = -\lambda m \left(\frac{MG}{r} \right) \sqrt{\frac{MG}{r}},$$

ce qui se simplifie en

$$\frac{dr}{dt} = -2\lambda \sqrt{MG} \sqrt{r}.$$

5 On constate sur l'équation différentielle précédente que dr/dt est toujours négatif. Le rayon de l'orbite diminue donc sous l'effet des frottements. En revanche, d'après la question 2, si le rayon de l'orbite diminue alors la vitesse du satellite augmente. Ainsi, **les frottements ont pour effet d'augmenter la vitesse du satellite**, ce qui est innattendu.

6 En séparant les variables et en intégrant, on obtient

$$\int_{R+h}^r \frac{dr}{2\sqrt{r}} = -\lambda \sqrt{MG} \int_0^t dt \quad \text{d'où} \quad \sqrt{r(t)} - \sqrt{R+h} = -\lambda t \sqrt{MG}$$

soit finalement

$$r(t) = \left(\sqrt{R+h} - \lambda t \sqrt{MG} \right)^2.$$

L'altitude du satellite diminue de $\Delta h = 2$ m pendant la durée $\Delta t = 1$ jour $= 8,6 \cdot 10^4$ s. Ainsi,

$$\sqrt{R+h-\Delta h} - \sqrt{R+h} = -\lambda \Delta t \sqrt{MG}$$

Comme $\Delta h \ll R + h$, un développement limité est justifié et donne

$$\begin{aligned}\sqrt{R+h} \left(1 - \frac{\Delta h}{R+h}\right)^{1/2} - \sqrt{R+h} &= -\lambda \Delta t \sqrt{MG} \\ \sqrt{R+h} \left(1 - \frac{\Delta h}{2(R+h)}\right) - \sqrt{R+h} &= -\lambda \Delta t \sqrt{MG} \\ \frac{\Delta h}{2\sqrt{R+h}} &= \lambda \Delta t \sqrt{MG}\end{aligned}$$

d'où on déduit

$$\lambda = \frac{\Delta h}{2 \Delta t \sqrt{MG(R+h)}} = 2,1 \cdot 10^{-16} \text{ m}^{-1}.$$

Pour aboutir à ce résultat, il est également possible de raisonner directement sur l'équation différentielle en approximant que sur un jour la dérivée temporelle est quasi-constante et vaut

$$\frac{dr}{dt} \simeq -\frac{\Delta h}{\Delta t} = -2\lambda \sqrt{MG} \sqrt{R+h}$$

ce qui conduit bien au même résultat.

Exercice 8 : Approche d'un astéroïde



- Lois de conservation ;
- État de diffusion.

- **Système** : astéroïde ;
- **Référentiel** : géocentrique, considéré galiléen ;
- **Repérage** : polaire de centre O ;
- **Bilan des forces** : l'astéroïde n'est soumis qu'à la force gravitationnelle exercée par la Terre de masse m_T ,

$$\vec{F} = -\mathcal{G} \frac{mm_T}{r^2} \vec{e}_r \quad \leadsto \quad E_p = -\mathcal{G} \frac{mm_T}{r}.$$

1 L'énergie mécanique de l'astéroïde est une constante du mouvement. En l'exprimant à sa position initiale (distance infinie, vitesse v_0) et au point P (distance r_P , vitesse v_P) on obtient la relation voulue :

$$E_m \underset{\text{CI}}{=} \underset{\text{CI}}{\frac{1}{2} m v_0^2} + 0 = \underset{\text{périgée}}{\frac{1}{2} m v_P^2} - \mathcal{G} \frac{m_T m}{r_P}$$

2 Le moment cinétique de l'astéroïde est également une constante du mouvement. Notons H le projeté orthogonal de O sur la droite Δ dirigée par le vecteur $\vec{v}_0$.

$$\begin{aligned}\vec{L}_O &= \vec{OM} \wedge m \vec{v} \\ &= m(\vec{OH} + \vec{HM}_\infty) \wedge \vec{v}_0 = -b v_0 \vec{e}_z \\ &\underset{\text{CI}}{=} m \vec{OP} \wedge \vec{v}_P = -r_P v_P \vec{e}_z \\ &\underset{\text{périgée}}{=}\end{aligned}$$

La deuxième relation cherchée s'écrit donc

$$r_P v_P = b v_0.$$

3 Remplaçons $v_P = bv_0/r_P$ dans l'expression de l'énergie,

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m\frac{b^2v_0^2}{r_P^2} - \mathcal{G}\frac{m_Tm}{r_P} \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{2}mv_0^2r_P^2 + \mathcal{G}m_T r_P - \frac{1}{2}b^2v_0^2 = 0$$

Cette équation se résout en

$$r_{\pm} = \frac{-m_T\mathcal{G} \pm \sqrt{\mathcal{G}^2m_T^2 + v_0^4b^2}}{v_0^2}$$

mais seule la solution positive est pertinente physiquement, soit

$$r_P = \frac{-m_T\mathcal{G} + \sqrt{\mathcal{G}^2m_T^2 + v_0^4b^2}}{v_0^2}$$

4 Numériquement, $r_P = 72 \cdot 10^3 \text{ km} > R_T + R_{\text{atm}}$ donc pas d'étoile filante.

Exercice 9 : En chute libre vers le Soleil

 3 |  1



► Lois de Kepler.

Notons R_0 et T_0 les caractéristiques de l'orbite terrestre. D'après la première loi de Kepler, la trajectoire du système est une ellipse ... mais comme la trajectoire est évidemment rectiligne, cette ellipse est dégénérée et son demi petit-axe est nul. D'une part, le Soleil est l'un des foyers de l'ellipse, mais il est clair également qu'il se situe sur la trajectoire : il est donc une des extrémités de l'ellipse. D'autre part, la position initiale de la particule constitue l'autre extrémité de l'ellipse car la vitesse y est nulle, ce qui implique en particulier $\dot{r} = 0$. En conclusion, la trajectoire rectiligne du système s'identifie à une ellipse de demi grand-axe $R_0/2$ parcourue avec une période 2τ égale au double de la durée de la chute (la chute ne parcourt que la moitié de l'ellipse). Ainsi, d'après la troisième loi de Kepler,

$$\frac{T_0^2}{R_0^3} = \frac{4\tau^2}{R_0^3/8} \quad \text{d'où} \quad \boxed{T = \frac{T_0}{4\sqrt{2}}}.$$

| Intégrer deux fois le PFD est aussi possible ... mais terrible ☺

Exercice 10 : Interaction forte

oral ENS MP |  3 |  3



► Énergie potentielle effective.

• **Condition d'existence d'une orbite circulaire, première méthode** : supposons le nucléon en orbite circulaire $r = \text{cte}$. Alors, d'après le PFD appliqué dans le repère de Frénet,

$$m\frac{v^2}{r} = k\frac{e^{-r/a}}{r^2}.$$

On en déduit qu'une orbite circulaire peut exister pour tout r , à condition d'avoir $k > 0$ et que la vitesse du nucléon soit orthoradiale (dirigée selon le vecteur $\vec{e}_\theta$ de la base polaire) et ait pour norme

$$v = \sqrt{\frac{k}{mr}} e^{-r/a}.$$

Cette méthode est rapide et efficace ... mais ne permet pas d'étudier la stabilité.

- **Condition d'existence d'une orbite circulaire, seconde méthode** : raisonnons sur l'énergie potentielle effective. La force $\vec{f}$ est centrale et dérive d'une énergie potentielle E_p telle que

$$\vec{F} = -\frac{dE_p}{dr} \vec{e}_r \quad \text{soit} \quad \frac{dE_p}{dr} = \frac{k e^{-r/a}}{r^2} \quad \text{donc} \quad E_p(r) = k \int \frac{e^{-r/a}}{r^2} dr.$$

Nous verrons par la suite qu'il n'est pas nécessaire de calculer explicitement l'intégrale (qui ne peut d'ailleurs pas s'exprimer en termes de fonctions usuelles seulement). L'énergie mécanique, exprimée en toute généralité, s'écrit donc

$$E_m = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + E_p(r)$$

et en utilisant la constante des aires $C = r^2 \dot{\theta}$ (qui est bien une constante) on identifie

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2}}_{=E_{p,\text{eff}}(r)} + E_p(r).$$

Une orbite circulaire correspond à un extrêmu de l'énergie potentielle effective :

$$\frac{dE_{p,\text{eff}}}{dr} = -\frac{mC^2}{r^3} + \frac{dE_p}{dr} = -\frac{mC^2}{r^3} + k \frac{e^{-r/a}}{r^2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{extrêmu}}}{=} 0.$$

Par ailleurs, dans le cas d'une orbite circulaire, $C = r^2 \dot{\theta} = rv$, d'où

$$-\frac{mv^2}{r} + k \frac{e^{-r/a}}{r^2} = 0,$$

ce qui nous ramène à la même équation qu'avec la méthode précédente.

- **Stabilité de l'orbite** : par analogie avec les mouvements conservatifs unidimensionnels, on comprend qu'une orbite de rayon r est stable uniquement pour un minimum de l'énergie potentielle effective. Calculons donc la dérivée seconde de l'énergie potentielle effective,

$$\frac{d^2 E_{p,\text{eff}}}{dr^2} = +3m \frac{C^2}{r^4} - \frac{k}{a} \frac{e^{-r/a}}{r^2} - 2k \frac{e^{-r/a}}{r^3}$$

Or sur une orbite circulaire

$$C^2 = r^2 v^2 = \frac{kr}{m} e^{-r/a}$$

ce qui conduit à

$$\frac{d^2 E_{p,\text{eff}}}{dr^2} = 3k \frac{e^{-r/a}}{r^3} - \frac{k}{a} \frac{e^{-r/a}}{r^2} - 2k \frac{e^{-r/a}}{r^3} = k \frac{e^{-r/a}}{r^3} \left(1 - \frac{r}{a} \right).$$

On constate que la dérivée seconde ne peut être négative (et donc la trajectoire stable) que si $r < a$.

- **Conclusion** : une orbite circulaire peut exister pour tout r à condition que la vitesse soit correctement choisie, en revanche elle n'est stable pour $r < a$.

On peut par exemple interpréter ainsi le fait qu'il n'existe qu'un petit nombre de noyaux, trop de nucléons conduisant à un rayon du noyau supérieur à a ... mais il ne s'agit que d'une interprétation classique d'un phénomène purement quantique, autrement dit d'une interprétation qualitative.

Exercice 11 : Atmosphère de Titan

oral CCINP PSI | 3 | 2



► Problème ouvert.

Correction à rédiger.

Idee : comparer la vitesse de libération à la vitesse quadratique moyenne (cf. cours d'intro à la thermo).