

Solide en rotation


Plan du cours

I	Mouvements d'un solide	2
I.A	Description du mouvement	2
I.B	Cas particulier : translation	2
I.C	Cas particulier : rotation autour d'un axe fixe	4
II	Théorème du moment cinétique	5
II.A	Moment d'une action mécanique par rapport à un axe	5
II.B	Moment cinétique d'un solide par rapport à un axe	8
II.C	Théorème du moment cinétique pour un solide en rotation par rapport à un axe fixe	10
III	Énergie en rotation	11
III.A	Énergie cinétique de rotation	12
III.B	Puissance et travail d'une action mécanique	12
III.C	Théorèmes énergétiques pour un solide en rotation	14
IV	Pendule pesant	15
IV.A	Liaison pivot parfaite	15
IV.B	Équation du mouvement	15
IV.C	Analyse énergétique.	16
IV.D	Résolution numérique de l'équation du mouvement	16

- R Résultat à connaître par cœur.
- M Méthode à retenir, mais pas le résultat.
- D Démonstration à savoir refaire.
- Q Aspect qualitatif uniquement.

Les paragraphes sans mention en marge sont là pour faciliter votre compréhension ou pour votre culture mais n'ont pas forcément besoin d'être appris en tant que tel.

Ce dernier cours de mécanique de MPSI est une introduction à la mécanique des solides, sujet plus complexe (et aux calculs beaucoup plus techniques) que la mécanique du point matériel à laquelle nous nous sommes restreints de manière plus ou moins implicite cette année. La mécanique des solides ne sera pas tellement étudiée en cours de physique, mais bien davantage en SI.

 Un **solide indéformable** est un modèle de système matériel dont les points restent à distance constante les uns des autres au cours du temps.

→ deux solides indéformables liés entre eux ne forment pas un solide indéformable dès lors que la liaison permet un degré de liberté.



I - Mouvements d'un solide

I.A - Description du mouvement

• Nombre de degrés de liberté

De part son extension, repérer un solide dans l'espace demande d'indiquer à la fois sa « position » et son « orientation ».

- ▷ repérer la « position » signifie donner les trois coordonnées spatiales d'un point de repère sur le solide, souvent son centre d'inertie (= centre de masse = centre de gravité);
- ▷ repérer « l'orientation » signifie définir un repère lié au solide et donner les trois angles entre les axes de ce repère et les axes d'un autre repère lié au référentiel d'étude.



Il faut six paramètres pour repérer un solide dans l'espace.

Remarque : La définition des angles nécessite une convention : par exemple, il est fréquent de repérer un solide par la donnée de ses angles d'Euler (cf. cours de SI).

Dans le cadre du cours de physique, on se restreindra à des cas plus simples où certains de ces six degrés de liberté restent constants au cours du mouvement.

• Champ des vitesses

Une autre manière de décrire le mouvement d'un solide est de donner son **champ des vitesses**, c'est-à-dire le vecteur vitesse en chacun de ses points. Bien sûr, ces vitesses ne sont pas indépendantes les unes des autres puisque les distances entre points restent constantes.

►► **Pour approfondir :** Le champ des vitesses peut se déterminer grâce au torseur cinématique et à la propriété de Varignon (aussi appelée propriété d'équiprojectivité),

$$\left\{ \mathcal{V}_{1/0} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\omega}_{1/0} \\ \vec{v}_{A \in 1/0} \end{array} \right\}_A \iff \vec{v}_{B \in 1/0} = \vec{v}_{A \in 1/0} + \vec{BA} \wedge \vec{\omega}_{1/0}.$$

Dans cette écriture typée SI, 1 désigne le solide étudié et 0 le solide de référence. Avec une écriture de physicien on les remplacerait par \mathcal{S} pour le système étudié et \mathcal{R} pour le référentiel.

Remarquons qu'un torseur est constitué de deux vecteurs, la vitesse \vec{v}_A d'un point A du solide et son vecteur rotation $\vec{\omega}$... soit exactement six composantes : quel hasard! ■

I.B - Cas particulier : translation

I.B.1 - Définition et exemples



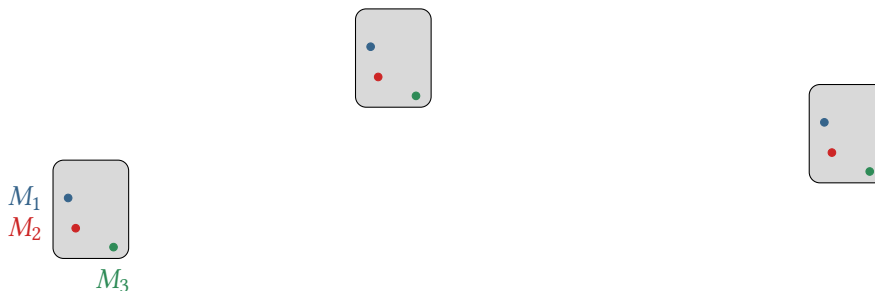
Un solide a un **mouvement de translation** par rapport à un référentiel \mathcal{R} si son orientation reste fixe au cours du temps.

Tous les points d'un solide en translation ont le même vecteur vitesse.

↪ tous les points du solide ont la même trajectoire « en décalé » (les trajectoires sont superposables) et ils la parcourent de la même façon.

►► **Pour approfondir :** De manière plus mathématique, on peut définir une translation comme un mouvement tel que pour tous points M_1 et M_2 du solide le vecteur $\overrightarrow{M_1 M_2}$ garde une direction constante dans le référentiel \mathcal{R} tout au long du mouvement. Comme le solide est indéformable, alors $\|\overrightarrow{M_1 M_2}\|$ est également constante, et cette définition revient donc à dire qu'au cours d'un mouvement de translation le vecteur $\overrightarrow{M_1 M_2}$ est un vecteur constant. ■

Exemple de translation quelconque : dessiner les trois trajectoires



Exemple d'une translation circulaire : une translation est dite **circulaire** si la trajectoire de chaque point du solide est un arc de cercle, voir figure 1.

→ les cercles trajectoires ont tous le même rayon mais pas le même centre.

Attention ! Ne pas confondre translation circulaire et rotation.

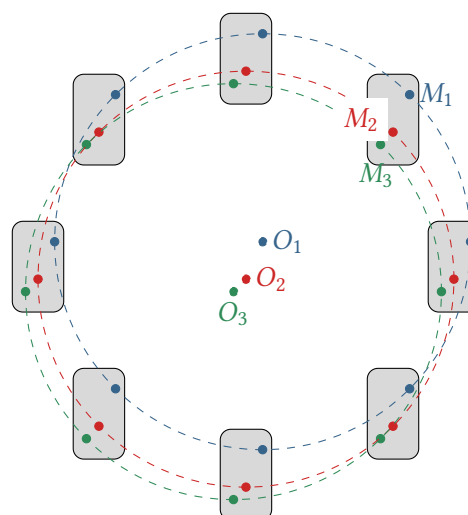


Figure 1 – Exemple de translation circulaire. Les cabines dans lesquelles montent les passagers d'une grande roue ont un mouvement de translation circulaire : le passager reste toujours à la verticale !

I.B.2 - Étude d'un mouvement de translation

Tous les points d'un solide en translation ont le même vecteur vitesse : il suffit d'en étudier un seul pour caractériser entièrement le mouvement du solide, le plus intéressant étant le **centre de masse** ou **centre d'inertie** G .

→ nombre maximal de degrés de liberté :
3 maximum

Espace 1

Centre de masse : si on décompose par la pensée le solide en un ensemble de N points matériels M_n dotés d'une masse m_n , alors G en est le barycentre.

$$\vec{OG} = \frac{1}{m_{\text{tot}}} \sum_{n=1}^N m_n \vec{OM}_n \iff \sum_{n=1}^N m_n \vec{GM}_n = \vec{0}$$

Espace 2

Théorème de la résultante cinétique : le théorème de la résultante cinétique (TRC) est une généralisation aux solides du PFD, qui ne concerne en toute rigueur que les points matériels.

Pour un solide S de masse m en mouvement par rapport à un référentiel \mathcal{R} galiléen,



$$\left. \frac{d\vec{p}_S}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = m \left. \frac{d\vec{v}_{G/\mathcal{R}}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \sum \vec{f}_{\text{ext}}$$

où \vec{f}_{ext} désigne les forces extérieures subies par le solide.

Le vecteur $\vec{p}_S = m\vec{v}_G$ est la **quantité de mouvement** du solide dans le référentiel \mathcal{R} .

Remarque : Nous avons démontré ce théorème par l'intermédiaire de la quantité de mouvement au chapitre M1 sur les lois de Newton.



Conclusion : l'étude d'un mouvement de translation se mène exactement comme celle du mouvement d'un point matériel G auquel serait concentrée toute la masse du solide.

I.C - Cas particulier : rotation autour d'un axe fixe

I.C.1 - Définition



Un solide a un **mouvement de rotation** autour d'un axe Δ fixe dans un référentiel \mathcal{R} si la distance de tout point du solide à tout point de cet axe est constante au cours du mouvement,

$$\forall M \in S, \forall A \in \Delta, \quad \|\vec{AM}\| = \text{cte.}$$

L'orientation du solide varie au cours d'un mouvement de rotation.



Exemple : voir figure 2.

→ dans un plan orthogonal à Δ , les cercles trajectoires ont tous le même centre, mais pas le même rayon.

🚫🚫🚫 **Attention !** Ne pas confondre translation circulaire et rotation.

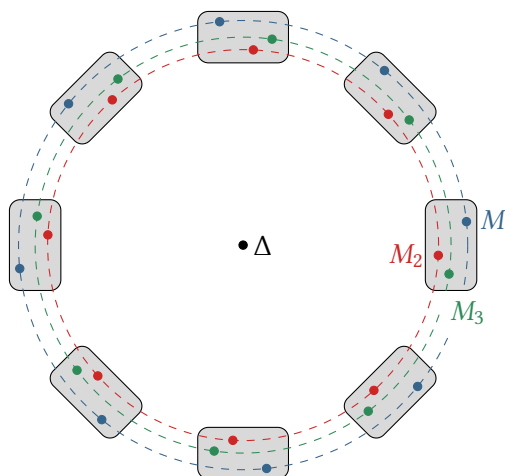


Figure 2 – Exemple de rotation autour d'un axe fixe.

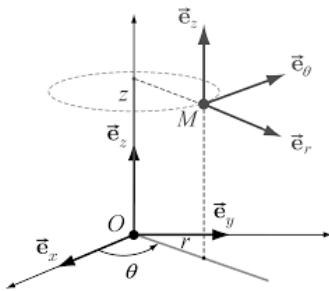
→ nombre de degrés de liberté :
1 seul, l'angle par rapport à une direction de référence

Espace 3

► **Pour approfondir :** Dans le cas général, un mouvement quelconque peut se décomposer à tout instant comme la superposition d'un mouvement de rotation autour d'un axe Δ dépendant a priori du temps (axe de rotation instantané) et d'un mouvement de translation parallèle à Δ . Ce résultat constitue le théorème de Mozzi-Chasles, et il est toujours valable ... même s'il ne donne pas toujours la description la plus intuitive du mouvement. ■

I.C.2 - Champ des vitesses d'un solide en rotation

Repérage : cylindrique d'axe (Oz) coïncidant avec l'axe de rotation. Soit M_i un point quelconque du solide.



$$\overrightarrow{OM}_i = r_i \vec{e}_r + z_i \vec{e}_z \text{ avec } r_i, z_i = \text{cte}$$

$$\text{d'où } \vec{v}_i = r_i \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

Espace 4

On nomme $\omega = \dot{\theta}$ la **vitesse angulaire** ou **vitesse de rotation**, qui est la même pour tous les points du solide.

► **Pour approfondir :** On définit le vecteur rotation instantané $\vec{\omega}$, utilisé en SI, comme le vecteur de norme $|\omega|$, de direction colinéaire à l'axe de rotation et de sens tel que la rotation se fasse en sens direct autour de $\vec{\omega}$. Avec les notations ci-dessus, $\vec{\omega} = \pm \omega \vec{e}_z$ où le signe \pm s'identifie au signe de $\dot{\theta}$. Dans le cas d'un mouvement de rotation pure $\vec{\omega}$ est de direction constante, et si de plus la rotation est uniforme alors $\vec{\omega} = \vec{c\acute{e}}$. Dans le cas général, le vecteur rotation dépend du temps aussi bien en norme qu'en direction et sens. ■

I.C.3 - Insuffisance du théorème de la résultante cinétique

Exemple : considérons une turbine de centrale hydroélectrique, dont le mouvement de rotation est imposé par un écoulement d'eau et qui est couplée à un alternateur en vue de produire de l'électricité.



Position du centre de masse :
sur l'axe de rotation, par symétrie

Espace 5

Vitesse du centre de masse : nulle

Espace 6

$$\text{Application du TRC : } \sum \vec{f}_{\text{ext}} = \vec{0}$$

Espace 7

↪ le TRC apporte de l'information sur le mouvement du centre de masse, mais il n'est pas toujours possible d'en déduire la vitesse de rotation : une autre loi de la dynamique est nécessaire.

II - Théorème du moment cinétique

II.A - Moment d'une action mécanique par rapport à un axe

II.A.1 - Modélisation des actions mécaniques



La main peut à la fois déplacer le centre d'inertie du paquet, mais aussi modifier son orientation dans l'espace ... sans même parler du (?) point d'application : l'effet de la main sur le paquet ne peut pas être décrit par une unique force.

En mécanique du solide, la notion d'action mécanique va au delà de la notion de force, car une action mécanique peut être répartie en surface et/ou en volume.

Une action mécanique quelconque peut toujours se modéliser comme un ensemble de forces de points d'application différents.



Pour caractériser complètement une action mécanique, il faut connaître d'une part sa force résultante \vec{R} et d'autre part son moment résultant \vec{M}_O par rapport à un point O quelconque, appelé point de réduction. Qualitativement, la résultante quantifie la tendance de l'action mécanique à mettre le solide en translation et le moment résultant à le mettre en rotation autour du point O .

Remarque : il faut donc deux vecteurs, soit six composantes, pour décrire une action mécanique quelconque ... exactement autant que le nombre de degrés de liberté d'un solide en mouvement quelconque, ce qui n'est évidemment pas un hasard.

► **Pour approfondir :** Le torseur d'action mécanique exprimé en A regroupe la résultante et le moment en A

$$\{\mathcal{T}\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} \\ \vec{M}_A \end{array} \right\}_A \quad \text{avec} \quad \vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{BA} \wedge \vec{R},$$

où les éléments de réduction (= les composantes) du torseur sont reliés par la formule de Varignon. Le PFD formulé en termes de torseurs relie la dérivée temporelle du torseur cinétique à la somme des torseurs des actions mécaniques. Cette approche est étudiée en SI en MP et PSI. ■

II.A.2 - Moment d'une force

Rappel : moment d'une force appliquée en un point M par rapport à un point A

$$\mathcal{M}_A(\vec{F}) = \vec{AM} \wedge \vec{F}$$

Espace 8

R



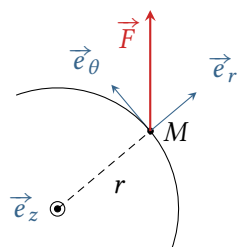
On appelle **moment** d'une force \vec{F} appliquée en un point M par rapport à un axe orienté (Oz)

$$\mathcal{M}_z(\vec{F}) = \vec{M}_O(\vec{F}) \cdot \vec{e}_z = (\vec{OM} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{e}_z$$

Le moment d'une force par rapport à un axe est indépendant du point de l'axe choisi pour le calculer.

⚠⚠⚠ **Attention !** Le point d'application de la force joue bien sûr un rôle essentiel dans son moment, et il n'y a aucune raison qu'il soit confondu avec le centre d'inertie du solide.

Interprétation qualitative : Le moment scalaire d'une force est une grandeur algébrique, dont le signe indique le sens dans lequel la force tend à faire tourner le solide autour de (Oz).



Calcul du moment :

$$\begin{cases} \vec{OM} = r \vec{e}_r + z \vec{e}_z \\ \vec{F} = F_r \vec{e}_r + F_\theta \vec{e}_\theta + F_z \vec{e}_z \end{cases}$$

ce qui permet d'exprimer le moment $\mathcal{M}_z(\vec{F}) = (\vec{OM} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{e}_z = rF_\theta$
On vérifie que \mathcal{M}_z et F_θ sont de même signe.

Espace 9

~ la seule composante de la force qui intervient dans l'expression du moment scalaire est la composante utile pour la mise en rotation autour de l'axe.

Q



Si la force tend à faire tourner le solide en sens direct autour de l'axe, alors $\mathcal{M}_z(\vec{F}) > 0$, et réciproquement.

II.A.3 - Bras de levier

On appelle **droite d'action** de la force \vec{F} appliquée en un point M la droite passant par M et dirigée par \vec{F} .

On appelle **bras de levier** b d'une force \vec{F} par rapport à un axe la plus petite distance entre la droite d'action et l'axe.

Le moment de la force est relié à sa norme et au bras de levier par

$$\mathcal{M}_z(\vec{F}) = \pm b \times \|\vec{F}\|.$$

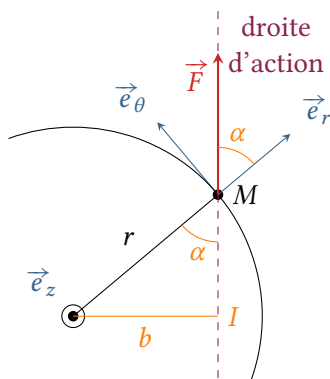
Le signe se détermine qualitativement :

- ▷ si la force tend à faire tourner M en sens direct alors $\mathcal{M}_z > 0$;
- ▷ si la force tend à faire tourner M en sens horaire alors $\mathcal{M}_z < 0$.

Si la droite d'action de la force passe par l'axe de rotation alors $\mathcal{M}_z = 0$

→ plus le bras de levier est grand, plus la force est efficace pour la mise en rotation.

Démonstration :

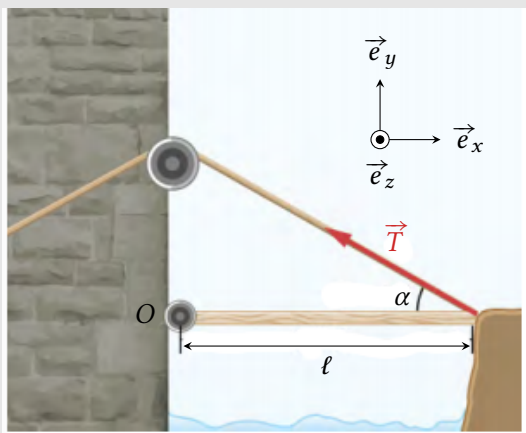


On vient de montrer que $\mathcal{M}_z(\vec{F}) = rF_\theta = rF \sin \alpha$. Or on constate géométriquement que $b = r \sin \alpha$, d'où le résultat.

Espace 10

Remarque : Dans la pratique des exercices, calculer le moment à partir du bras de levier n'est efficace que si le bras de levier est évident. S'il faut commencer par poser un calcul pour le bras de levier, mieux vaut utiliser directement la définition du moment et projeter sur l'axe.

Application 1 : Pont levis



Le pont levis ci-contre est en limite de levage : la force T est telle que le pont est toujours horizontal, mais n'appuie plus sur la berge. Le pont levis est de masse m et longueur ℓ , et le cordage forme un angle α avec l'horizontale.

1 - Calculer les moments scalaires par rapport à l'axe (Oz) du poids \vec{P} , de la force de tension du cordage \vec{T} .

2 - L'action mécanique exercée sur le pont levis au niveau de l'axe de rotation est supposée assimilable à une unique force \vec{R} . Déterminer cette force et son moment par rapport à (Oz) .

II.A.4 - Couple

On appelle **couple** une action mécanique dont la force résultante est nulle mais dont le moment résultant $\vec{\Gamma}$ est non nul.

Le moment résultant $\vec{\Gamma}$ est également nommé couple. Il est indépendant du point utilisé pour le calculer.

Démonstration : Modélisons le couple par un ensemble de N forces \vec{f}_n , appliquées en des points M_n , telles que

$$\vec{R} = \sum_{n=1}^N \vec{f}_n = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{\Gamma} = \sum_{n=1}^N \vec{M}_A(\vec{f}_n) \neq \vec{0}.$$

Calculons le moment résultant par rapport à un point $B \neq A$.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \vec{M}_B(\vec{f}_n) &= \sum_{n=1}^N \overrightarrow{BM_n} \wedge \vec{f}_n \\ &\stackrel{\text{Chasles}}{=} \sum_{n=1}^N \overrightarrow{BA} \wedge \vec{f}_n + \sum_{n=1}^N \overrightarrow{AM_n} \wedge \vec{f}_n \\ &= \overrightarrow{BA} \wedge \left(\underbrace{\sum_{n=1}^N \vec{f}_n}_{=\vec{R}=\vec{0}} \right) + \sum_{n=1}^N \vec{M}_A(\vec{f}_n) \end{aligned}$$

ce qui prouve le résultat annoncé.

II.B - Moment cinétique d'un solide par rapport à un axe

II.B.1 - Cas d'un point matériel

Moment cinétique d'un point par rapport à un point : Soit M un point matériel de masse m animé d'une vitesse \vec{v} par rapport à un référentiel \mathcal{R} , et A un point quelconque (qui aura vocation à être fixe par la suite, mais ce n'est pas obligatoire pour la définition).

$$\textcircled{R} \quad \vec{L}_{A,M/\mathcal{R}} = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{p}_{M/\mathcal{R}} = \overrightarrow{AM} \wedge m \vec{v}_{M/\mathcal{R}}$$

Espace 11

↪ Le moment cinétique d'un point par rapport à un point est une grandeur vectorielle.

Moment cinétique d'un point par rapport à un axe :

\textcircled{R} On appelle **moment cinétique d'un point matériel M par rapport à un axe (Oz)** la composante selon \vec{e}_z du moment cinétique de M par rapport à un point quelconque de l'axe,

$$L_{z,M/\mathcal{R}} = \vec{L}_{O,M/\mathcal{R}} \cdot \vec{e}_z = (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{p}) \cdot \vec{e}_z.$$

Le moment cinétique par rapport à un axe est indépendant du point de l'axe choisi pour le calculer.

Démonstration : Soit A un autre point de l'axe (Oz) .

$$L_z = (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{p}) \cdot \vec{e}_z = (\overrightarrow{OA} \wedge \vec{p}) \cdot \vec{e}_z + (\overrightarrow{AM} \wedge \vec{p}) \cdot \vec{e}_z$$

Or \overrightarrow{OA} est porté par \vec{e}_z , donc le premier terme de la somme est nul, d'où le résultat.

Espace 12

Application 2 : Moment cinétique d'un point en mouvement circulaire uniforme

Exprimer le moment cinétique L_z dans le cas où le mouvement de M est circulaire autour de l'axe (Oz) .

II.B.2 - Cas d'un solide en rotation

Un solide en rotation à la vitesse angulaire $\dot{\theta} = \omega$ autour d'un axe (Oz) a un moment cinétique par rapport à cet axe qui s'écrit

$$L_{z,S} = J\omega \quad \text{avec} \quad J_z = \sum_{M_n \in S} m_n r_n^2 = \iiint_{M \in S} r(M)^2 dm$$

Le **moment d'inertie** J_z du solide par rapport à l'axe (Oz) quantifie la répartition de masse par rapport à l'axe de rotation.

Remarque : La notation par une somme discrète permet de bien comprendre l'idée physique, mais doit être remplacée par une intégrale pour une écriture rigoureuse. Le triple symbole d'intégrale signifie que le domaine d'intégration est un volume.

Attention ! Le moment d'inertie dépend du solide, mais aussi de l'axe de rotation (cf. exemples).

Démonstration : Décomposons par la pensée le solide S comme un ensemble de N points matériels M_n de masse m_n ($1 \leq n \leq N$). Le moment cinétique est une grandeur additive : le moment cinétique du solide est la somme des moments cinétiques de chacun de ces points matériels.

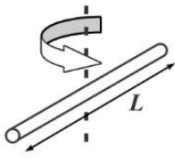
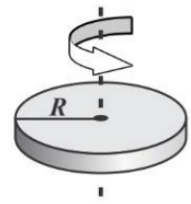

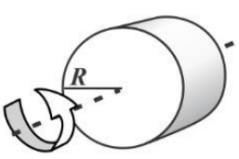
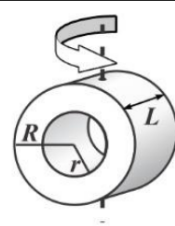
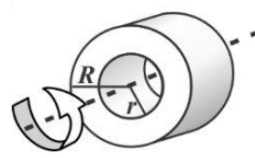
Par définition,

$$L_{z,S} = \sum_{M_n \in S} L_{z,M_n} = \sum_{M_n \in S} m r_n^2 \omega$$

en réutilisant le résultat de l'application précédente. On peut alors factoriser par ω et écrire

$$L_{z,S} = J\omega \quad \text{avec} \quad J = \sum_{M_n \in S} m_n r_n^2$$

Exemples : le moment d'inertie sera toujours donné dans les exercices.

Tige fine ($R \ll L$)	Disque ou cylindre plein	Disque plein
		
$J = \frac{1}{12}mL^2$	$J = \frac{1}{2}mR^2$	$J = \frac{1}{12}mR^2$
Cylindre plein	Cylindre creux	Cylindre creux
		
$J = \frac{1}{2}mR^2$	$J = \frac{1}{12}m(3R^2 + 3r^2 + L^2)$	$J = \frac{1}{2}m(R^2 + r^2)$

M

Application 3 : Moment d'inertie

- 1 - Interpréter la différence de moment d'inertie d'un disque de rayon R selon que son axe de rotation est orthogonal au disque ou inclus dans le plan du disque.
- 2 - Interpréter l'influence du rayon interne r sur le moment d'inertie d'un cylindre creux.
- 3 - Quel serait le moment d'inertie d'un cerceau de rayon R et masse m ?

► **Pour approfondir** : Nous avons vu que la quantité de mouvement $\vec{p} = m\vec{v}_G$ suffit à décrire un mouvement de translation, et nous montrerons par la suite que le moment cinétique scalaire suffit à décrire un mouvement de rotation autour d'un axe fixe. Lorsque l'axe de rotation dépend du temps, il faut considérer un moment cinétique vectoriel \vec{L}_A même pour un solide, relié au vecteur rotation non plus par proportionnalité mais par une relation linéaire plus large, décrite par la matrice d'inertie $[J]_A$: on a alors $\vec{L}_A = [J]_A \vec{\omega}$. Dans le cas général où le mouvement se décompose en une rotation et une translation, les deux grandeurs sont utiles, et l'usage est de les regrouper dans le torseur cinétique.

$$\{C_{1/0}\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \vec{p}_{1/0} = m\vec{v}_{G \in 1/0} \\ \vec{L}_{A,1/0} \end{array} \right\}_A \quad \text{avec} \quad \vec{L}_{B,1/0} = \vec{L}_{A,1/0} \wedge \vec{BA} \wedge \vec{L}_{A,1/0}.$$

Les deux éléments de réduction (= les composantes) du torseur cinétique sont reliées l'un à l'autre par la formule de Varignon. Le torseur cinétique est au programme de SI en MP et PSI. ■

II.C - Théorème du moment cinétique pour un solide en rotation par rapport à un axe fixe

• **Énoncé et démonstration**

R

Pour un solide en rotation autour d'un axe (Oz) fixe dans un référentiel galiléen \mathcal{R} , soumis à N actions mécaniques de moment $\mathcal{M}_{z,n}$ ($1 \leq n \leq N$) par rapport à cet axe

$$\left. \frac{dL_z}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \sum_{n=1}^N \mathcal{M}_{z,n} \quad \text{donc} \quad J \frac{d\omega}{dt} = \sum_{n=1}^N \mathcal{M}_{z,n}.$$

Démonstration : Décomposons par la pensée le solide en un ensemble de points matériels M_i , et notons \vec{F}_i la résultante des forces exercées en ce point. Comme on raisonne sur des *points* et non pas directement un *solide*, seules des forces sont à considérer.

Le théorème du moment cinétique appliqué à chacun de ces points M_i par rapport au point O appartenant à l'axe (Oz) et donc fixe dans \mathcal{R} s'écrit

$$\frac{d\vec{L}_{O,M_i}}{dt} = \vec{OM}_i \wedge \vec{F}_i = \vec{M}_O(\vec{F}_i) \quad \text{donc} \quad \frac{dL_{z,M_i}}{dt} = \mathcal{M}_z(\vec{F}_i).$$

Par additivité du moment cinétique,

$$L_{z,S} = \sum_{M_i \in S} L_{z,M_i} \quad \text{d'où} \quad \frac{dL_{z,S}}{dt} = \sum_{M_i \in S} \mathcal{M}_z(\vec{F}_i).$$

La somme englobe toutes les actions mécaniques subies par le solide, dont certaines peuvent se regrouper sous forme de couples, ce qui conduit au résultat.

M

Application 4 : Moteur électrique

Dans un moteur électrique, une puissance apportée sous forme électrique permet d'entraîner une charge en rotation. Le couple Γ_0 à exercer sur la charge est supposé constant. Sur le plan mécanique, on peut modéliser le rotor du moteur par un solide de moment d'inertie J subissant deux couples supplémentaires :

- un couple d'origine électrique proportionnel à la tension d'alimentation U du moteur $\Gamma_e = \phi U$;
- un couple dissipatif $\Gamma_d = -\lambda\omega$, prenant en compte les pertes par frottement mécanique et par effet Joule.

- 1 - Établir l'équation du mouvement.
- 2 - Déterminer la tension U à appliquer au moteur pour entraîner la charge à une vitesse de rotation Ω_0 fixée.
- 3 - Estimer la durée nécessaire pour que cette vitesse soit atteinte.

• **Analogie entre translation rectiligne et rotation**

Translation rectiligne	Rotation autour d'un axe fixe
z direction du mouvement	z axe de rotation
Position z	Angle θ
Vitesse $v = \dot{z}$	Vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$
Masse m	Moment d'inertie J
Quantité de mouvement $p_z = mv_z = m\dot{z}$	Moment cinétique $L_z = J\omega = J\dot{\theta}$
Composantes des forces $F_{n,z} = \vec{F}_n \cdot \vec{e}_z$	Moments et couples $\mathcal{M}_{z,n}$
Théorème de la résultante cinétique (projeté) : $\frac{dp_z}{dt} = m\ddot{z} = \sum_n F_{n,z}$	Théorème du moment cinétique : $\frac{dL_z}{dt} = J\ddot{\theta} = \sum_n \mathcal{M}_{z,n}$

III - Énergie en rotation

Intuition par analogie avec la translation rectiligne :

Translation rectiligne	Rotation autour d'un axe fixe
Énergie cinétique de translation $E_c = \frac{1}{2}mv^2$	Énergie cinétique de rotation $E_c = \frac{1}{2}J\omega^2$
Puissance d'une action mécanique $\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}$	Puissance d'une action mécanique $\mathcal{P} = \mathcal{M}_z\omega$
Travail infinitésimal $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{M}$	Travail infinitésimal $\delta W = \mathcal{M} d\theta$

III.A - Énergie cinétique de rotation

R

L'énergie cinétique d'un solide en rotation à la vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$ autour d'un axe (Oz) s'écrit

$$E_c = \frac{1}{2} J_z \omega^2 = \frac{1}{2} J_z \dot{\theta}^2$$

où J_z est le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe (Oz).

Démonstration : décomposons comme précédemment le solide S en un ensemble de points matériels M_n auxquels est affectée une masse m_n . On utilise un repère cylindrique d'axe (Oz).

Vitesse du point M_n : $\dot{\theta} = \omega$ indépendant de n car rotation.

$$\vec{v}_n = \dot{r}_n \vec{e}_r + r_n \dot{\theta}_n \vec{e}_\theta = r_n \omega \vec{e}_\theta$$

Par additivité de l'énergie cinétique,

$$E_c = \sum_{M_n \in S} \frac{1}{2} m_n v_n^2 = \sum_{M_n \in S} \frac{1}{2} m_n r_n^2 \omega^2 = \frac{1}{2} J_z \omega^2$$

Espace 14

► **Pour approfondir :** Dans le cas général où le mouvement est la superposition d'un mouvement de translation et d'un mouvement de rotation (penser pour bien visualiser à une roue d'un véhicule en mouvement), l'énergie cinétique totale du solide prend en compte deux contributions, une d'énergie cinétique de translation de la forme $\frac{1}{2} m v_G^2$ et une d'énergie cinétique de rotation de la forme $\frac{1}{2} J \omega^2$. La difficulté consiste à identifier l'axe de rotation instantané, pour exprimer sans erreur le moment d'inertie et la vitesse de rotation. ■

III.B - Puissance et travail d'une action mécanique

III.B.1 - Cas général

R

La puissance d'une action mécanique appliquée à un solide en rotation autour d'un axe (Oz) est reliée au moment résultant \mathcal{M}_z par rapport à cet axe par

$$\mathcal{P} = \mathcal{M}_z \dot{\theta} = \mathcal{M}_z \omega$$

Son travail élémentaire au cours d'une rotation infinitésimale d'angle $d\theta$ est donné par

$$\delta W = \mathcal{M}_z d\theta$$

Démonstration : montrons le résultat pour une force quelconque appliquée en un point M du solide

$$\vec{F} = F_r \vec{e}_r + F_\theta \vec{e}_\theta + F_z \vec{e}_z$$

dont nous avons montré précédemment que le moment par rapport à l'axe de rotation s'écrit

$$\mathcal{M}_z = rF_\theta$$

où r est la coordonnée cylindrique du point M : $\vec{OM} = r \vec{e}_r + z \vec{e}_z$. Ce cas est suffisant pour généraliser puisque toute action mécanique peut se décrire comme un ensemble de forces.

Le point M est en mouvement circulaire d'axe Oz , donc $\vec{v}_M = r\omega \vec{e}_\theta$ et ainsi

$$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v} = F_\theta \times r\omega = \mathcal{M}_z(\vec{F})\omega$$

Le travail élémentaire s'en déduit : puisque $\omega = d\theta/dt$,

$$\delta W = \mathcal{P} dt = \mathcal{M}_z(\vec{F})\omega dt = \mathcal{M}_z(\vec{F})d\theta$$

Espace 15

III.B.2 - Énergie potentielle de pesanteur d'un solide



L'énergie potentielle de pesanteur d'un solide est égale à celle d'un point matériel situé en G , centre de masse du solide, auquel serait affecté toute la masse m du solide.



Attention ! Ne pas oublier que l'expression de E_{pp} dans un système de coordonnées donné peut inclure un signe selon l'orientation de l'axe vertical.

Démonstration : Introduisons un axe vertical (Oy) orienté vers le haut, décomposons comme toujours le solide S en un ensemble de points matériels M_n de masse m_n . L'énergie potentielle de pesanteur du solide est la somme des énergies potentielles de pesanteur de ces points matériels,

$$E_{pp} = \sum_{M_n \in S} m_n g y_n .$$

Or par définition du centre de masse projetée sur l'axe (Oy),

$$m\vec{OG} = \sum_{M_n \in S} m_n \vec{OM}_n \quad \text{d'où} \quad m y_G = \sum_{M_n \in S} m_n y_n$$

ce qui conduit au résultat en multipliant par g ,

$$E_{pp} = m g y_G .$$

III.C - Théorèmes énergétiques pour un solide en rotation

Les variations d'énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe (Oz) fixe dans un référentiel galiléen \mathcal{R} sont reliées à la puissance des actions mécaniques (forces et couples) qu'il subit,

$$\left. \frac{dE_c}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \sum_n \mathcal{P}_n$$

Les variations d'énergie mécanique d'un solide en rotation sont reliées à la puissance des actions mécaniques non-conservatives,

$$\left. \frac{dE_m}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \sum \mathcal{P}_{\text{non-cons}}$$

Démonstration : D'après le TMC,

$$J \frac{d\omega}{dt} = \sum_n \mathcal{M}_n$$

et en multipliant par ω

$$J \frac{d\omega}{dt} \omega = \sum_n \mathcal{M}_n \omega \quad \text{soit} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} J \omega^2 \right) = \sum_n \mathcal{P}_n$$

Espace 16



Remarque importante : Pour un solide en rotation autour d'un axe fixe, les théorèmes du moment cinétique et de l'énergie cinétique sont équivalents, c'est-à-dire qu'ils donnent des équations identiques. Cela vient du fait que la démonstration implique juste une multiplication par ω .

↪ il faut utiliser le plus simple des deux dans les calculs !

Remarque : Il en est de même pour le théorème de la résultante cinétique (alias PFD pour un solide) et le théorème de l'énergie cinétique appliqués à un solide en translation unidimensionnelle le long d'un axe (Ox) : dès lors qu'il y a mouvement, \dot{x} n'est pas identiquement nul donc

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 \right) = \sum_n F_n \dot{x} \iff m \dot{x} \ddot{x} = \sum_n F_n \dot{x} \iff m \ddot{x} = \sum_n F_n$$

Attention, l'hypothèse de translation unidimensionnelle est indispensable. Dans le cas d'une translation tridimensionnelle, le TRC donne trois équations indépendantes (une par projection) là où le TEC n'en donne qu'une seule, il n'y a donc pas équivalence.

► **Pour approfondir :** Ce résultat est valable pour un solide indéformable, mais ne se généralise pas aux systèmes déformables, pour lesquels la puissance des actions mécaniques intérieures doit être prise en compte. ■

IV - Pendule pesant

On appelle **pendule pesant** un solide de forme quelconque libre de tourner autour d'un axe fixe qui ne passe pas par son centre d'inertie. De nombreux systèmes s'en rapprochent (balancier d'horloge, balançoire, etc.). Il est décrit par son moment d'inertie J par rapport à son axe de rotation. On se limite dans ce paragraphe aux oscillations *libres* du pendule, ce qui exclut donc les systèmes motorisés.

IV.A - Liaison pivot parfaite

Les liaisons entre solides peuvent être catégorisées en fonction du nombre de degrés de liberté de mouvement qu'elles autorisent.

On appelle **liaison pivot** une liaison entre deux solides autorisant un unique degré de liberté de rotation autour d'un axe.

Lorsqu'un des deux solides est fixe dans le référentiel d'étude, le solide fixe est appelé **stator** et le solide en rotation **rotor**.

Une liaison pivot est dite **parfaite** si la rotation se fait sans frottement, c'est-à-dire si le moment par rapport à l'axe de rotation exercé par le stator sur le rotor est nul.

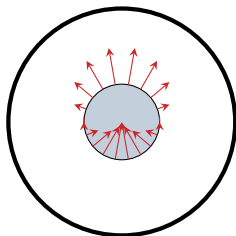
Exemples : porte autour de ses gonds, hélice d'avion, éolienne, etc.

Espace 17

Au delà de ces quelques exemples emblématiques, c'est un type de liaison très courant : un vélo en compte 2 (roues) + 1 (guidon) + 1 (pédalier) + 2 (manettes de frein) + 4 (marchoires de frein) + 6 à 8 (dérailleur) = au moins 16 à 18 liaisons pivot ... sauf si j'en ai oubliées!

Remarque : Une liaison se traduit par une connaissance du mouvement, mais en contrepartie une action mécanique inconnue, ici la résultante de l'action mécanique exercée par le stator sur le rotor.

► Pour approfondir :

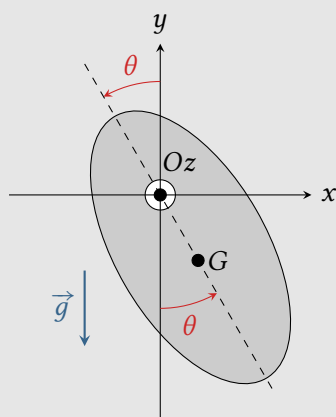


On peut comprendre le lien entre moment nul et absence de frottement en décomposant la résultante comme un ensemble de forces appliquées en chaque point de contact entre le rotor et le stator, qui sont de type contact solide.

Illustrons-le sur le cas d'une roue soulevée du sol (pas de mouvement, juste le poids à compenser). En l'absence de frottement, la force de contact entre stator et rotor est normale en tout point, comme le serait une force de réaction d'un support. Ainsi, toutes les droites d'actions de toutes ces forces passent par l'axe de rotation (Oz) et ont donc un bras de levier nul, d'où un moment résultant nul également.

IV.B - Équation du mouvement

Application 5 : Équation du mouvement du pendule pesant



On considère le pendule pesant schématisé ci-contre, en rotation autour de l'axe fixe Oz horizontal. On note J son moment d'inertie par rapport à Oz et on pose $d = OG$ la distance entre l'axe de rotation et le centre de masse du pendule.

- 1 - Déterminer par analyse dimensionnelle une pulsation caractéristique des oscillations du pendule.
- 2 - Lister les actions mécaniques subies par le pendule, leur résultante et leur moment par rapport à l'axe Oz .
- 3 - En déduire l'équation du mouvement par application du théorème du moment cinétique.
- 4 - Peut-on retrouver cette équation par application du théorème de la résultante cinétique? Quelle information donne ce théorème?

Conclusion : Le comportement du pendule pesant est décrit par une équation différentielle non-linéaire,

$$\ddot{\theta} + \frac{mgd}{J} \sin \theta = 0,$$

qui n'admet pas de solution analytique simple. Elle se linéarise en équation d'oscillateur harmonique pour les petites oscillations autour de la position d'équilibre stable $\theta = 0$, mais ce n'est pas le cas en général.

Remarque : on peut retrouver le pendule simple comme cas limite d'un pendule pesant. Pour un pendule simple, la totalité de la masse se trouve en G , donc $J = md^2$, ce qui simplifie l'équation différentielle en

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{d} \sin \theta = 0$$

qui est celle obtenue par application du PFD.

⇒ **Généralisation :**



Pour un solide, le théorème de la résultante cinétique et le théorème du moment cinétique ne sont pas équivalents. Il n'y a équivalence que dans le cas d'un point matériel.

IV.C - Analyse énergétique



Application 6 : Analyse énergétique du pendule pesant

- 1 - Exprimer l'énergie mécanique du pendule pesant et justifier qu'il s'agit d'une constante du mouvement.
- 2 - Retrouver l'équation différentielle du mouvement.
- 3 - Représenter le profil d'énergie potentielle du système, étudier les positions d'équilibre, puis montrer qu'il peut présenter deux types de comportement qualifiés de « pendulaire » et de « révolitif ».

⇒ **Généralisation :** Ce changement qualitatif de comportement dynamique du système est appelé **bifurcation**.

IV.D - Résolution numérique de l'équation du mouvement

IV.D.1 - Utilisation de `scipy.integrate.odeint`



Application 7 : Résolution numérique de l'équation du mouvement

L'équation du mouvement n'étant pas soluble analytiquement, on se tourne vers une résolution numérique.

- 1 - Définir une unité de temps adaptée au problème étudié, et écrire l'équation différentielle sous forme adimensionnée.
- 2 - Montrer que l'équation peut s'écrire comme un système de deux équations différentielles du premier ordre à deux inconnues.
- 3 - La résolution envisagée utilise la fonction `odeint` de la bibliothèque `scipy.integrate`, dont la spécification simplifiée¹ est donnée ci-dessous. Compléter le programme qu'il résolve l'équation et affiche la courbe représentant θ en fonction du temps pour un angle initial $\theta_0 = \pi/2$ et une vitesse initiale adimensionnée nulle.

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 from scipy.integrate import odeint

5 t = np.linspace(0,20,1000) # tableau des temps

7 def derivee(X,t):
8     # à compléter

10 # à compléter

```

```
odeint(func, X0, t)
```

Paramètres d'entrée :

func : fonction de X et du temps t qui renvoie la dérivée $\dot{X} = [\dot{x}, \dot{x}]$ du vecteur d'état $X = [x, \dot{x}]$ à l'instant t sous forme d'une liste à deux éléments.

X0 : vecteur condition initiale $X(t=0) = [x(t=0), \dot{x}(t=0)]$.

t : tableau des instants pour lesquels doit être calculée la valeur de $X(t)$.

Valeur de retour :

Tableau à deux colonnes contenant les valeurs de $X(t) = [x(t), \dot{x}(t)]$.

IV.D.2 - Effet des non-linéarités

La figure 3 représente l'évolution de l'angle $\theta(t)$ pour une position initiale $\theta_0 = 0$ et une vitesse initiale adimensionnée $\omega^* = \Omega$.

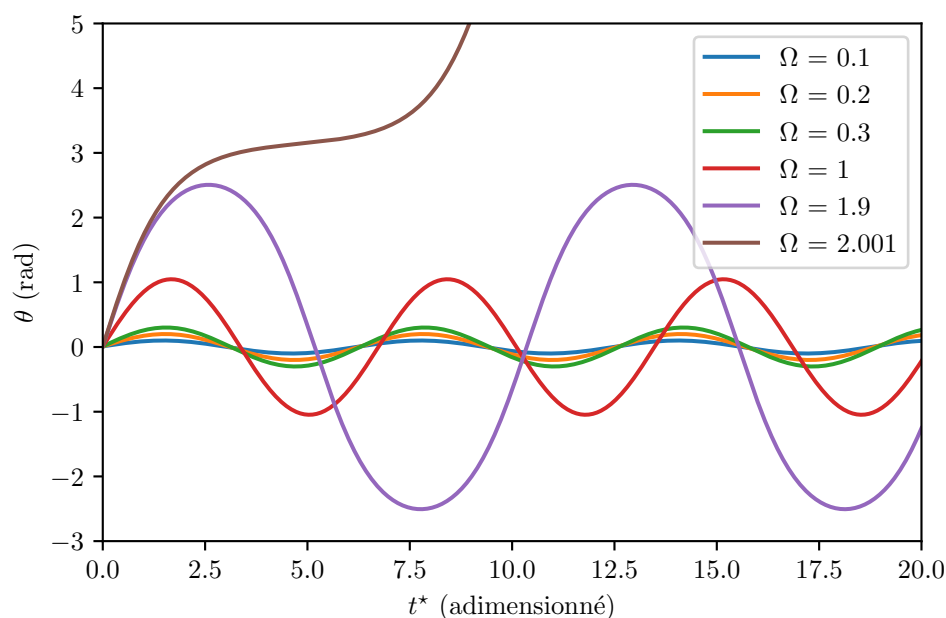


Figure 3 – Mouvement du pendule pesant pour différentes conditions initiales.

Oscillations de faible amplitude :

oscillations harmoniques isochrones



Espace 18

Oscillations de grande amplitude :

perte d'harmonicité et d'isochronisme, due aux non-linéarités

Espace 19

Valeur seuil $\Omega = 2$:



transition d'un mouvement pendulaire à un mouvement révolitif : l'unité naturelle de vitesse angulaire est la

1. Copier-coller du sujet Centrale MP Physique-chimie 2 2025.

pulsation propre ω_0 , donc

$$E_m = \frac{1}{2}J(\Omega\omega_0)^2 - mgd \cos \theta_0 = 2J\omega_0^2 - mgd = mgd$$

ce qui correspond à la valeur seuil prévue par l'analyse énergétique.

Espace 20

Correction des applications de cours

Application 2 : Moment cinétique d'un point en mouvement circulaire uniforme

On utilise bien sûr des coordonnées cylindriques d'axe (Oz). Alors, r et z étant des constantes,

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z \quad \text{et} \quad \vec{v} = r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

d'où

$$L_z = (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{p}) \cdot \vec{e}_z = mr^2\dot{\theta}.$$

Application 1 : Moment cinétique d'un point en mouvement circulaire uniforme

1 Moment du poids : bras de levier $\ell/2$, fait tourner le pont en sens inverse par rapport à l'axe, d'où

$$\mathcal{M}_z(\vec{P}) = -mg\frac{\ell}{2}$$

Moment de la force \vec{T} : bras de levier pas évident donc on se ramène à des projections.

$$\vec{T} = -T \cos \alpha \vec{e}_x + T \sin \alpha \vec{e}_y$$

d'où on déduit le moment

$$\mathcal{M}_z(\vec{T}) = (\overrightarrow{OI} \wedge \vec{T}) \cdot \vec{e}_z = (\ell \vec{e}_x \wedge \vec{T}) \cdot \vec{e}_z = \ell T \sin \alpha.$$

2 Le pont est fixe donc

$$\vec{R} + \vec{T} + \vec{P} = \vec{0} \quad \text{d'où} \quad \vec{R} = (mg - T \sin \alpha) \vec{e}_y + T \cos \alpha \vec{e}_x.$$

Comme \vec{R} s'applique en un point de l'axe de rotation, son bras de levier est nul et donc son moment aussi.

Application 5 : Équation du mouvement du pendule pesant

1 On chercherait a priori $\omega = J^\alpha d^\beta m^\gamma g^\delta \dots$ mais comme il n'y a que trois dimensions indépendantes dans le problème (masse, longueur, temps) cela fait une grandeur de trop. Cependant, la grandeur pertinente est le poids du pendule plutôt que sa masse et g séparément : on postule donc $\gamma = \delta$ pour aboutir à un système admettant une unique solution, et on trouve

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{J}}.$$

2 Bilan des actions mécaniques : Indispensable de préciser le point d'application des forces.

- poids du pendule $\vec{P} = m\vec{g}$ est une force qui s'applique en G ;
- liaison pivot parfaite, est une action mécanique plus complexe, de résultante \vec{R} non nulle mais de moment nul par rapport à l'axe de rotation.

Calcul du moment du poids par rapport à l'axe de rotation : La première question est celle du choix de la méthode : moment vectoriel et projection (marche à tous les coups mais calculs lourds) ou bras de levier (marche à tous les coups, calculs souvent plus simples, mais le calcul du bras de levier peut poser des complications géométriques). Le point d'application du poids est en mouvement, donc le bras de levier varie, et le sens dans lequel il fait tourner le solide dépend du signe de θ

↪ passer par le bras de levier est sans doute un peu plus compliqué dans ce cas, il vaut mieux utiliser le moment vectoriel en cas d'hésitation.

Par définition,

$$\vec{\mathcal{M}}(\vec{P}) = \overrightarrow{OG} \wedge \vec{P}$$

Pour calculer un produit vectoriel, on peut le faire directement mais il est souvent plus prudent de passer par la base de projection (cartésienne ou polaire, peu importe). C'est ce à quoi vous êtes le plus entraînés.

$$\vec{OG} = d \sin \theta \vec{e}_x - d \cos \theta \vec{e}_y \quad \text{et} \quad \vec{P} = -mg \vec{e}_y$$

donc

$$\vec{M}(\vec{P}) = -mgd \sin \theta \vec{e}_x \wedge \vec{e}_y = -mgd \sin \theta \vec{e}_z \quad \text{d'où} \quad \mathcal{M}_z(\vec{P}) = -mgd \sin \theta$$

Vérifier qualitativement la cohérence du signe sur le schéma : $\theta > 0$ et on constate la rotation en sens horaire sur le schéma.

3 Théorème du moment cinétique :

$$\frac{dL_z}{dt} = \mathcal{M}_z(\vec{P}) \quad \text{d'où} \quad J \frac{d\omega}{dt} = J\ddot{\theta} = -mgd \sin \theta$$

ce qui se met sous la forme canonique

$$\ddot{\theta} + \frac{mgd}{J} \sin \theta = 0$$

et on identifie la pulsation caractéristique $\omega_0^2 = \frac{mgd}{J}$.

4 Théorème de la résultante cinétique :

$$\left. \frac{d\vec{p}_{S/R}}{dt} \right| = m \frac{d\vec{v}_G}{dt} = m\vec{g} + \vec{R}$$

... ce qui n'amène à rien du tout car on ne sait rien de la force \vec{R} , même pas sa direction. En particulier on n'a certainement pas $\vec{R} = -\vec{P}$ car G est en mouvement. Par contre, une fois l'équation différentielle du mouvement obtenue par le TMC on peut utiliser le résultat pour déterminer la force \vec{R} .

Application 6 : Analyse énergétique du pendule pesant

1 L'énergie cinétique s'écrit

$$E_c = \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$$

L'axe (Oy) est vertical vers le haut,

$$E_{pp} = mgy_G = -mgd \cos \theta + \text{cte}.$$

On en déduit l'énergie mécanique :

$$E_m = \frac{1}{2} J \omega^2 - mgd \cos \theta + \text{cte} = \text{cte}$$

L'action de liaison est non conservative, mais elle est de moment nul et sa résultante s'applique au point O qui se trouve sur l'axe de rotation. Sa puissance est donc nulle, le pendule n'est soumis qu'à des actions mécaniques conservatives ou de puissance nulle : son énergie mécanique est une constante du mouvement.

2 D'après le TEM,

$$\frac{dE_m}{dt} = 2J\omega \frac{d\omega}{dt} - mgd\omega \sin \theta = 0$$

d'où le résultat.

3 Le profil d'énergie potentielle permet de mettre en évidence deux grands types de mouvements :

- ▷ si $E_m < mgd$ le pendule est dans un **état lié**, il ne peut sortir du puits de potentiel dans lequel il se trouve et où il oscille : on parle de **mouvement pendulaire**.
- ▷ si $E_m > mgd$ le pendule est dans un **état de diffusion** : il passe de puits en puits, c'est-à-dire qu'il tourne indéfiniment : on parle de **mouvement révolitif**.

Application 7 : Résolution numérique de l'équation du mouvement

1 On pose naturellement le temps adimensionné $t^* = \omega_0 t$.

2 Introduction de la dérivée première $\omega^* = \frac{d\theta}{dt^*}$, qui permet d'écrire

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt^*} = \omega^* \\ \frac{d\omega^*}{dt^*} = -\sin \theta \end{cases}$$

3 Il suffit de suivre la spécification.

Expériences de cours

Date et salle :

Expérience :

□

Merci ☺