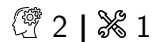


Solide en rotation

Théorème du moment cinétique

Exercice 1 : Volant d'inertie



- Théorème du moment cinétique ;
- Représentation complexe et régime sinusoïdal forcé.

1 La puissance fournie au système par le couple de frottement vaut

$$\mathcal{P}_f = \Gamma_f \omega = -\alpha \omega^2.$$

Comme il s'agit d'un couple de frottement, alors forcément $\mathcal{P}_f < 0$ donc $\alpha > 0$.

2 L'équation différentielle se déduit du théorème du moment cinétique.

- Système : rotor, solide de moment d'inertie J par rapport à l'axe de rotation ;
- Référentiel : lié au stator, donc probablement le référentiel terrestre, et en tous cas un référentiel galiléen ;
- Bilan des actions mécaniques :
 - Couple moteur Γ_0 ;
 - Couple de frottement $\Gamma_f = -\alpha \omega$.

D'après le théorème du moment cinétique,

$$J \frac{d\omega}{dt} = \Gamma_0 - \alpha \omega,$$

ce qui se met sous forme canonique

$$\frac{d\omega}{dt} + \frac{1}{\tau} \omega = \frac{\Gamma_0}{J} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{J}{\alpha}.$$

Le second membre de cette équation est constant, donc on peut chercher une solution particulière constante également,

$$\omega_\infty = \frac{\tau \Gamma_0}{J} = \frac{\Gamma_0}{\alpha}.$$

Physiquement, ω_∞ correspond à la vitesse de rotation une fois le régime permanent atteint. Ainsi,

$$\omega(t) = K e^{-t/\tau} + \omega_\infty.$$

La constante K se trouve à partir de la condition initiale $\omega(0) = 0$, d'où

$$\omega(t) = \omega_\infty \left(1 - e^{-t/\tau} \right).$$

3 En prenant en compte le couple de vibration, l'équation différentielle s'écrit

$$\frac{d\omega}{dt} + \frac{1}{\tau} \omega = \frac{1}{\tau} \omega_\infty + \frac{\gamma}{J} \cos(\Omega t) \quad \text{d'où} \quad \frac{du}{dt} + \frac{1}{\tau} u = \frac{\gamma}{J} \cos(\Omega t).$$

Cherchons maintenant la réponse au forçage harmonique, solution particulière de l'équation différentielle ne prenant en compte que le forçage harmonique,

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{\tau}u = \frac{\gamma}{J} \cos(\Omega t)$$

La représentation complexe est la méthode naturelle pour trouver cette solution. Posons $\underline{u} = A e^{j\varphi} e^{j\Omega t}$. L'équation différentielle donne alors

$$j\Omega \underline{u} + \frac{1}{\tau} \underline{u} = \frac{\gamma}{J} e^{j\Omega t} \quad \text{soit} \quad j\Omega A e^{j\varphi} + \frac{1}{\tau} A e^{j\varphi} = \frac{\gamma}{J} \quad \text{d'où} \quad A e^{j\varphi} = \frac{\gamma\tau}{J(1 + j\Omega\tau)}$$

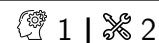
Remplaçons τ par J/α et déterminons l'amplitude A à partir du module,

$$A = \frac{1}{J} \left| \frac{\gamma \frac{J}{\alpha}}{1 + j\Omega \frac{J}{\alpha}} \right| \quad \text{soit} \quad \boxed{A = \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \Omega^2 J^2}}}$$

Le second membre, le forçage, est la somme d'un terme constant et d'un terme sinusoidal. Comme l'équation différentielle est linéaire, alors d'après le principe de superposition la solution particulière est la somme des réponses à chaque terme du forçage. On peut donc traiter séparément les deux termes, chercher une solution particulière pour chacun, et les sommer.

4 Ajouter à la machine tournante un anneau de masse élevée et de grand rayon augmente considérablement son moment d'inertie. Comme on peut le voir sur l'expression obtenue à la question précédente, augmenter le moment d'inertie permet de diminuer l'amplitude des variations de vitesse angulaire : **un volant d'inertie permet donc de stabiliser la vitesse angulaire de rotation de la machine tournante**. En contre-partie, augmenter le moment d'inertie a aussi pour effet **d'augmenter la durée des régimes transitoires** avant que la vitesse angulaire n'atteigne sa valeur stationnaire de consigne.

Exercice 2 : Des poulies en équilibre



- Moment et résultante d'actions mécaniques ;
- Force de tension d'un fil.

1 La poulie 1, d'axe Δ_1 est soumise à

- Son propre poids $m_0 \vec{g}$. Compte tenu de la symétrie circulaire de la poulie, son centre d'inertie où s'applique le poids est situé sur l'axe Δ_1 , le moment du poids par rapport à cet axe est donc nul.
- Une force exercée par le fil attaché à la masse m_1 , égale à \vec{P}_1 car le système est à l'équilibre et le fil idéal transmet parfaitement les efforts. Son point d'application est I , voir figure 1, donc son bras de levier vaut R (rayon de la poulie) et elle est donc de moment

$$\mathcal{M}_{\Delta_1} = +P_1 R = +m_1 g R$$

Le signe « + » tient au fait que \vec{P}_1 tend à faire tourner la poulie en sens direct autour de Δ_1 .

- Une force exercée par le fil relié au point d'attache A , égale à $-\vec{T}_1$ compte tenu de la définition de \vec{T}_1 . Son point d'application est J , donc son bras de levier est également R , et son moment vaut

$$\mathcal{M}_{\Delta_1} = -T_1 R,$$

le signe étant attribué car la force tend à faire tourner la poulie en sens horaire autour de Δ_1 .

- Une action mécanique de liaison autour de l'axe Δ_1 , de résultante \vec{R}_1 impossible à déterminer directement mais de moment nul par rapport à Δ_1 car les frottements d'axe sont négligés.

2 Le dispositif étant à l'équilibre, c'est a fortiori le cas de la poulie 1, donc on en déduit que la somme des moments qu'elle subit est nulle,

$$m_1 g R - T_1 R = 0 \quad \text{soit} \quad \boxed{T_1 = m_1 g}$$

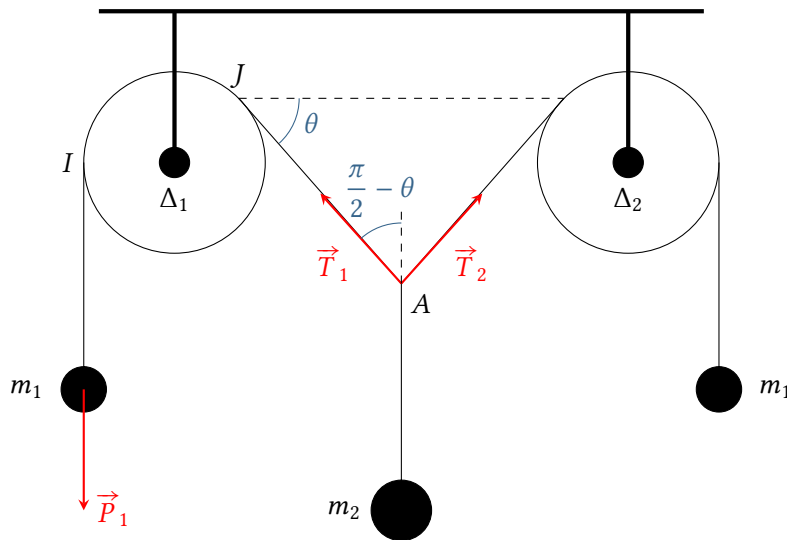


Figure 1 – Équilibre de deux poulies. Schéma introduisant les notations complémentaires du corrigé.

On a ici montré un résultat postulé en début d'année : lorsqu'un fil passe par une poulie, la force exercée sur ses extrémités change de direction mais pas de norme.

- 3 L'action mécanique de liaison permet une liaison pivot parfaite. Son moment par rapport à l'axe Δ_1 est donc nul, comme annoncé dans la première question. D'après le théorème du centre d'inertie, comme la poulie 1 est à l'équilibre, alors la somme des forces extérieures qui s'appliquent sur la poulie est nulle, donc

$$m_0 \vec{g} + \vec{P}_1 - \vec{T}_1 + \vec{R}_1 = \vec{0} \quad \text{soit} \quad \vec{R}_1 = \vec{T}_1 + (m_0 + m_1) \vec{g}$$

- 4 Comme le système est symétrique, le même raisonnement permet de montrer que le fil reliant la poulie 2 au point A exerce au point A une force \vec{T}_2 symétrique de \vec{T}_1 par rapport à la verticale, voir figure 1, et en particulier de norme $m_1 g$. En outre, le fil relié à la masse m_2 transmet parfaitement les efforts, donc le point A est également soumis à une force $m_2 \vec{g}$. Comme le point A est à l'équilibre, alors

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + m_2 \vec{g} = \vec{0}$$

ce qui donne en projetant sur la direction verticale ascendante

$$T_1 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + T_2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - m_2 g = 0 \quad \text{soit} \quad m_1 g \sin \theta + m_1 g \sin \theta - m_2 g = 0$$

ce qui donne finalement

$$\sin \theta = \frac{m_2}{2m_1}$$

On remarque que si $m_2 > 2m_1$ cette solution n'est pas définie : si la masse centrale est trop lourde, elle entraîne les deux masses sur les côtés et l'ensemble tombe. L'équilibre est impossible. Au contraire, si $m_2 \ll m_1$, on pratiquement $\theta = 0$: le fil supérieur est presque horizontal, ce qui est cohérent avec l'intuition.

Exercice 3 : Entre le pendule simple et le pendule pesant, le pendule lesté



- Théorème du moment cinétique ;
- Théorème de la résultante cinétique.

1 La tige a un mouvement de rotation autour de l'axe z . Comme il s'agit d'un solide, l'équation du mouvement s'obtient par le théorème du moment cinétique scalaire autour de l'axe Oz .

- **Système** : tige et masses.
- **Référentiel** : terrestre, qui est galiléen en bonne approximation pour un tel mouvement.
- **Repérage** : polaire de centre O ;
- **Bilan des actions mécaniques** :
 - le contact entre la tige et le bâti est modélisé par une liaison pivot, qu'on suppose implicitement parfaite donc de moment

$$\mathcal{M}_z(\text{liaison}) = 0 ;$$

- Lorsque $\theta > 0$, le poids \vec{P}_1 de M_1 fait tourner la tige en sens indirecte et a un bras de levier

$$b_1 = \frac{L}{2} \sin \theta$$

d'où un moment

$$\mathcal{M}_z(\vec{P}_1) = -mg \times \frac{L}{2} \sin \theta$$

- De même,

$$\mathcal{M}_z(\vec{P}_2) = -mgL \sin \theta .$$

Le moment du poids peut également se retrouver par projection et calcul du produit vectoriel :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_z(\vec{P}_1) &= [\overrightarrow{OM_1} \wedge m\vec{g}] \cdot \vec{e}_z \\ &= \left[\frac{L}{2} \vec{e}_r \wedge m(g \cos \theta \vec{e}_r - g \sin \theta \vec{e}_\theta) \right] \cdot \vec{e}_z \\ &= -\frac{mgL}{2} \sin \theta [\vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta] \cdot \vec{e}_z \\ \mathcal{M}_z(\vec{P}_1) &= -\frac{mgL \sin \theta}{2} \end{aligned}$$

N'hésitez pas à privilégier cette approche si vous n'êtes pas à l'aise avec le bras de levier.

- **Théorème du moment cinétique** : par additivité du moment cinétique, le moment cinétique du système est la somme des moments cinétiques de ses constituants, soit

$$L_z = J_1 \dot{\theta} + J_2 \dot{\theta} + \underbrace{J_{\text{tige}}}_{\text{négl}} \dot{\theta} = \frac{mL^2}{4} \dot{\theta} + mL^2 \dot{\theta} = \frac{5}{4} mL^2 \dot{\theta}$$

Aucun moment d'inertie n'est à connaître, mais franchement dans le cas d'une masse ponctuelle retenir que $J = mr^2$ est beaucoup plus rapide que de recalculer le moment cinétique par projection ... ce qui reste néanmoins possible. Par exemple, pour la masse M_1 dont le mouvement est circulaire,

$$L_{z, M_1 / \mathcal{R}} = \vec{L}_{O, M_1 / \mathcal{R}} \cdot \vec{u}_z = (m \overrightarrow{OM_1} \wedge \vec{v}_{M_1}) \cdot \vec{u}_z = m \left(\frac{L}{2} \vec{e}_r \wedge \frac{L}{2} \dot{\theta} \vec{u}_\theta \right) \cdot \vec{u}_z$$

ce qui conduit bien au résultat.

D'après le TMC,

$$\frac{dL_z}{dt} = \mathcal{M}_z(\vec{P}_1) + \mathcal{M}_z(\vec{P}_2) \quad \text{soit} \quad \frac{5}{4} mL^2 \ddot{\theta} = -\frac{3}{2} mgL \sin \theta$$

ce qui donne en simplifiant

$$\ddot{\theta} + \frac{6g}{5L} \sin \theta = 0$$

2 Par application de la définition,

$$2m \overrightarrow{OG} = m \overrightarrow{OM_1} + m \overrightarrow{OM_2} \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{OG} = \frac{1}{2} \frac{L}{2} \vec{u}_r + \frac{1}{2} L \vec{u}_r \quad \text{d'où} \quad \overrightarrow{OG} = \frac{3}{4} L \vec{u}_r.$$

3 Appliquons le théorème du moment cinétique à ce nouveau système, un point matériel G de masse $2m$ situé à distance $3L/4$ de l'axe maintenu par une tige rigide de moment d'inertie négligeable en liaison pivot parfaite autour de (Oz) . Son poids a pour moment

$$\mathcal{M}_z(\vec{P}) = -2mg \times \frac{3L}{4} \sin \theta,$$

et son moment cinétique par rapport à l'axe z vaut

$$L_{z,G} = 2m \times \frac{9L^2}{16} \dot{\theta} = \frac{9mL^2}{8} \dot{\theta}.$$

D'après le théorème du moment cinétique,

$$\frac{9mL^2}{8} \ddot{\theta} = -\frac{3}{2} mgL \sin \theta \quad \text{soit} \quad \ddot{\theta} + \frac{4g}{3L} \sin \theta = 0$$

On n'aboutit pas à la même équation du mouvement, ce qui signifie que **les deux systèmes ne sont pas équivalents**.

La conclusion à retenir que la dynamique d'un solide en rotation n'est pas donnée par celle d'un point matériel situé en son centre d'inertie. C'est une différence importante avec un solide translation, pour lequel on aurait obtenu la même équation avec les deux modèles.

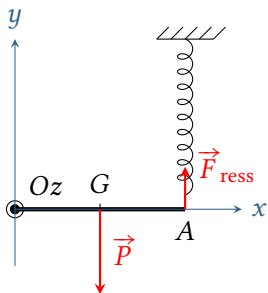
Exercice 4 : Barre fixée à ses extrémités

oral CCINP MP | 🧠 2 | ✂️ 2 | ⚙️



► Théorème du moment cinétique.

🚫🚫🚫 **Attention!** Sur tous les dessins, la base doit absolument être dessinée **directe** pour que les produits vectoriels s'expriment correctement.



1 Étudions la barre, en mouvement par rapport au référentiel terrestre, considéré galiléen. Par hypothèse, dans la position d'équilibre, la barre est horizontale et le ressort vertical, ce qui permet d'orienter les forces. Comme les forces sont perpendiculaires à la barre, utiliser le bras de levier donne immédiatement les résultats. Elle est soumise à son poids, exercé en G au centre de la barre, de moment

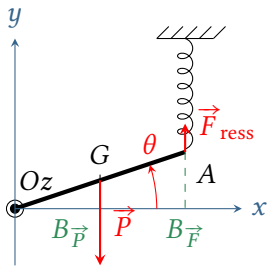
$$\mathcal{M}_z(\text{poids}) = -mg \times a$$

et à la force de rappel exercée par le ressort, exercée en A , de moment

$$\mathcal{M}_z(\text{ressort}) = +k(\ell_{\text{éq}} - \ell_0) \times 2a.$$

La liaison pivot exerce une force dirigée selon $+\vec{e}_y$, mais son moment est nul car la droite d'action de la force passe par l'axe de rotation. Dans la position d'équilibre, on a alors

$$\mathcal{M}_z(\text{poids}) + \mathcal{M}_z(\text{ressort}) = 0 \quad \text{soit} \quad -mga + 2ak(\ell_{\text{éq}} - \ell_0) = 0 \quad \text{d'où} \quad \ell_{\text{éq}} = \ell_0 + \frac{mg}{2k}.$$



2 On suppose maintenant la barre inclinée d'un angle θ .

⚠⚠⚠ **Attention!** L'angle doit absolument être dessiné positif pour que les signes soient corrects.

Méthode 1 : conservation de l'énergie mécanique. L'énergie cinétique de la barre vaut

$$E_c = \frac{1}{2} I_z \dot{\theta}^2 = \frac{2}{3} m a^2 \dot{\theta}^2.$$

Son énergie potentielle compte deux contributions, celle de pesanteur et celle élastique.

$$E_{pp} = mgy_G = mga \sin \theta \simeq mga \theta$$

$$E_{pe} = \frac{1}{2} k (\ell - \ell_0)^2 = \frac{1}{2} k (\ell_{\text{eq}} - 2a \sin \theta - \ell_0)^2 \simeq \frac{1}{2} k \left(\frac{mg}{2k} - 2a\theta \right)^2$$

en remplaçant ℓ_{eq} par son expression. Ainsi,

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{d}{dt} (E_c + E_{pp} + E_{pe}) = 0$$

soit

$$\frac{2}{3} m a^2 \times 2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mga\dot{\theta} + \frac{1}{2} k \times 2 \left(2a\theta - \frac{mg}{2k} \right) 2a\dot{\theta} = 0$$

ce qui conduit en simplifiant par $\dot{\theta}$ à

$$\frac{4}{3} m a^2 \ddot{\theta} + 4ka^2 \theta = 0 \quad \text{et} \quad \ddot{\theta} + \frac{3k}{m} \theta = 0$$

On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0 = \sqrt{3k/m}$, d'où on déduit la période propre

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{3k}}.$$

Méthode 2 : théorème du moment cinétique. Utilisons toujours le bras de levier pour déterminer les moments. Le moment du poids vaut

$$\mathcal{M}_z(\text{poids}) = -mg \times OB_{\vec{P}} = -mga \cos \theta \simeq -mga$$

car $\theta \ll 1$. Le moment de la force exercée par le ressort vaut

$$\mathcal{M}_z(\text{ressort}) = +k(\ell - \ell_0) \times OB_{\vec{F}} = +k(\ell_{\text{eq}} - 2a \sin \theta - \ell_0) \times 2a \cos \theta \simeq +2ka(\ell_{\text{eq}} - 2a\theta - \ell_0)$$

En remplaçant ℓ_{eq} par son expression,

$$\mathcal{M}_z(\text{ressort}) = +2ka \left(\ell_0 + \frac{mg}{2k} - 2a\theta - \ell_0 \right) = mga - 4ka^2 \theta$$

Ainsi, d'après le théorème du moment cinétique,

$$I_z \ddot{\theta} = -mga + mga - 4ka^2 \theta \quad \text{donc} \quad \ddot{\theta} + \frac{4ka^2}{I_z} \theta = 0 \quad \text{soit} \quad \ddot{\theta} + \frac{3k}{m} \theta = 0$$

Exercice 5 : Régulateur d'Archereau-Foucault



- Théorème du moment cinétique ;
- Force de tension d'un fil.

Toute l'étude est menée dans le référentiel terrestre, supposé galiléen en très bonne approximation.

- 1** Comme le fil est inextensible et tendu, aussi bien sur la partie « libre » que sur la partie enroulée, alors tous les points du fil ont la même vitesse instantanée. Raisononnons par exemple sur la descente du contrepoids. Les points du fil enroulés sur le cylindre sont en mouvement circulaire à vitesse angulaire $\dot{\theta} = \omega > 0$, leur vitesse vaut donc $R\omega > 0$. Les autres points du fil se trouvant sur la partie tendu se déplacent vers le bas à la vitesse $\dot{z} > 0$ du contrepoids. Ainsi,

$$\dot{z} = R\omega.$$

- 2** Considérons comme système le point matériel P . Il est soumis à son poids $m\vec{g}$ et à la force de tension du fil \vec{T}' , verticale et vers le haut. D'après le PFD,

$$m\ddot{z}\vec{e}_z = m\vec{g}\vec{e}_z + \vec{T}' \quad \text{d'où} \quad \vec{T}' = m(\ddot{z} - g)\vec{e}_z.$$

Comme le fil est supposé idéal et tendu, alors il transmet parfaitement la force et exerce en I une force $\vec{T} = -\vec{T}'$ de même norme mais de sens opposé. Ainsi,

$$\vec{T} = m(g - \ddot{z})\vec{e}_z.$$

- 3** Raisononnons sur le cylindre, solide de moment d'inertie J_x . Les actions mécaniques qu'il subit sont
- les frottements avec l'air, qui exercent un couple $\Gamma_f = -\lambda\omega$;
 - la force \vec{T} , de bras de levier R , a un moment non nul qui vaut $+TR$ car elle tend à faire tourner le cylindre dans le sens direct,
 - la liaison pivot et le poids du cylindre exercent tous les deux un moment nul par rapport à l'axe Ox car leur droite d'action (Oz) coupe l'axe (Ox).

D'après le théorème du moment cinétique

$$J_x \frac{d\omega}{dt} = -\lambda\omega + m(g - \ddot{z})R$$

Or d'après la première question $\ddot{z} = R\dot{\omega}$, donc

$$J_x \frac{d\omega}{dt} = -\lambda\omega + mgR - mR^2 \frac{d\omega}{dt}$$

ce qui conduit à

$$(J_x + mR^2) \frac{d\omega}{dt} + \lambda\omega = mgR.$$

- 4** Écrite sous forme canonique, cette équation devient

$$\frac{d\omega}{dt} + \frac{\lambda}{J_x + mR^2} \omega = \frac{mgR}{J_x + mR^2},$$

faisant apparaître un temps caractéristique

$$\tau = \frac{J_x + mR^2}{\lambda}.$$

Comme le forçage est constant, une solution particulière est donnée par

$$\omega_p = \frac{mgR}{\lambda},$$

et la forme générale des solutions est

$$\omega(t) = A e^{-t/\tau} + \omega_p,$$

où la constante A se détermine à partir des conditions initiales. Au bout d'une durée de l'ordre de 5τ , la vitesse de rotation devient donc pratiquement égale à ω_p : **le dispositif permet de réguler la vitesse de rotation du cylindre.**

Exercice 6 : Balourd

oral banque PT | 3 | 2



- Théorème du moment cinétique ;
- Force de tension d'un fil ;
- Petites oscillations autour d'une position d'équilibre.

1 Deux types de mouvement sont possibles :

- si m est suffisamment faible, alors le poids du balourd suffit à compenser celui de la masse et il existe une position d'équilibre ;
- si m est trop élevée, alors le poids de la masse entraîne le cylindre en rotation et le fil se déroule complètement. Le moment du poids du balourd est maximal pour $\theta = \pi/2$, voir figure 2. À l'équilibre dans cette situation limite, en utilisant les bras de levier pour calculer les moments par rapport à Ox ,

$$\mathcal{M}_{b,\max} + \mathcal{M}_m = -Mgd + mga = 0 \quad \text{soit} \quad m = m_c = M \frac{d}{a}.$$

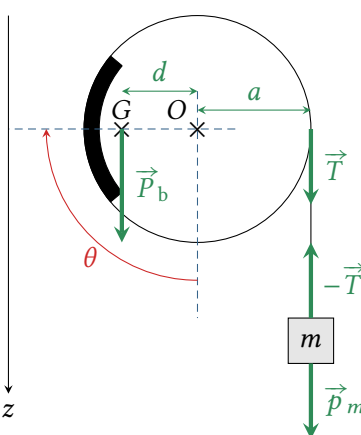


Figure 2 – Position d'équilibre lorsque $m = m_c$.

2 Évidemment, on suppose $m < m_c$. À l'équilibre, $\vec{T} = \vec{p}_m = m\vec{g}$, et le point d'application de \vec{T} ne dépend pas de θ , donc son moment par rapport à (Ox) vaut toujours

$$\mathcal{M}_{\vec{T}} = \|\vec{T}\|a = mga.$$

Le moment du poids du balourd vaut

$$\mathcal{M}_b = (\vec{OG} \wedge \vec{P}_b) \cdot \vec{e}_x = -Mgd \sin \theta$$

Dans la position d'équilibre, ces deux moments se compensent donc

$$-Mgd \sin \theta_e + mga = 0 \quad \text{d'où} \quad \theta_e = \arcsin \frac{ma}{Md}.$$

On retrouve la condition d'existence de la position d'équilibre : pour qu'elle soit définie, il faut

$$ma < Md \quad \text{soit} \quad m < \frac{Md}{a} = m_c.$$

3 **Attention !** Lorsque le système n'est pas à l'équilibre, il n'y a plus égalité entre la tension du fil et le poids de la masse m . En effet, le théorème de la résultante cinétique appliquée à cette masse m donne

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{p}_m - \vec{T} \neq \vec{0}.$$

Il faut donc être particulièrement vigilant ! Appliquons le théorème du moment cinétique au cylindre, soumis au poids du balourd de moment

$$\mathcal{M}_b = (\overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{P}_b) \cdot \vec{e}_x = -Mgd \sin \theta$$

et à la tension du fil, de moment

$$\mathcal{M}_{\vec{T}} = \|\vec{T}\|a.$$

D'après le théorème de la résultante cinétique appliquée à la masse m , cf. ci-dessus,

$$\vec{T} = m\vec{g} - m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - m\ddot{z}\vec{e}_z.$$

Il est maintenant nécessaire de relier z à θ : lorsque le balourd tourne de $d\theta > 0$ alors la masse descend de $dz = a d\theta > 0$, donc $\dot{z} = a\dot{\theta}$ et par suite $\ddot{z} = a\ddot{\theta}$. Ainsi,

$$\vec{T} = m(g - a\ddot{\theta})\vec{e}_z \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_{\vec{T}} = mag - ma^2\ddot{\theta}.$$

D'après le théorème du moment cinétique,

$$J\ddot{\theta} = -Mgd \sin \theta + mag - ma^2\ddot{\theta}.$$

En conclusion, et sachant que $J = Ma^2$, l'équation du mouvement s'écrit

$$(m + M)a^2\ddot{\theta} + Mgd \sin \theta = mga$$

Comme le fil est inextensible, alors le système constitué du balourd, de la poulie, du fil et de la masse à soulever n'est soumis à aucune force dissipative, et une méthode énergétique peut conduire à l'équation du mouvement de manière plus rapide. Attention toutefois, dès lors que le système est déformable, beaucoup de prudence est de mise car les théorèmes énergétiques exigent de considérer les actions mécaniques intérieures au système.

L'axe (Oz) étant orienté vers le bas, l'énergie mécanique totale du système vaut

$$E_m = \underbrace{\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 - Mgd \cos \theta}_{\text{balourd}} + \underbrace{0}_{\text{fil sans masse}} + \underbrace{\frac{1}{2}m\dot{z}^2 - mgz}_{\text{masse}}.$$

Ainsi,

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 = J\dot{\theta}\ddot{\theta} + Mgd \dot{\theta} \sin \theta + m\dot{z}\ddot{z} - mg\dot{z}.$$

Le même raisonnement géométrique que précédemment permet de relier les dérivées de z et $\dot{\theta}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} J\dot{\theta}\ddot{\theta} + Mgd \dot{\theta} \sin \theta + ma^2\dot{\theta}\ddot{\theta} - mga\dot{\theta} &= 0 \\ (J + ma^2)\dot{\theta}\ddot{\theta} + Mgd \sin \theta - mga &= 0 \end{aligned}$$

4 Linéarisons cette équation au voisinage de l'équilibre. On pose $\theta = \theta_e + \varepsilon$, avec $\varepsilon \ll 1$, ce qui permet un développement limité du sinus :

$$\sin(\theta_e + \varepsilon) \simeq \sin \theta_e + \varepsilon \cos \theta_e.$$

Il s'agit ni plus ni moins de la formule de Taylor au premier ordre

$$f(a + h) = f(a) + hf'(a) + o(h)$$

Attention au développement limité : ce n'est pas l'angle θ qui est faible, mais bien l'écart ε . Faire un développement limité par rapport à θ au voisinage de 0 est donc faux.

L'équation différentielle devient

$$(m + M)a^2\ddot{\varepsilon} + Mgd \cos \theta_e \varepsilon = -Mgd \sin \theta_e + mga,$$

et compte tenu de l'expression de $\sin \theta_e$ obtenue à la question précédente on obtient

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{Mgd \cos \theta_e}{(m + M)a^2} \varepsilon = 0.$$

Il est normal de trouver un second membre nul : l'équation différentielle porte sur l'écart à la position d'équilibre, qui est par définition nul lorsque le système est à l'équilibre.

On reconnaît l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation propre

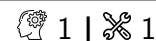
$$\omega_0^2 = \frac{Mgd \cos \theta_e}{(m+M)a^2} = \frac{Mgd \sqrt{1 - \left(\frac{ma}{Md}\right)^2}}{(m+M)a^2} = \frac{g}{(m+M)a^2} \sqrt{M^2 d^2 - m^2 a^2}$$

d'où on déduit la période des oscillations

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{(m+M)a^2}{g \sqrt{M^2 d^2 - m^2 a^2}}}$$

Énergie en rotation

Exercice 7 : Lancer d'une toupie



- Énergie en rotation ;
- Travail d'une action mécanique sur un déplacement fini.

Commençons par un schéma de la toupie en vue de dessus pour fixer les notations, figure 3. En toute rigueur, la force \vec{F} est appliquée au fil entourant la toupie, mais en supposant celui-ci parfait (inextensible), cette force se retrouve au point I .

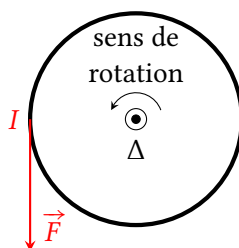


Figure 3 – Schéma de la toupie vue de dessus.

1 Comme on peut le constater sur le schéma, la force \vec{F} est tangente à la toupie, appliquée en un point situé à distance R de l'axe de rotation. Comme elle tend à faire tourner la toupie en sens direct autour de l'axe de rotation Δ , son moment vaut donc

$$\mathcal{M}_\Delta(F) = +FR. \quad \text{d'où} \quad \mathcal{P}(\vec{F}) = FR\omega.$$

2 La toupie est soumise à son poids, qui ne travaille pas car son altitude reste constante, à la force de réaction du sol qui ne travaille pas non plus car son point d'application (la pointe de la toupie) est immobile, et à la force \vec{F} dont la puissance a été calculée à la question précédente. D'après le théorème de l'énergie cinétique appliqué dans le référentiel terrestre,

$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} J \omega^2 \right) = \mathcal{P}(\vec{F}) \quad \text{d'où} \quad J \omega \dot{\omega} = FR \omega$$

ce qui donne finalement pour l'accélération angulaire

$$\dot{\omega} = \frac{FR}{J} = \frac{2F}{mR}.$$

Bien sûr, le théorème du moment cinétique même également au résultat.

3 Comme la question concerne la vitesse à un instant donné seulement, il faut privilégier la loi intégrale de l'énergie cinétique,

$$E_{c,f} - E_{c,i} = W_{i \rightarrow f}(\vec{F})$$

Le travail de F peut se calculer par exemple à partir de l'expression de la puissance. Comme $\mathcal{P} = FR\omega$ où ω est la vitesse angulaire, alors on en déduit le travail élémentaire

$$\delta W = \mathcal{P} dt = FR\omega dt = FR d\theta.$$

En intégrant ce travail élémentaire sur les quatre tours, on trouve


$$W_{i \rightarrow f}(\vec{F}) = FR(4 \times 2\pi),$$

d'où finalement

$$\frac{1}{2}J\omega_f^2 - 0 = 8\pi FR \quad \text{et} \quad \boxed{\omega_f = \sqrt{\frac{32\pi F}{mR}}}.$$

Exercice 8 : Gravimètre de Holweck–Lejay



-  *Énergie potentielle dont dérive un couple ;*
Positions d'équilibre et stabilité ;
Petites oscillations autour d'une position d'équilibre.

1 Le couple de rappel élastique \mathcal{M}_r dépend de la position mais ni du temps, ni de la vitesse, ni des autres forces. Cherchons une fonction E_p telle que

$$\delta W_r = -dE_{pr} \quad \text{soit} \quad dE_{pr} = C\theta d\theta \quad \text{d'où} \quad E_{pr} = \frac{1}{2}C\theta^2$$

en choisissant E_{pr} nulle en $\theta = 0$ où le couple est nul. La masse m est également soumise à son poids, qui dérive de l'énergie potentielle de pesanteur

$$E_{pp} = mgz = mgL \cos \theta$$

Ainsi, l'énergie totale de masse s'écrit

$$\boxed{E_p = \frac{1}{2}C\theta^2 + mgL \cos \theta.}$$

2 Les positions d'équilibre de la tige correspondent aux extremums de l'énergie potentielle,

$$\frac{dE_p}{d\theta}(\theta_{\text{éq}}) = C\theta_{\text{éq}} - mgL \sin \theta_{\text{éq}} = 0$$

ce qui conduit à l'équation voulue

$$\boxed{\sin \theta_{\text{éq}} = \frac{C}{mgL} \theta_{\text{éq}} \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{C}{mgL}.}$$

3 On constate que $\theta_{\text{éq}} = 0$ est toujours position d'équilibre. De plus, par parité si θ est position d'équilibre alors $-\theta$ l'est également. Or vous avez montré en maths que $\forall x \geq 0, \sin x \leq x$ donc $\sin \theta_{\text{éq}} \leq \theta_{\text{éq}}$. Ainsi, si $C/mgL > 1$ la seule position d'équilibre possible est $\theta_{\text{éq}} = 0$, alors que si $C/mgL < 1$ d'autres positions d'équilibre apparaissent par paire, voir figure 4, au minimum deux autres mais potentiellement davantage si C/mgL est très faible.

Pour déterminer analytiquement la stabilité d'une position d'équilibre, il faut calculer la dérivée seconde de l'énergie potentielle et étudier son signe,

$$\frac{dE_p}{d\theta} = C\theta - mgL \sin \theta \quad \text{donc} \quad \frac{d^2E_p}{d\theta^2} = C - mgL \cos \theta.$$

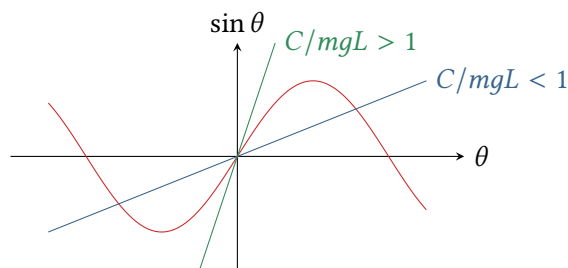


Figure 4 – Détermination des positions d'équilibre du gravimètre. Résolution graphique de l'équation $\sin \theta_{\text{eq}} = \frac{C}{mgL} \theta_{\text{eq}}$.

Ainsi, la dérivée seconde en $\theta = 0$ est positive si $C > mgL$ (équilibre stable) et négative sinon (équilibre instable).

Étudier la stabilité des autres positions d'équilibre est plus compliqué, néanmoins on peut remarquer que toutes celles qui correspondent à un angle θ appartenant à un intervalle où \sin est décroissant sont stables car cela signifie que $\cos \theta < 0$ donc la dérivée seconde est forcément positive. C'est en particulier le cas des deux premières positions symétriques représentées figure 4. On ne peut rien dire de général pour les positions d'équilibre se trouvant dans un domaine où \sin est croissant.

4 Pour qu'il puisse y avoir oscillations autour de $\theta = 0$, il faut que la position d'équilibre associée soit stable, donc

$$C > mgL.$$

5 Le profil d'énergie potentielle au voisinage de $\theta = 0$ s'écrit

$$E_p = \underbrace{E_p(\theta=0)}_{mgL} + \underbrace{\frac{dE_p}{d\theta}(\theta=0)}_{=0} \theta + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{d^2E_p}{d\theta^2}(\theta=0)}_{=C-mgL} \theta^2 = mgL + \frac{1}{2}(C - mgL)\theta^2.$$

Le point M est en mouvement circulaire de rayon L à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$, donc

$$E_c = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2,$$

On reconnaît l'énergie cinétique d'un solide de moment d'inertie $J = mL^2$, ce qui est évident puisque la masse m est ponctuelle à distance L de l'axe de rotation.

On en déduit l'énergie mécanique :

$$E_m = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 + mgL + \frac{1}{2}(C - mgL)\theta^2.$$

Toutes les actions mécaniques étant conservatives,

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 = \underbrace{mL^2\dot{\theta}\ddot{\theta}}_{\text{TEM}} + \underbrace{(C - mgL)\theta\dot{\theta}}_{\text{expr}}$$

d'où on déduit l'équation du mouvement linéarisée,

$$mL^2\ddot{\theta} + (C - mgL)\theta = 0 \quad \text{soit} \quad \ddot{\theta} + \frac{C - mgL}{mL^2}\theta = 0$$

On reconnaît l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation propre

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{C - mgL}{mL^2}} \quad \text{soit} \quad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{mL^2}{C - mgL}}$$

Pour bien comprendre le fonctionnement du gravimètre, posons $g_0 = C/mL$, d'où

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_0 - g}}$$

On remarque que si g_0 est réglé très proche de la valeur de g , alors de faibles variations de la valeur de g , par exemples dues à des variations de densité dans le sous-sol, se traduisent par de fortes variations de la période des oscillations, aisément mesurables.

Problèmes ouverts

Exercice 9 : Vitesse d'un marcheur

oral banque PT | 🧠 3 | ✂️ 2



► *Problème ouvert.*

Commençons par déterminer la fréquence des pas, en modélisant une jambe par un pendule pesant fait de la tige homogène dont l'énoncé donne le moment d'inertie. Elle est soumise à son propre poids qui s'exerce en G , au niveau du genou, à une distance $\ell/2$ de l'axe et aux actions d'une liaison pivot supposée parfaite au niveau de la hanche. Par la technique du bras de levier, le moment du poids par rapport à l'axe de rotation vaut

$$\mathcal{M}_z(\vec{P}) = -\frac{mg\ell}{2} \sin \theta.$$

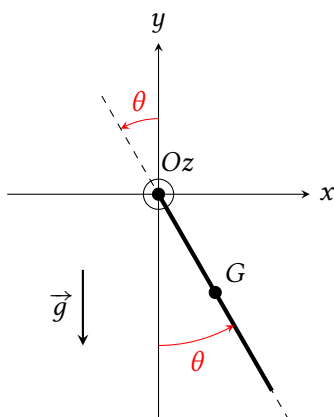


Figure 5 – Modélisation d'une jambe.

D'après le théorème du moment cinétique appliqué à la jambe dans le référentiel terrestre, supposé galiléen,

$$J\ddot{\theta} = \mathcal{M}_z(\vec{P}) + \underbrace{\mathcal{M}_{z,\text{pivot}}}_{\text{parfaite}} = -\frac{mg\ell}{2} \sin \theta$$

ce qui conduit à l'équation du mouvement

$$\ddot{\theta} + \frac{mg\ell}{2J} \sin \theta = 0.$$

Le mouvement de la jambe étant d'amplitude assez faible (45° grand maximum), on peut linéariser le sinus et approximer la pulsation des oscillations à la pulsation propre,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mg\ell}{2J}} = \sqrt{\frac{3g}{2\ell}}$$

et ainsi la période du mouvement est de l'ordre de

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2\ell}{3g}}.$$

En considérant qu'une jambe mesure environ 1 m, on trouve numériquement

$$T \simeq 1,6 \text{ s}$$

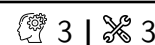
ce qui semble tout à fait raisonnable. En supposant par ailleurs qu'un pas mesure un peu moins d'un mètre, disons $d = 80 \text{ cm}$ pour simplifier les calculs, on peut en déduire la vitesse de marche, mais attention, un pas ne correspond qu'à la moitié d'une période du mouvement de la jambe.

$$v = \frac{2d}{T} = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \simeq 3,6 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}.$$

On trouve un ordre de grandeur excellent, puisque la vitesse typique de marche est de l'ordre de 4 à 5 $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$.

On pourrait conclure que le modèle est assez chanceux de retomber sur la bonne valeur. Dans le cas présent, je pense plutôt que l'accord est dû au fait que l'évolution (la biologie) a favorisé un mouvement de marche qui se fasse à moindre coût pour le corps humain, et qui donc exploite au mieux les lois de la physique.

Exercice 10 : Œuf dur en rotation



► *Problème ouvert.*

Notons a et $b < a$ le demi-grand axe et le demi-petit axe de l'œuf. L'énergie mécanique est la somme de l'énergie potentielle de pesanteur mgz_G (axe z vertical vers le haut) et de l'énergie cinétique $\frac{1}{2}J\omega^2$. Deux cas sont à comparer :

- ou bien l'œuf tourne autour de son petit axe (« à plat »), avec un moment d'inertie $J_{\text{pt.a.}}$, et son énergie mécanique s'écrit

$$E_{\text{pt.a.}} = \frac{1}{2}J_{\text{pt.a.}}\omega^2 + mgb.$$

- ou bien l'œuf tourne autour de son grand axe (« à la verticale »), avec un moment d'inertie $J_{\text{gd.a.}}$ et un centre de masse plus haut, et son énergie mécanique s'écrit

$$E_{\text{pt.a.}} = \frac{1}{2}J_{\text{gd.a.}}\omega^2 + mga.$$

L'œuf adopte toujours la position d'énergie mécanique minimale car c'est celle qui est atteinte en premier lorsqu'on le lance en lui apportant progressivement de l'énergie.

- à basse vitesse, le terme d'énergie potentielle est prépondérant et comme $b < a$, alors l'œuf tourne préférentiellement autour de son petit axe ;
- à haute vitesse, le terme d'énergie cinétique est prépondérant et comme $J_{\text{gd.a.}} < J_{\text{pt.a.}}$ (la masse est globalement plus proche de l'axe de rotation), alors l'œuf tourne préférentiellement autour de son grand axe.

Il existe donc bien une vitesse limite pour laquelle l'œuf se redresse, telle que les deux configurations aient la même énergie mécanique, soit

$$\frac{1}{2}J_{\text{pt.a.}}\omega^2 + mgb = \frac{1}{2}J_{\text{gd.a.}}\omega^2 + mga \quad \text{d'où} \quad \omega_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{2mg(a-b)}{J_{\text{pt.a.}} - J_{\text{gd.a.}}}}.$$

En estimant $b \sim 2 \text{ cm}$ et $a \sim 3 \text{ cm}$,

$$\begin{cases} \frac{J_{\text{pt.a.}}}{m} = 2,6 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \\ \frac{J_{\text{gd.a.}}}{m} = 1,6 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\omega_{\text{lim}} = 44 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \sim 7 \text{ tours par seconde,}}$$

ce qui semble être une vitesse de rotation très élevée pour être atteignable par un lancer à la main.