




Solide en rotation

-  Difficulté d'analyse et compréhension, initiative requise ;
-  Difficulté technique et calculatoire ;
-  Exercice classique et/ou important.

Flasher ou cliquer
pour accéder
au corrigé



Se préparer

Applications de cours

Ces applications de cours sont des briques élémentaires des raisonnements à mener dans les exercices : les maîtriser est incontournable. Elles sont toutes traitées de manière exhaustive dans le cours.

M9.1 - Appliquer le théorème du moment cinétique et le théorème de la résultante cinétique au pendule pesant. Lequel de ces théorèmes conduit à l'équation du mouvement? Quelle information apporte l'autre?

M9.2 - Établir l'équation du mouvement du pendule pesant par un théorème énergétique.

M9.3 - Établir le profil d'énergie potentielle du pendule pesant. Analyser les positions d'équilibre et leur stabilité. Montrer qu'il peut présenter deux types de comportement, qualifiés de « pendulaire » et « révolutif ».

M9.4 - Écrire un programme Python permettant résoudre l'équation différentielle adimensionnée $\ddot{\theta} + \sin \theta = 0$ à l'aide de la fonction `odeint` du module `scipy.integrate` sur l'intervalle de temps adimensionné $[0, 20]$. On commencera par établir le système différentiel pertinent avant toute écriture de code. On donne la spécification de la fonction `odeint` :

```
odeint(func, X0, t)
```

Paramètres d'entrée :

`func` : fonction de X et du temps t qui renvoie la dérivée $\dot{X} = [\dot{x}, \ddot{x}]$ du vecteur d'état $X = [x, \dot{x}]$ à l'instant t sous forme d'une liste à deux éléments.

`X0` : vecteur condition initiale $X(t=0) = [x(t=0), \dot{x}(t=0)]$.

`t` : tableau des instants pour lesquels doit être calculée la valeur de $X(t)$.

Valeur de retour :

Tableau à deux colonnes contenant les valeurs de $X(t) = [x(t), \dot{x}(t)]$.

Cahier d'Entraînement

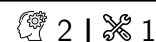


Le *Cahier d'Entraînement* est un projet collaboratif mené par des enseignants de CPGE, proposant aux étudiants des entraînements leur permettant de travailler en autonomie sur des techniques et « réflexes » utiles dans les exercices, en particulier calculatoires. Il est librement téléchargeable en scannant ou cliquant sur le QR-code ci-contre.

↪ pour ce chapitre : 13.10, 13.11, 13.12

Théorème du moment cinétique

Exercice 1 : Volant d'inertie



- ▷ Théorème du moment cinétique ;
- ▷ Représentation complexe et régime sinusoïdal forcé.

On s'intéresse dans cet exercice à la régulation de la vitesse de rotation d'une machine tournante par un volant d'inertie, qui est un anneau lié au rotor de masse élevée et d'assez grand rayon. La machine tournante en question peut aussi bien être un moulin à blé qu'un broyeur de cailloux, mais les volants d'inertie sont également utilisés en Formule 1 dans le KERS « Kinetic Energy Recovering System ».

On modélise ici la machine tournante par un rotor de moment d'inertie J , soumis à un couple moteur Γ_0 constant et à un couple de frottement de type fluide $\Gamma_f = -\alpha\omega$ où α est une constante et ω la vitesse angulaire du rotor.

1 - Justifier par un argument énergétique que $\alpha > 0$.

2 - Le rotor est initialement immobile. Donner l'évolution de sa vitesse angulaire $\omega(t)$, en introduisant la vitesse finale ω_∞ et un temps caractéristique τ .

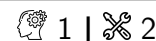
Des vibrations du dispositif se traduisent par un nouveau couple exercé sur le rotor, que l'on prendra harmonique $\Gamma_{\text{vib}}(t) = \gamma \cos(\Omega t)$. On cherche la vitesse angulaire du rotor sous la forme

$$\omega(t) = \omega_\infty + A \cos(\Omega t + \varphi).$$

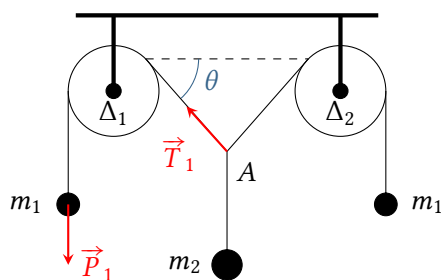
3 - En raisonnant sur $u(t) = \omega(t) - \omega_\infty$, déterminer l'amplitude A .

4 - En déduire l'intérêt et l'inconvénient d'un volant d'inertie.

Exercice 2 : Des poulies en équilibre



- ▷ Moment et résultante d'actions mécaniques ;
- ▷ Force de tension d'un fil.



On s'intéresse au dispositif ci-contre, à l'équilibre et dans un plan. Les deux poulies sont identiques, de même rayon R et masse m_0 , et les deux liaisons pivot avec le bâti sont modélisées par des liaisons parfaites : les frottements d'axe sont négligés. Les fils sont également tous supposés idéaux, c'est-à-dire qu'ils sont inextensibles et de masse négligeable. Enfin, on suppose que les fils ne glissent pas sur les poulies.

La force \vec{P}_1 est le poids de la masse m_1 . La force \vec{T}_1 est exercée par le fil touchant la poulie d'axe Δ_1 sur le fil relié à la masse m_2 . Comme il s'agit d'une force de contact, son point d'application est le point d'attache A entre les deux fils.


1 - Faire un bilan soigneux des actions mécaniques s'appliquant à la poulie 1. Pour chaque action mécanique, indiquer s'il s'agit d'une force ou d'un couple et préciser, s'il est possible de le déterminer, le moment de l'action mécanique par rapport à l'axe Δ_1 .

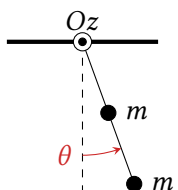
2 - Par application du théorème du moment cinétique à la poulie 1, montrer qu'en norme $T_1 = P_1 = m_1 g$.

3 - Caractériser l'action mécanique de liaison entre la poulie 1 et le bâti. Exprimer sa résultante \vec{R}_1 et son moment en fonction de \vec{T}_1 , m_0 , m_1 et \vec{g} .

4 - Déterminer l'angle θ et analyser qualitativement la vraisemblance du résultat.

Exercice 3 : Entre le pendule simple et le pendule pesant, le pendule lesté  2 |  2 | 


-  \triangleright Théorème du moment cinétique ;
- \triangleright Théorème de la résultante cinétique.

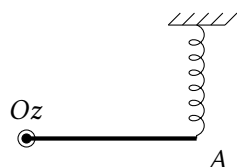


On considère un pendule formé d'une tige rigide de longueur L sur laquelle sont fixées deux masses m identiques à distance $L/2$ et L du centre. On néglige le moment d'inertie de la tige.

- 1 - Établir l'équation du mouvement.
- 2 - Montrer que le centre de masse G du système se trouve à distance $3L/4$ de l'axe.
- 3 - Est-il équivalent d'appliquer le théorème du moment cinétique à un point matériel de masse $2m$ situé au centre de masse G ?

Exercice 4 : Barre fixée à ses extrémités oral CCINP MP |  2 |  2 | 


-  \triangleright Théorème du moment cinétique.

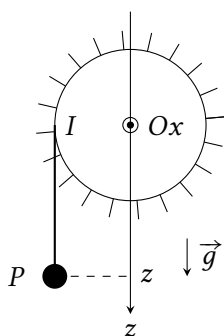


Considérons le système mécanique représenté ci-contre, constitué d'une barre de masse m , de longueur $OA = 2a$, libre de tourner sans frottement autour de l'axe Oz . Son moment d'inertie par rapport à cet axe vaut $I_z = \frac{4}{3}ma^2$. Elle est attachée en A à un ressort de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k . L'autre extrémité du ressort est fixe.

- 1 - Dans la position d'équilibre, la barre est horizontale et le ressort vertical. Donner la longueur du ressort à l'équilibre en fonction de k et de ℓ_0 .
- 2 - La barre est légèrement écartée de sa position d'équilibre puis lâchée sans vitesse initiale. Déterminer la période des petites oscillations. Comme les angles sont très petits, on pourra considérer que le point A se déplace verticalement.

Exercice 5 : Régulateur d'Archereau-Foucault  2 |  2 | 

-  \triangleright Théorème du moment cinétique ;
- \triangleright Force de tension d'un fil.



Un régulateur d'Archereau-Foucault, schématisé ci-contre, est un dispositif ancien, qui a été utilisé par exemple en horlogerie ou dans des boîtes à musique.

On le modélise de façon simple par un contrepoids P de masse m accroché à un fil de masse négligeable devant m . Le fil est enroulé autour d'un cylindre tournant librement autour de son axe Ox fixé à un bâti, de rayon R et de moment d'inertie J_x . La chute de P entraîne la mise en rotation du cylindre. Ce cylindre est muni d'ailettes pour augmenter l'effet des frottements de l'air. On modélise leur action mécanique sur le cylindre par un couple de frottement $\Gamma_f = -\lambda\omega$, où $\omega = \dot{\theta}$ est la vitesse angulaire de rotation du cylindre.

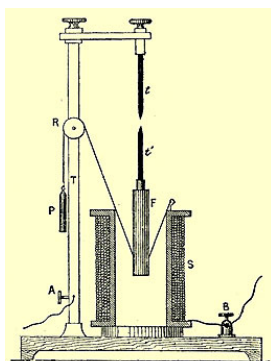
- 1 - Montrer que $\dot{z} = R\omega$.
- 2 - Montrer que la force \vec{T} de tension du fil exercée en I sur le cylindre est donnée par

$$\vec{T} = m(g - \ddot{z})\vec{e}_z.$$

- 3 - Montrer que la vitesse angulaire de rotation ω vérifie l'équation différentielle

$$(J_x + mR^2)\frac{d\omega}{dt} + \lambda\omega = mgR$$

- 4 - Résoudre cette équation. En déduire l'intérêt du dispositif.

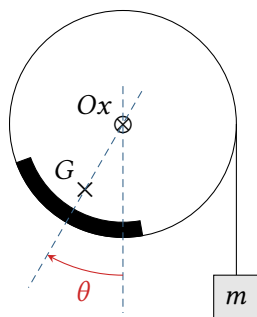


Exercice 6 : Balourd

oral banque PT | 3 | 2



- ▷ Théorème du moment cinétique ;
- ▷ Force de tension d'un fil ;
- ▷ Petites oscillations autour d'une position d'équilibre.



Un cylindre d'axe (Ox) et de rayon a tourne librement. Un dépôt sur la paroi du cylindre forme un balourd de masse M et centre de masse G . On pose $OG = d$. Le moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation vaut $J = Ma^2$. On néglige la masse propre et l'inertie du cylindre devant celles du balourd. Une masse m est accrochée à un fil inextensible de masse nulle enroulé autour du cylindre.

- 1 - Expliquer qualitativement le mouvement obtenu pour plusieurs valeurs de la masse m . Identifier une masse critique m_c .
- 2 - Déterminer l'angle d'équilibre θ_e .
- 3 - Établir l'équation différentielle vérifiée par θ .
- 4 - Donner la période des petites oscillations du système autour de sa position d'équilibre.

Énergie en rotation

Exercice 7 : Lancer d'une toupie

1 | 1



- ▷ Énergie en rotation ;
- ▷ Travail d'une action mécanique sur un déplacement fini.



On modélise le lancer d'une toupie à l'aide d'un fil inextensible enroulé sur quatre tours sur le corps de la toupie. La toupie est modélisée par un cylindre de masse m et de rayon R , de moment d'inertie par rapport à son axe $mR^2/2$. Une pointe de moment d'inertie négligeable permet à la toupie de tenir sur le sol horizontal. On suppose que pendant tout son mouvement la toupie reste verticale et ne glisse pas sur le sol. Le fil est tiré avec une force de norme F constante pour lancer la toupie.

On note ω la vitesse angulaire instantanée de la toupie, et on suppose la toupie immobile à l'instant $t = 0$ où l'on commence à tirer sur le fil.

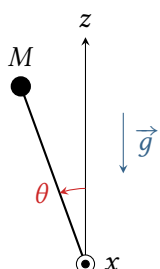
- 1 - Exprimer la puissance instantanée de la force \vec{F} .
- 2 - Dédire du théorème de l'énergie cinétique l'accélération angulaire $\dot{\omega}$ de la toupie.
- 3 - Quelle est la vitesse angulaire de la toupie lorsque les quatre tours de fil ont été déroulés ?

Exercice 8 : Gravimètre de Holweck–Lejay

2 | 2 |



- ▷ Énergie potentielle dont dérive un couple ;
- ▷ Positions d'équilibre et stabilité ;
- ▷ Petites oscillations autour d'une position d'équilibre.



Instrument ancien, un gravimètre de Holweck–Lejay est constitué d'une tige de longueur L , libre de tourner autour d'un axe Ox , au bout de laquelle est placée une masse m . On néglige le moment d'inertie de la tige et on ne tient compte que de la masse située à son extrémité. Un ressort spirale, non représenté sur le dessin, tend à retenir la tige en position verticale par un couple $\mathcal{M}_r = -C\theta$ autour de l'axe de rotation.

- 1 - Montrer que le couple \mathcal{M}_r dérive d'une énergie potentielle. En déduire l'énergie potentielle totale de la masse m en fonction de l'angle θ .
- 2 - Montrer que les positions d'équilibre θ_{eq} de la tige vérifient $\sin \theta_{eq} = \alpha \theta_{eq}$, avec α une constante à déterminer.

3 - Étudier le nombre et la stabilité des positions d'équilibre en fonction de C .

4 - Le gravimètre exploite les oscillations de faible amplitude autour de $\theta = 0$. Comment la constante de raideur C du ressort spirale doit-elle être choisie ?

5 - Déterminer la période de ces oscillations en termes de $g_0 = C/mL$ et expliquer l'utilisation de l'appareil en gravimètre, c'est-à-dire comme appareil de mesure des variations de g .

Problèmes ouverts

Exercice 9 : Vitesse d'un marcheur

oral banque PT |  3 |  2





▷ *Problème ouvert.*

Retrouver à partir des dimensions de votre corps l'ordre de grandeur de votre vitesse de marche.

Donnée : le moment d'inertie d'une tige rectiligne, homogène, de masse m et longueur ℓ par rapport à une de ses extrémité vaut $J = m\ell^2/3$.

Exercice 10 : Œuf dur en rotation

 3 |  3



▷ *Problème ouvert.*



Un œuf dur posé sur une table est mis en rotation. Montrer qu'il existe une vitesse angulaire limite au delà de laquelle l'œuf se redresse spontanément et se met à tourner autour de son grand axe. Est-il possible de l'atteindre en lançant l'œuf à la main ?

Données : moments d'inertie d'un ellipsoïde de masse m , de demi-grand axe a et demi-petit-axe b , en rotation autour de son grand axe ou d'un de ses petits axes :

$$J_{\text{gd.a.}} = \frac{2}{5}mb^2 \quad \text{et} \quad J_{\text{pt.a.}} = \frac{1}{5}m(a^2 + b^2).$$