Solide en rotation

I - Mouvements d'un solide

- **Un solide** = 6 degrés de liberté (position du centre de masse + 3 angles pour l'orientation)
- **Translation :** direction fixe, donc décrire le mouvement de G suffit.

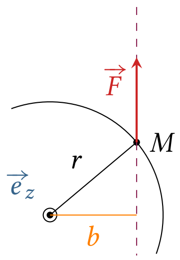
  $\rightsquigarrow$ théorème de la résultante cinétique suffit : $\left.\dfrac{\mathrm{d}\vec{p}_{\mathcal{S}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = m\left.\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}_{G/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \sum \vec{f}_{\text{ext}}$
- **Rotation autour d'un axe fixe :** ne pas confondre avec une translation circulaire !

II - Théorème du moment cinétique

- **Moment d'une force** appliquée en un point M par rapport à un axe (Oz) :

$$\mathcal{M}_z(\vec{F}) = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) \cdot \vec{e}_z = (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{e}_z$$

La force fait tourner en sens direct autour de l'axe $\Longrightarrow \mathcal{M}_z(\vec{F}) > 0$, et réciproquement.



- **Bras de levier** = plus petite distance entre la droite d'action et l'axe de rotation

$$\mathcal{M}_z(\vec{F}) = \pm b \times ||\vec{F}||\,.$$

Le signe $\pm$ se détermine qualitativement selon le sens dans lequel la force fait tourner.

- **Moment cinétique** d'un solide en rotation autour d'un axe (Oz)

$$L_{z,\mathcal{S}} = J_z\omega \qquad \text{avec} \qquad J_z = \sum_{M_n \in \mathcal{S}} m_n r_n^2 = \iiint_{M\in\mathcal{S}} r(M)^2\,\mathrm{d}m$$

où J_z est le moment d'inertie par rapport à (Oz), qui dépend du solide et de l'axe de rotation.
Plus la masse est éloignée de l'axe de rotation, plus le moment d'inertie est élevé.

- **Théorème du moment cinétique** pour un solide en rotation autour de (Oz)

$$\left.\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \sum_{n=1}^{N} \mathcal{M}_{z,n} \qquad \Longleftrightarrow \qquad J_z\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \sum_{n=1}^{N} \mathcal{M}_{z,n}\,.$$

III - Énergie en rotation

- **Énergie cinétique de rotation :** $E_\mathrm{c} = \frac{1}{2}J_z\omega^2 = \frac{1}{2}J_z\dot{\theta}^2$
- **Puissance et travail :** $\mathcal{P} = \mathcal{M}_z\dot{\theta} = \mathcal{M}_z\omega$ et par conséquent $\delta W = \mathcal{M}_z\,\mathrm{d}\theta$.
- **Théorème de l'énergie cinétique :** pour un solide indéformable, subissant N forces et couples,

$$\left.\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{c},\mathcal{S}/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \sum_n \mathcal{P}_n$$

Pour un solide en rotation, le TEC est exactement équivalent au TMC scalaire.

- **Énergie potentielle de pesanteur :** $E_{\mathrm{pp}} = \pm mgy_G$ (signe selon le sens de l'axe (Oy)).

IV - Pendule pesant

- **Liaison pivot parfaite :**

▹ liaison pivot = liaison entre deux solides (stator et rotor) autorisant un unique degré de liberté de rotation autour d'un axe.

▹ liaison parfaite = aucun frottement donc moment nul (mais pas la résultante).

- **Équation du mouvement :** rotation donc TMC (ou TEM car mouvement conservatif), le TRC n'est pas équivalent et ne mène pas au résultat.

- **Profil d'énergie potentielle :** deux types de mouvement, pendulaire et révolutif.

- **Résolution numérique :**

▹ temps adimensionné : $t^\star = \omega_0 t$

▹ introduction de la dérivée $\omega = \dot\theta$ pour transformer l'équation différentielle du second ordre en un système de deux équations du premier ordre :

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^{\star 2}} + \sin\theta = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t^\star} = \omega^\star \\ \dfrac{\mathrm{d}\omega^\star}{\mathrm{d}t^\star} = -\sin\theta \end{cases}$$

▹ utilisation de `odeint(F,X0,t)` avec `X0` la condition initiale, `t` le tableau des instants, et `F` la fonction d'évolution renvoyant la dérivée du vecteur $X = [\theta, \omega]$.

```python
def F(X,t):
    theta, omega = X
    return [omega, -np.sin(theta)]
```

V - Analogies formelles entre translation et rotation

Translation rectiligne	Rotation autour d'un axe fixe
z direction du mouvement	z axe de rotation
Position z Vitesse $v = \dot z$	Angle θ Vitesse angulaire $\omega = \dot\theta$
Masse m Quantité de mouvement $p_z = mv_z = m\dot z$ Composantes des forces $F_{n,z} = \overrightarrow{F_n} \cdot \overrightarrow{e_z}$	Moment d'inertie J Moment cinétique $L_z = J\omega = J\dot\theta$ Moments et couples $\mathcal{M}_{z,n}$
Théorème de la résultante cinétique (projeté) : $\dfrac{\mathrm{d}p_z}{\mathrm{d}t} = m\ddot z = \displaystyle\sum_n F_{n,z}$	Théorème du moment cinétique : $\dfrac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = J\ddot\theta = \displaystyle\sum_n \mathcal{M}_{z,n}$
Énergie cinétique de translation $E_\mathrm{c} = \frac{1}{2}mv^2$	Énergie cinétique de rotation $E_\mathrm{c} = \frac{1}{2}J\omega^2$
Puissance et travail $\mathcal{P} = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{v}$ $\delta W = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}M}$ $W = \displaystyle\int_{z_A}^{z_B} F_z \,\mathrm{d}z$	Puissance et travail $\mathcal{P} = \mathcal{M}_z\omega$ $\delta W = \mathcal{M}\,\mathrm{d}\theta$ $W = \displaystyle\int_{\theta_A}^{\theta_B} \mathcal{M}_z \,\mathrm{d}\theta$
Théorème de l'énergie cinétique : $\dfrac{\mathrm{d}E_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} = \displaystyle\sum_i \mathcal{P}(F_i)$	Théorème de l'énergie cinétique : $\dfrac{\mathrm{d}E_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} = \displaystyle\sum_i \mathcal{P}(\mathcal{M}_i)$
$\dfrac{1}{2}mv_B^2 - \dfrac{1}{2}mv_A^2 = \sum_i W(F_i)$	$\dfrac{1}{2}J\dot\theta_B^2 - \dfrac{1}{2}J\dot\theta_A^2 = \sum_i W(\mathcal{M}_i)$