

Forces centrales conservatives

-  Difficulté d'analyse et compréhension, initiative requise ;
-  Difficulté technique et calculatoire ;
-  Exercice classique et/ou important.

Flasher ou cliquer
pour accéder
au corrigé



Se préparer

Applications de cours

Ces applications de cours sont des briques élémentaires des raisonnements à mener dans les exercices : les maîtriser est incontournable. Elles sont toutes traitées de manière exhaustive dans le cours.

M8.1 - Établir la conservation du moment cinétique dans un champ de force central conservatif et ses conséquences : planéité du mouvement et constante des aires. Énoncer la loi des aires (sans démonstration).

M8.2 - Dans le cas de la gravitation, construire l'énergie potentielle effective et analyser la nature du mouvement en fonction de l'énergie mécanique. Déterminer la vitesse de libération du champ gravitationnel terrestre.

M8.3 - Établir l'expression de la vitesse en orbite circulaire. En déduire la troisième loi de Kepler et la généraliser (sans démonstration) à une orbite elliptique.

M8.4 - Définir l'orbite géostationnaire et déterminer ses caractéristiques : plan de l'orbite, période du mouvement, nature circulaire, rayon. L'expression de la vitesse en orbite circulaire pourra être admise sans démonstration.

M8.5 - Établir l'expression de l'énergie mécanique d'un astre en orbite elliptique.

Exercice 1 : Modèle classique de trou noir

 1 |  1 | 



- Lois de conservation ;
- Énergie potentielle effective ;
- Vitesse de libération.

En 1783, le physicien britannique John Michell eut pour la première fois l'idée de l'existence d'astres dont la gravitation serait si forte que même la lumière ne pourrait s'en échapper. L'idée fut reprise par Pierre-Simon Laplace¹ en 1796, puis oubliée car elle semblait trop abstraite. Elle ressurgit en 1916 dans le cadre de la relativité générale lorsque Karl Schwarzschild vit apparaître un tel objet dans les solutions des équations d'Einstein, que l'on peut voir comme l'analogue relativiste du principe fondamental de la dynamique. Ce concept fut développé par la suite, et la dénomination de trou noir s'est imposé dans les années 1960. On pense aujourd'hui en avoir détecté plus d'une centaine (la liste est sur Wikipédia), mais comme rien ne peut s'échapper d'un trou noir la détection ne peut être qu'indirecte.

Cet exercice propose de calculer l'ordre de grandeur de la taille et de la densité d'un trou noir dans un modèle heuristique de physique newtonienne. Considérons pour cela un point matériel M de masse m à proximité d'un

1. Celui-là même qui a introduit la transformation de Laplace ... et qui a également élaboré une théorie dynamique des marées encore utilisée aujourd'hui pour prévoir les heures de pleine et basse mer.

astre sphérique de masse m_0 , de rayon R et de centre O . Cet astre est supposé suffisamment massif pour que l'on puisse considérer que M n'est soumis qu'à la force gravitationnelle due à l'astre. On étudie le mouvement de M dans le référentiel $\mathcal{R}$ astrocentrique, que l'on suppose galiléen.

1 - Exprimer la force gravitationnelle ressentie par M ainsi que l'énergie potentielle dont elle dérive en la supposant nulle à l'infini. Exprimer l'énergie mécanique de M . Celle-ci se conserve-t-elle ?

2 - Montrer que le mouvement de M est nécessairement plan. M étant alors repéré par ses coordonnées polaires, montrer que $C = r^2\dot{\theta}$ est une constante du mouvement.

3 - Montrer que l'énergie mécanique peut se mettre sous la forme

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p,\text{eff}}(r)$$

en introduisant l'énergie potentielle effective $E_{p,\text{eff}}(r)$ dont on précisera l'expression en fonction de r .

4 - Tracer l'allure de la courbe représentative de $E_{p,\text{eff}}(r)$. À l'aide d'un raisonnement graphique, déterminer pour quelles valeurs de E_m le point M peut échapper à l'attraction de l'astre, c'est-à-dire se trouver dans un état de diffusion.

5 - En déduire la vitesse de libération v_{lib} à la surface de cet astre.

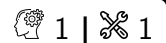
6 - Dans la conception classique de Michell, un trou noir est un astre dont la vitesse de libération est supérieure à $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Calculer le rayon de Schwarzschild R_S de l'astre, c'est-à-dire le rayon maximal qu'il doit avoir pour être un trou noir.

7 - Calculer numériquement R_S pour le Soleil ($M_S = 2,0 \cdot 10^{30} \text{ kg}$) et pour la Terre ($M_T = 6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$). En déduire la densité minimale d'un trou de noir de cette masse.

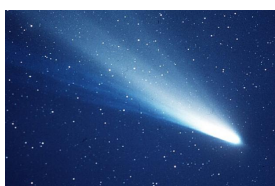
8 - Quelles sont les deux contradictions internes à cette approche ?

Notons toutefois que malgré les deux limites évoquées, le rayon de Schwarzschild donne le bon ordre de grandeur de la taille d'un trou noir de masse m .

Exercice 2 : Comète de Halley



- ▷ Loi de Kepler ;
- ▷ Équation polaire d'une conique.



La comète de Halley est la plus connue. La première mention de son observation date de 611 av. J.-C. en Chine, et on la retrouve tout au long de l'Antiquité et du Moyen-Âge ... évidemment sans savoir qu'il s'agit d'une seule comète. Cette découverte a été formalisée en 1705 par Edmond Halley, qui publia un livre avançant que les observations en 1531, 1607 et 1682 concernaient en fait la même comète. Son prochain passage est prévu en 2061.

On sait aujourd'hui que la comète de Halley suit une trajectoire elliptique de période de révolution autour du Soleil 76 ans, sa distance minimale au Soleil étant de $d_{\text{min}} = 0,59$ unités astronomiques.

Données :

- ▷ une unité astronomique correspond à la distance moyenne Terre-Soleil, soit $1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$;
- ▷ Masse solaire $m_S = 2,0 \cdot 10^{30} \text{ kg}$.

1 - Faire un schéma de la trajectoire indiquant la position du Soleil et d_{min} .

2 - Déduire de la troisième loi de Kepler la plus grande distance au Soleil de la comète.

3 - Une conique est décrite par une équation polaire de la forme

$$r(\theta) = \frac{p}{1 - e \cos \theta}$$

où l'origine du repérage polaire est prise sur un des foyers de la conique. Déterminer le paramètre p et l'excentricité e de la trajectoire de la comète de Halley.

Exercice 3 : Satellite COBE

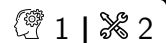
- ▷ Lois de Kepler ;
- ▷ Énergie mécanique.

Le satellite COBE (COsmic Background Explorer) a été lancé en novembre 1989 pour étudier le *fond diffus cosmologique*, et permettre une meilleure compréhension des premiers instants de l'Univers. Pesant 2270 kg, il a été placé sur une orbite circulaire d'altitude 900 km. Le satellite a été envoyé depuis la base de Vandenberg, en Californie, à une latitude de 34°N.

1 - Déterminer la période du satellite sur son orbite.

2 - Calculer le surplus d'énergie qui a été apporté au satellite pour le placer sur son orbite.

Données : $M_T = 6,0 \cdot 10^{24}$ kg et $R_T = 6,4 \cdot 10^6$ m.

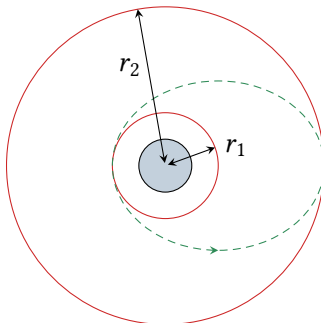
Exercice 4 : Constante des aires

- ▷ PFD en coordonnées polaires.

Nous avons établi en cours l'expression de la constante des aires $C = r^2 \dot{\theta}$ à partir de la conservation du moment cinétique. Retrouver ce résultat à partir d'une projection du PFD.

Exercice 5 : Orbite de transfert de Hohmann

- ▷ Lois de conservation ;
- ▷ Orbite circulaire et elliptique ;
- ▷ Énergie mécanique.



On s'intéresse à la mise en orbite d'un satellite géostationnaire de masse m sur son orbite de rayon $r_2 = 42,2 \cdot 10^3$ km. Dans un premier temps, un lanceur dépose le satellite sur une orbite circulaire provisoire de rayon $r_1 = 7,5 \cdot 10^3$ km. Un moteur lui apporte un surcroît d'énergie pour le faire passer sur une orbite de transfert elliptique, appelée orbite de Hohmann, dont le périégée est à la distance r_1 et l'apogée à la distance r_2 du centre de la Terre. Lorsque le satellite arrive à cet apogée, le moteur est rallumé pour permettre au satellite de passer sur l'orbite finale.

Les durées d'allumage du moteur étant très brèves par rapport à la période orbitale, on considérera les changements de vitesse du satellite instantanés. On notera « 1 » les grandeurs relatives à l'orbite provisoire, « prime » celles relatives à l'orbite de Hohmann et « 2 » celles de l'orbite géostationnaire.

1 - Établir l'expression de la vitesse v du satellite sur l'orbite circulaire de rayon r . En déduire l'expression de l'énergie mécanique du satellite sur cette orbite.

2 - On admet que l'expression se généralise au cas d'une orbite elliptique en remplaçant le rayon par le demi grand-axe de l'ellipse. Donner l'expression de l'énergie mécanique E_{m1} , E'_m et E_{m2} du satellite sur les trois orbites. En déduire le travail W_1 que doit fournir le moteur du satellite pour passer de l'orbite provisoire à l'orbite de transfert puis le travail W_2 pour passer de l'orbite de transfert à l'orbite géostationnaire.

3 - Calculer la vitesse v'_1 du satellite juste après son passage sur l'orbite de transfert.

4 - Montrer que le produit $C = r^2 \dot{\theta}$ est une quantité conservée sur n'importe quelle orbite.

5 - En déduire la vitesse v'_2 à l'apogée de l'orbite de transfert en fonction de v'_1 , r_1 et r_2 .

Exercice 6 : Incident de satellisation

- ▷ Lois de conservation ;
- ▷ Orbite circulaire et elliptique.

Un satellite de masse m est destiné à être placé en orbite circulaire de rayon r_0 autour de la Terre. Pour cela, il est amené à la distance r_0 du centre de la Terre, mais un incident se produit au moment du largage : la vitesse $\vec{v}_0$ qui lui est communiquée a bien la valeur prévue mais est inclinée d'un angle α par rapport à la direction souhaitée.

- 1 - Déterminer toutes les caractéristiques du vecteur $\vec{v}_0$ dans la base polaire.
- 2 - Justifier que la trajectoire du satellite est elliptique et déterminer le demi grand-axe de la trajectoire.
- 3 - Déterminer les distances r_A et r_P par rapport au centre de la Terre à l'apogée et au périégée.
- 4 - À quelle condition sur α le satellite s'écrase-t-il sur Terre ?

Exercice 7 : Frottements sur un satellite en orbite basse

oral banque PT | 3 | 2



- ▷ Conservation du moment cinétique ;
- ▷ Orbite circulaire ;
- ▷ Énergie mécanique.

On étudie le mouvement d'un satellite artificiel S en orbite autour de la Terre dans le référentiel géocentrique, supposé galiléen. On note M la masse de la Terre, $m \ll M$ la masse du satellite et G la constante de gravitation universelle.

Données : $M = 6,0 \cdot 10^{24}$ kg ; rayon terrestre $R = 6,4 \cdot 10^3$ km ; $G = 6,7 \cdot 10^{-11}$ m³ · kg⁻¹ · s⁻².

Dans un premier temps, on néglige les autres interactions que la force de gravitation entre la Terre et le satellite, et on suppose l'orbite circulaire de rayon r parcourue à la vitesse angulaire ω .

- 1 - Montrer par le théorème du moment cinétique que la quantité $C = r^2\omega$ est une constante du mouvement. En déduire que le mouvement est uniforme.
- 2 - Établir l'expression de la vitesse v du satellite en fonction de G , M et r . La calculer numériquement pour une orbite d'altitude 1000 km.
- 3 - Exprimer successivement l'énergie potentielle, l'énergie cinétique et l'énergie mécanique du satellite.

Les satellites en orbite basse subissent des frottements de la part des hautes couches de l'atmosphère. Ces frottements limitent la durée du vie des satellites en les faisant lentement chuter sur Terre. Ainsi, un satellite situé sur une orbite à 1000 km d'altitude descend d'environ 2 m par jour. On modélise l'action des hautes couches de l'atmosphère par une force de frottement quadratique proportionnelle à la masse du satellite,

$$\vec{f} = -\lambda m v \vec{v}.$$

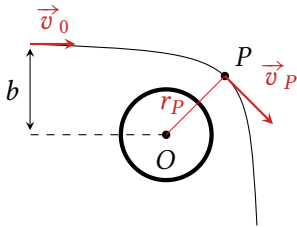
Cette force est suffisamment faible pour que la trajectoire demeure quasi-circulaire : les expressions obtenues pour une orbite circulaire demeurent valables, mais le rayon r de l'orbite varie lentement au cours du temps.

- 4 - À l'aide d'un théorème énergétique, établir l'équation différentielle vérifiée par r .
- 5 - Sans résoudre cette équation, montrer que les frottements font bien descendre le satellite. En déduire un résultat surprenant concernant l'effet des frottements sur la vitesse du satellite.
- 6 - Déterminer l'évolution de r en fonction du temps. En déduire l'expression et la valeur numérique du coefficient de frottement λ .

Exercice 8 : Approche d'un astéroïde

- Lois de conservation ;
- État de diffusion.

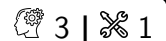
De nombreux objets dits géocroiseurs passent régulièrement à proximité de la Terre. Lorsqu'ils sont trop proches, ils s'échauffent par frottement dans les hautes couches de l'atmosphère et se désintègrent en donnant naissance à des étoiles filantes.



On considère ici un astéroïde de masse m , initialement très éloigné de la Terre et de tout autre astre, si bien qu'il est en mouvement rectiligne uniforme à la vitesse $\vec{v}_0$. Le prolongement de cette trajectoire rectiligne passe à une distance b du centre O de la Terre, appelée *paramètre d'impact*. Lorsqu'il se rapproche de la Terre, l'attraction gravitationnelle dévie l'astéroïde et sa trajectoire devient hyperbolique. On appelle *périgée* le point P de cette trajectoire la plus proche du centre de la Terre à distance r_P . L'astéroïde a alors une vitesse v_P . La figure ci-contre n'est pas à l'échelle.

- 1 - En raisonnant sur l'énergie mécanique, établir une relation entre r_P , v_P et v_0 .
- 2 - En raisonnant sur le moment cinétique, établir une seconde relation entre ces grandeurs.
- 3 - En déduire la distance minimale d'approche r_P en fonction de b et v_0 .
- 4 - On considère un astéroïde se déplaçant à $v_0 = 2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ et ayant un paramètre d'impact $b = 1 \cdot 10^5 \text{ km}$. Va-t-il donner une étoile filante ?

Données : $\mathcal{G} = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ et $m_T = 6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$.

Exercice 9 : En chute libre vers le Soleil

- Lois de Kepler.

Un corps est abandonné sans vitesse initiale à une distance du Soleil égale au rayon de l'orbite terrestre. En utilisant astucieusement les lois de Kepler, calculer la durée que mettra ce corps pour atteindre le Soleil, en fonction uniquement de la période orbitale de la Terre 365,25 jours.

Exercice 10 : Interaction forte

oral ENS MP | 3 | 3



- Énergie potentielle effective.

Un oral de concours, encore plus pour les oraux sans préparation comme c'est le cas à l'ENS, n'est pas fait pour être résolu en totale autonomie par le candidat, mais pour être résolu grâce à la discussion avec l'examineur. Ainsi, il est tout à fait normal de buter sur l'exercice ! J'ai ajouté quelques indications pour vous aider à vous débloquer, mais elles ne peuvent pas remplacer une vraie discussion avec l'examineur.

La cohésion entre protons et neutrons au sein d'un noyau est due à l'interaction forte, très intense mais de courte portée. Cet exercice concerne un modèle de physique classique pour cette interaction. Le centre de masse du noyau se trouve en O , point fixe du référentiel galiléen d'étude, et on isole par la pensée un nucléon modélisé par un point matériel M . On postule alors que ce nucléon subit une force centrale

$$\vec{f} = -k \frac{e^{-r/a}}{r^2} \vec{e}_r,$$

où $r = ||\vec{OM}||$, $\vec{e}_r = \vec{OM}/r$ et k et $a > 0$ deux constantes.

Question : étudier l'existence et la stabilité des orbites circulaires.

Indication : connaître explicitement l'énergie potentielle n'est pas nécessaire.

Exercice 11 : Atmosphère de Titan

oral CCINP PSI | 3 | 2



► Problème ouvert.

Titan est un satellite naturel de Saturne, voir figure 1, doté d'une atmosphère de N_2 à la température $T = 90 \text{ K}$. Trouver l'ordre de grandeur de l'épaisseur de cette atmosphère.

Données :

- masse de Titan : $M_0 = 1,3 \cdot 10^{23} \text{ kg}$;
- rayon de la Titan : 2574 km ;
- masse molaire du diazote : $M_{N_2} = 28 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$;
- constante de gravitation : $G = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$;
- constante des gaz parfaits : $R = 8,3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.

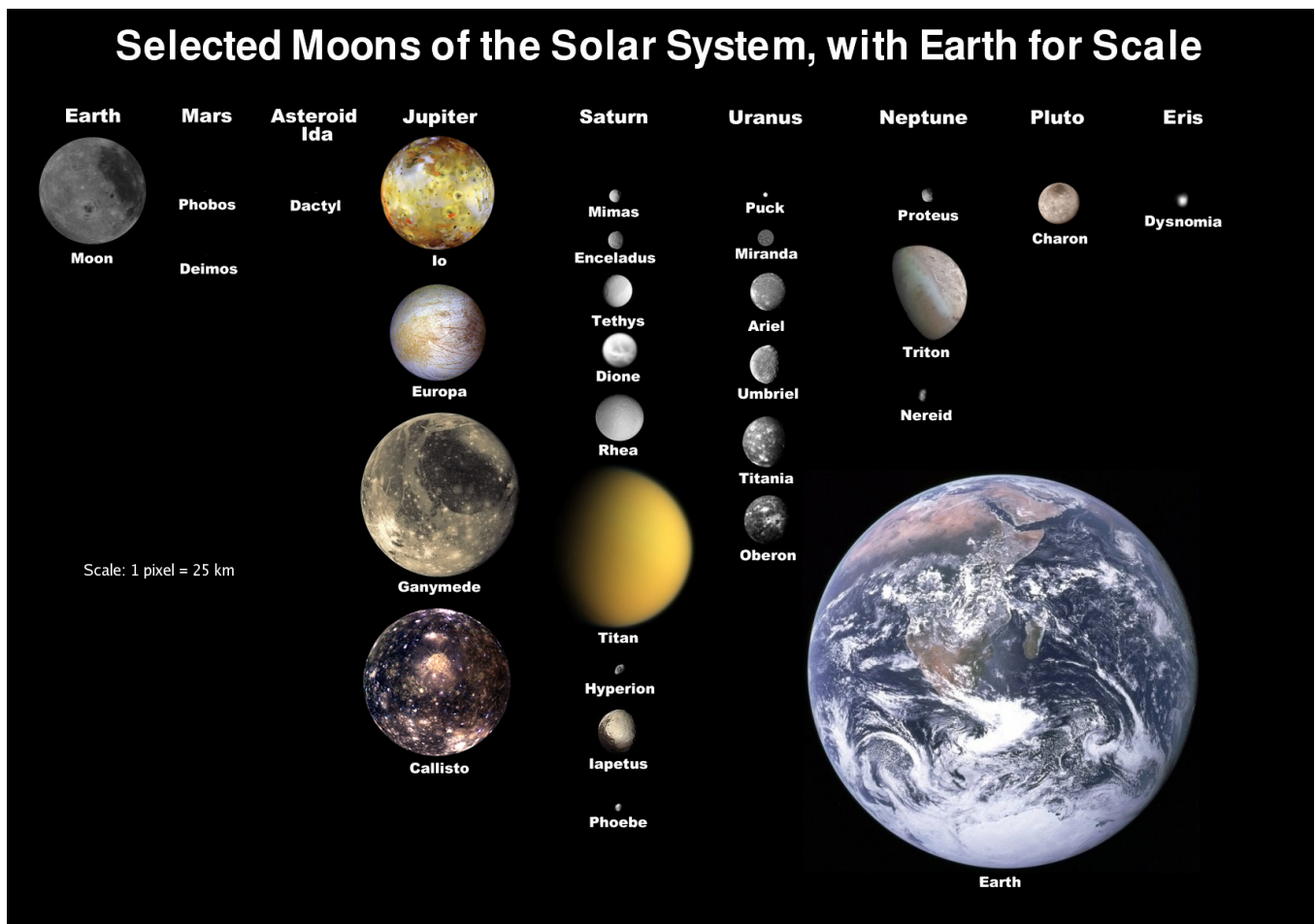


Figure 1 – Lunes des planètes du système solaire. Figure extraite de Wikipédia.