

# Propagation et interférences

## Plan du cours

<b>I Ondes progressives</b>	<b>2</b>
I.A Définition . . . . .	2
I.B Représentations spatio-temporelles. . . . .	2
I.C Expressions mathématiques. . . . .	4
I.D Ondes planes progressives harmoniques . . . . .	5
I.E Chemin optique . . . . .	7
<b>II Interférences à deux ondes</b>	<b>10</b>
II.A Onde résultant d'une superposition. . . . .	10
II.B Intensité et formule de Fresnel . . . . .	11
II.C Conditions d'interférences . . . . .	13
<b>III Expérience des trous d'Young</b>	<b>15</b>
III.A Dispositifs d'Young . . . . .	15
III.B Différence de marche à grande distance . . . . .	16
III.C Figure d'interférences . . . . .	18

- R Résultat à connaître par cœur.      M Méthode à retenir, mais pas le résultat.  
D Démonstration à savoir refaire.      Q Aspect qualitatif uniquement.

*Les paragraphes sans mention en marge sont là pour faciliter votre compréhension ou pour votre culture mais n'ont pas forcément besoin d'être appris en tant que tel.*

Pas besoin d'une longue introduction pour dire que les ondes sont partout ! C'est probablement l'un des concepts les plus transversaux de la physique. Elles apparaissent spontanément dans la nature, et constituent aussi le principal moyen de transmission d'information.



On appelle **onde** la propagation de proche en proche d'une perturbation, associée à un transport d'énergie sans transport de matière à grande distance.

### Classification rudimentaire :

- ▶ les ondes **mécaniques** ont besoin d'un milieu matériel pour se propager, au contraire des ondes **électromagnétiques**, qui peuvent également se propager dans le vide.
- ▶ la perturbation induite par une **onde transverse** est orthogonale à sa direction de propagation, alors que celle associée à une **onde longitudinale** lui est parallèle.

R

**Exemples :**

- ▶ *Houle* : onde mécanique transverse quantifiée par l'écart de la hauteur d'eau par rapport à sa position de repos
- ▶ *Lumière issue du Soleil* : OEM transverse (cf. l'an prochain) quantifiée par un champ  $\vec{E}$  et un champ  $\vec{B}$ .
- ▶ *Son dans l'air* : onde mécanique longitudinale quantifiée par une surpression, aussi appelée pression acoustique.

Espace 1

Espace 2

Espace 3

## I - Ondes progressives

### I.A - Définition



On appelle **onde plane progressive** ou **onde progressive unidimensionnelle** une onde qui se propage sans déformation dans une direction bien définie.

La vitesse de propagation  $c$  est appelée **célérité** de l'onde.

↪ une onde plane progressive (OPP) correspond à l'image intuitive qu'on se fait d'une onde.

**Exemples :** *houle, laser, etc.*

Espace 4

**Contre-exemples :**

*Rond dans l'eau : il y a étalement donc pas une onde plane ;*

*Corde de guitare : il n'y a pas de propagation (onde stationnaire)*

*Onde acoustique dans une mousse isolante : il y a absorption donc déformation.*

Espace 5

**Ordres de grandeur de célérité :**

- ▶ ondes électromagnétiques dans le vide :  $3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
- ▶ ondes acoustiques dans l'air à température ambiante :  $340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
- ▶ ondes sismiques : environ  $2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$
- ▶ houle : typiquement  $1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

### I.B - Représentations spatio-temporelles

Pour un exemple visuel, raisonnons sur une onde de type houle. La grandeur ondulatoire est l'écart vertical entre la position d'un point de la surface de l'eau et sa position au repos, noté  $\xi(x, t)$  où  $x$  est l'abscisse de ce point mesurée le long de la direction de propagation de la vague.

Pour représenter une OPP, le plus visuel est un film où on voit l'onde avancer ... pas très pratique sur une feuille ! On utilise donc deux types de représentation :

- ▶ représentation **spatiale** (type photo) : on représente toute la corde à un instant  $t_0$  donné (tous les  $x$ , un seul  $t = t_0$ )
- ▶ représentation **temporelle** (type chronogramme) : on représente le signal enregistré au cours du temps par un capteur situé à une position  $x_0$  donnée (tous les  $t$ , un seul  $x = x_0$ ).

**Application 1 : Propagation d'une vague**



Compléter la figure 1 en dessinant l'allure du signal enregistré par le capteur selon le sens de propagation de la vague. Attention aux échelles et à la position de l'instant  $t = 0$  !

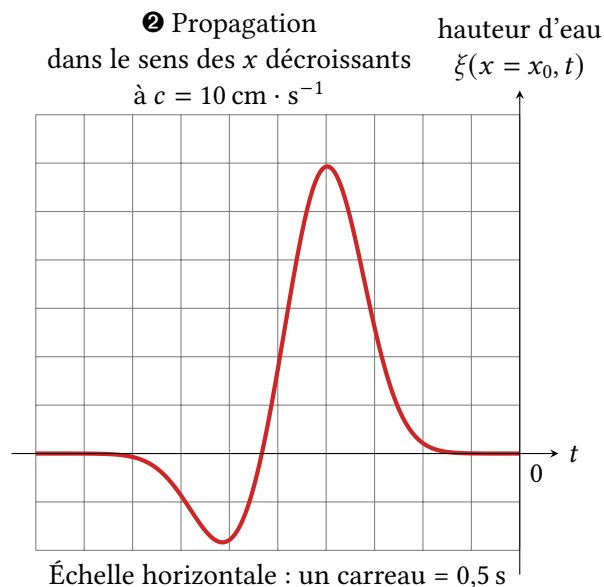
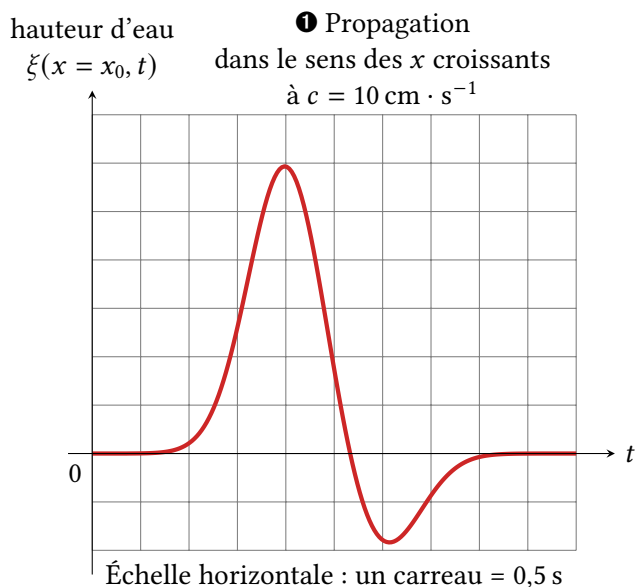
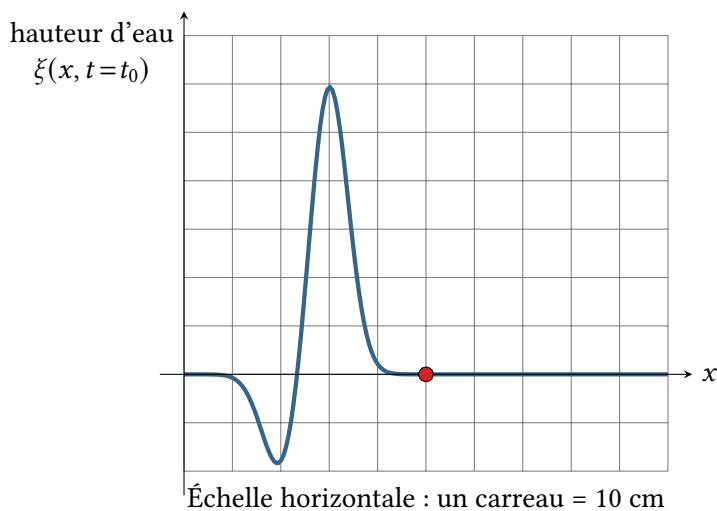


Figure 1 – Représentations d'une onde plane progressive.

⇒ Généralisation :



Le lien entre l'allure des représentations spatiale et temporelle d'une même onde dépend du sens de propagation, elles peuvent apparaître inversées l'une par rapport à l'autre.



## I.C - Expressions mathématiques

Dans le cas général, une onde dépend des variables d'espace et de temps de manière couplée, mais les propriétés d'une OPP permettent d'envisager une expression plus simple.

### • OPP se propageant dans le sens des $x$ croissants

**Première expression :** la perturbation se trouvant en  $x$  à l'instant  $t$  se trouvait en  $x - ct$  à l'instant  $t = 0$ .

On a donc :  $\xi(x, t) = \xi(x - ct, 0)$

En posant  $f(x) = \xi(x, 0)$  on peut alors écrire  $\xi(x, t) = f(x - ct)$ .

Interprétation de  $f$  : allure de la corde à  $t = 0$ .

Espace 6

**Deuxième expression :** la perturbation se trouvant en  $x > 0$  à l'instant  $t$  se trouvait en  $x = 0$  à l'instant  $t - x/c$ .

On a donc :  $\xi(x, t) = \xi(0, t - x/c)$

En posant  $F(t) = \xi(0, t)$  on peut alors écrire  $\xi(x, t) = F(t - x/c)$

Interprétation de  $F$  : signal acquis par un capteur placé en  $x = 0$  (ou perturbation imposée par la source)

Espace 7

### • OPP se propageant dans le sens des $x$ décroissants

Les mêmes raisonnements s'appliquent en remplaçant  $x - ct$  et  $t - x/c$  par  $x + ct$  et  $t + x/c$ .

$$\xi(x, t) = g(x + ct) = G(t + x/c)$$

Espace 8

### • Conclusion

Une onde plane progressive peut toujours s'écrire

comme une fonction d'une unique variable combinant espace et temps :

$$\xi_{\rightarrow}(x, t) = f(x - ct) = F\left(t - \frac{x}{c}\right) \quad \text{et} \quad \xi_{\leftarrow}(x, t) = g(x + ct) = G\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

R



M

### Application 2 : Onde sur une corde



Considérons une corde tendue à l'horizontale, dont l'une des extrémités est attachée au bas d'un ressort vertical. À l'instant  $t = 0$ , une petite impulsion est donnée au point  $S$  de sorte qu'il oscille verticalement de manière amortie :  $y_S(t) = H e^{-t/\tau} \sin(\omega t)$ .

**1 -** Représenter l'allure de la corde à un instant  $t > 0$  et la position  $y_M(t)$  d'un point  $M$  quelconque au cours du temps.

**2 -** Donner l'expression de l'ébranlement  $\xi(x, t)$ , c'est-à-dire l'écart entre la position à l'instant  $t$  et la position d'équilibre du point de la corde d'abscisse  $x$ .

## I.D - Ondes planes progressives harmoniques

### I.D.1 - Définition

On appelle **onde plane progressive harmonique** ou **sinusoïdale** ou **monochromatique** une onde plane progressive dont la dépendance en temps est sinusoïdale.

**Expression mathématique** : pour une OPPH se propageant à la célérité  $c$ ,

$$\xi(x, t) = A \cos \left( \omega \left( t \pm \frac{x}{c} \right) + \varphi \right) = A \cos \left( \omega t \pm \frac{\omega}{c} x + \varphi \right)$$

Espace 9

Une OPPH de pulsation  $\omega$  se propageant le long de l'axe  $(Ox)$  s'écrit

$$\xi(x, t) = A \cos (\omega t \pm kx + \varphi)$$

On lui associe la représentation complexe

$$\underline{\xi}(x, t) = A e^{j(\omega t \pm kx + \varphi)}$$

Un signe  $-$  indique une propagation dans le sens des  $x$  croissants, un signe  $+$  dans le sens des  $x$  décroissants.

Le **vecteur d'onde**  $\vec{k} = \pm k \vec{e}_x$  est le vecteur de norme  $k$  orienté dans la direction et le sens de la propagation.

La pulsation et la norme du vecteur d'onde sont reliées par la **relation de dispersion**  $\omega = kc$ .

*Remarque* : il existe des milieux dans lesquels la relation de dispersion n'est pas si simple, cf. paragraphe I.D.3.

### Intérêt du modèle de l'OPPH :

- ▶ une OPPH ne peut pas exister : elle existerait en tout point de l'Univers, depuis  $t \rightarrow -\infty$  et jusque  $+\infty$ , et serait donc associée à une énergie infinie.
- ▶ son intérêt vient de l'analyse de Fourier : toute onde réelle peut se décomposer comme une combinaison linéaire d'OPPH, formant ce qu'on appelle un **paquet d'ondes**.

### I.D.2 - Double périodicité

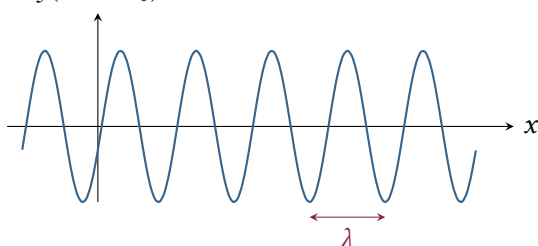
Une OPPH est une fonction « doublement sinusoïdale » : du temps à position fixée, mais aussi de l'espace à un instant donné. À partir de l'expression mathématique on en déduit que la pulsation (temporelle) est  $\omega$  et que la « pulsation spatiale » est  $k$ .

La **période temporelle** d'une OPH vaut  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ .

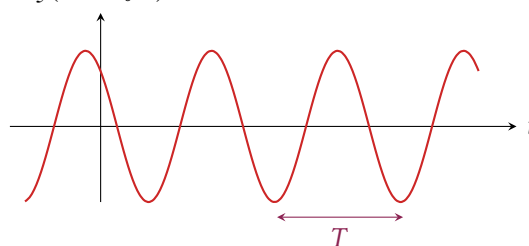
Sa période spatiale, appelée **longueur d'onde**, vaut  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ .

La longueur d'onde et la période temporelle sont reliées par la **relation de dispersion** :  $\lambda = cT$ .

photo  
 $\xi(x, t = t_0)$



chronogramme  
 $\xi(x = x_0, t)$



**Démonstration :**

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega} = cT$$

Espace 10

→ la relation de dispersion permet de relier n'importe quelle grandeur caractéristique de la périodicité spatiale à n'importe quelle grandeur caractéristique de la périodicité temporelle.

**I.D.3 - Dispersion**

Bien que fréquente, la situation envisagée au paragraphe I.D.1 n'est pas générale. Dans certains milieux, la vitesse de propagation d'une OPPH peut dépendre de sa fréquence : le milieu est alors dit **dispersif**. La relation de dispersion  $k = f(\omega)$  ne s'écrit plus simplement  $k = \omega/c$  mais devient non-linéaire.

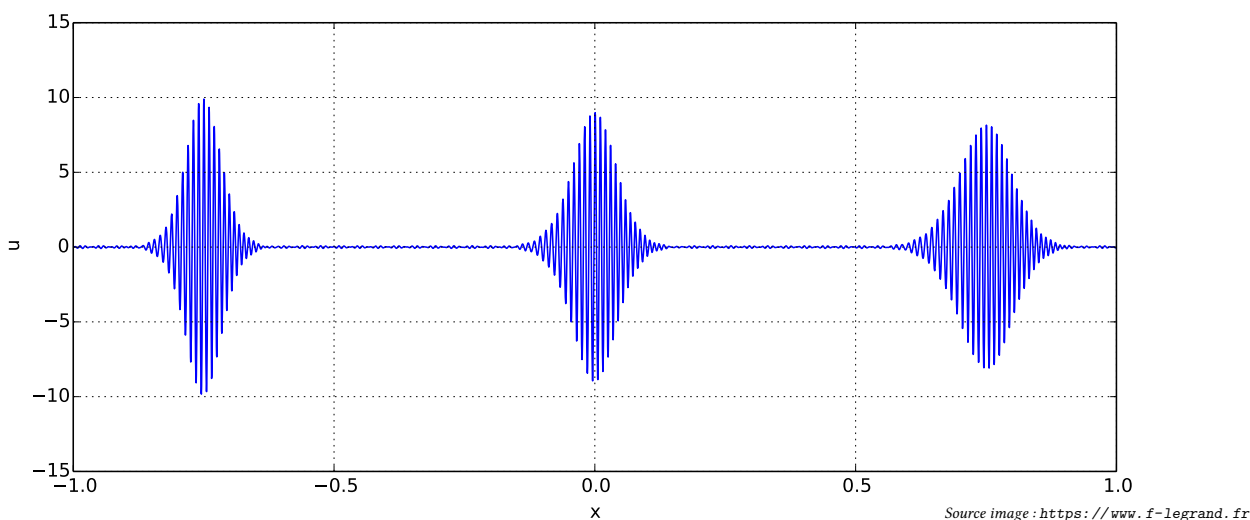
La célérité n'est pas définie dans un milieu dispersif : il n'y a pas *une* vitesse de propagation unique pour *toutes* les ondes. Une vitesse pertinente est la **vitesse de phase**, définie comme la vitesse de propagation d'une OPPH de pulsation  $\omega$  :

$$v_{\varphi}(\omega) = \frac{\omega}{k(\omega)}.$$

De plus, des OPP « quelconques » n'existent pas dans un milieu dispersif : les paquets d'onde s'étalent, voir figure 2, car toutes leurs composantes harmoniques ne se propagent pas à la même vitesse. L'avancée globale du paquet d'onde se fait à une vitesse appelée **vitesse de groupe**, qui se déduit de la relation de dispersion par

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}.$$

Vous établirez et exploiterez ce résultat l'année prochaine.



**Figure 2 – Déformation d'un paquet d'onde sous l'effet de la dispersion.**

**Exemple 1 :** La propagation des vagues à proximité du rivage est dispersive, et obéit à la relation de dispersion

$$\omega^2 = gk \tanh(kh) \quad \text{d'où} \quad v_{\varphi} = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh(kh)}$$

où  $g$  est l'accélération de la pesanteur et  $h$  la hauteur d'eau. On peut ainsi comprendre le déferlement : la vitesse de phase est plus élevée lorsque la hauteur d'eau augmente, si bien les crêtes des vagues finissent par rattraper et dépasser les creux, et donc par s'effondrer.

**Exemple 2 :** Certaines couches de l'atmosphère sont des plasmas, c'est-à-dire un mélange d'électrons et d'ions créé par l'ionisation des molécules d'air sous l'effet du rayonnement solaire. Les ondes électromagnétiques vérifient alors la relation de dispersion

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

où  $\omega_p$  est une pulsation caractéristique du plasma, et  $c$  la célérité de la lumière dans le vide. Cette relation montre que seules les ondes de pulsation supérieure à  $\omega_p$  peuvent se propager, avec une vitesse de phase

$$v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$$

Les ondes de pulsation  $\omega < \omega_p$  conduisent à un vecteur d'onde  $k$  imaginaire pur, ce qui signifie qu'elles sont absorbées par le plasma (démonstration l'an prochain).

### I.D.4 - Déphasage propagatif

En raison de la propagation, les signaux enregistrés par deux capteurs situés en deux points différents sur le chemin d'une OPPH ont la même amplitude, la même fréquence, mais sont déphasés : on parle de **déphasage propagatif**.



On appelle **phase** de l'onde en un point  $M$ , notée  $\phi(M)$ , son déphasage par rapport au forçage imposé par la source.

R

#### Application 3 : Déphasage propagatif

Considérons l'OPPH  $\xi(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi)$ , émise par une source  $S$  située en  $x = 0$ . Un capteur placé au point  $M$  d'abscisse  $x$  enregistre le signal  $s_M(t)$ .

- 1 - Exprimer le forçage  $s_0(t)$  imposé par la source, et le signal  $s_M(t)$  enregistré par le capteur. Identifier leurs phases initiales  $\varphi_S$  et  $\varphi_M$ .
- 2 - En déduire la phase  $\phi(M) = \varphi_M - \varphi_S$  entre les deux signaux en fonction de  $x$  et  $\lambda$ .
- 3 - Déterminer la durée  $\tau$  mise par l'onde pour atteindre le point  $M$ . En déduire une deuxième expression du déphasage  $\phi(M)$  en fonction de  $\tau$  et  $\omega$ .

M

### I.E - Chemin optique

La finalité de ce chapitre est l'étude des interférences lumineuses, pour lesquelles ces notions sont les plus pertinentes. On se place donc dans ce cadre pour ce paragraphe.

Qualitativement, les rayons lumineux de l'optique géométrique s'interprètent comme les trajets suivis par les ondes lumineuses. Connaître la phase d'une onde lumineuse en un point  $M$  quelconque demande donc de connaître le temps de parcours d'un rayon lumineux allant de la source  $S$  jusqu'au point  $M$ .

Q

#### I.E.1 - Indice optique



On appelle **indice optique** d'un milieu le rapport entre la vitesse de la lumière dans le vide  $c$  et la vitesse de la lumière dans ce milieu  $c'$ ,

$$n = \frac{c}{c'} > 1.$$

R

**Ordres de grandeur :** les indices optiques prennent toujours des valeurs proches de 1, par exemple 1,33 pour l'eau, entre 1,5 et 1,7 pour le verre, en fonction du mode de fabrication, ou encore 1,5 pour le PVC.

Lorsqu'une onde monochromatique passe d'un milieu à un autre, sa célérité change. La relation de dispersion implique alors que la fréquence et/ou la longueur d'onde doivent également être modifiées : en effet,  $\omega = kc \neq kc'$  si  $c' \neq c$ . On admet :

R



La fréquence et donc la pulsation d'une OPPH sont invariantes par changement de milieu, mais le vecteur d'onde et la longueur d'onde sont modifiés.

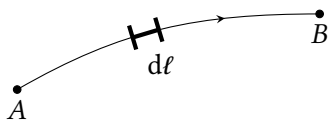
M

#### Application 4 : Longueur d'onde et indice optique

Déterminer la longueur d'onde  $\lambda'$  dans un milieu d'indice  $n$  en fonction de la longueur d'onde  $\lambda$  dans le vide.

► **Pour approfondir** : La raison pour laquelle la fréquence est invariante par changement de milieu tient à la linéarité des équations de Maxwell, qui sont les équations fondamentales de l'électromagnétisme. Le justifier est hors de portée en MPSI, mais vous le ferez l'an prochain. ■

### I.E.2 - Notion de chemin optique



Considérons un rayon lumineux  $AB$  quelconque, dans un milieu potentiellement inhomogène, c'est-à-dire dont l'indice optique varie en fonction du point où l'on se trouve. On le découpe par la pensée en une suite de tronçons élémentaires de longueur infinitésimale  $d\ell$ .

Temps de parcours du rayon  $\widehat{AB}$  : Pour le tronçon de longueur  $d\ell$  autour du point  $M$  :

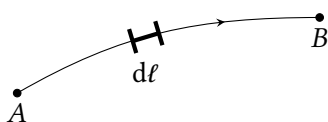
$$d\tau = \frac{d\ell}{c'(M)} = n(M) \frac{d\ell}{c}$$

Pour le rayon complet :

$$\tau = \sum_{\text{tronçons}} d\tau = \int_{\widehat{AB}} n(M) \frac{d\ell}{c} = \frac{1}{c} \int_{\widehat{AB}} n(M) d\ell$$

Espace 11

R



On appelle **chemin optique** le long d'un rayon lumineux allant de  $A$  à  $B$  la quantité homogène à une longueur

$$(\widehat{AB}) = [\widehat{AB}] = \int_{\widehat{AB}} n(M) d\ell.$$

Q

↪ interprétation qualitative :

longueur équivalente du rayon lumineux si la propagation avait lieu dans le vide

Espace 12

⚠ **Attention !** Si plusieurs rayons lumineux permettent d'aller du point  $A$  au point  $B$ , alors le chemin optique  $(\widehat{AB})$  peut dépendre du rayon suivi : c'est la cause des phénomènes d'interférences.

**En pratique :** on ne considérera que des milieux homogènes par morceaux ( $n = \text{cte}$ ), dans lesquels les rayons lumineux sont des portions de droites.

$$(AB) = [AB] = n \int_{AB} d\ell \quad \text{soit} \quad (AB) = [AB] = n AB$$

Espace 13



Dans un milieu homogène, le chemin optique est simplement le produit de la distance géométrique par l'indice optique.

$$(AB) = [AB] = n AB$$

R

### I.E.3 - Lien avec la phase

En généralisation les résultats de l'application 3, la phase  $\phi(M)$  d'une onde lumineuse s'écrit

$$\phi(M) = \omega \tau$$

où  $\tau$  est la durée pour aller de la source lumineuse  $S$  jusqu'au point d'observation  $M$ .

En introduisant le chemin optique et grâce à la relation de dispersion,

$$\phi(M) = \omega \times \frac{(SM)}{c} = \frac{2\pi}{cT}(SM) = \frac{2\pi}{\lambda}(SM)$$

où  $\lambda$  est la longueur d'onde **dans le vide**.

Espace 14

⇒ **Généralisation :** on admet que ce résultat se généralise à toute onde monochromatique (pas forcément plane progressive) et tout type de milieu.



La phase d'une onde monochromatique est reliée au chemin optique parcouru depuis la source,

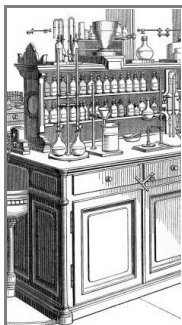
$$\phi(M) = \frac{2\pi}{\lambda}(SM)$$

où  $\lambda$  est la longueur d'onde dans le vide.

R

↪ les calculs de phase (et donc de déphasage) se ramènent ainsi à des calculs géométriques de distance parcourue dans les différents milieux.

## II - Interférences à deux ondes



*Un peu d'histoire : Les interférences acoustiques et optiques sont connues empiriquement depuis l'Antiquité, mais sans compréhension claire avant le XVII<sup>e</sup> siècle, où les travaux de Christiaan Huygens posent les premières bases conceptuelles. C'est au tout début du XIX<sup>e</sup> siècle que le phénomène a été étudié de manière approfondie, notamment par Thomas Young qui réalise en 1801 l'expérience des fentes doubles et prouve la nature ondulatoire de la lumière, et par Augustin Fresnel qui formalise le phénomène notamment sur le plan théorique. Aujourd'hui, les interférences sont exploitées pour des mesures de longueur de précision, pour réaliser des hologrammes (billets de banque, cartes bancaires, etc.), dans les télécommunications par fibre optique ou encore dans des instruments de précision, comme certains gyromètres utilisés en navigation aérospatiale ou sous-marine.*

On appelle **interférences** la variation spatiale de l'amplitude d'une onde résultant de la superposition de deux ondes de même nature. Cependant, toutes les superpositions d'ondes ne donnent pas lieu à des interférences : plusieurs personnes qui parlent en même temps, plusieurs lampes allumées, etc. On admet le résultat suivant :

Deux ondes pouvant interférer sont dites **cohérentes**.

On admet que c'est le cas si et seulement si elles vérifient les conditions suivantes :

- ▶ les deux ondes sont synchrones, c'est-à-dire de même fréquence ;
- ▶ leur différence de phase est indépendante du temps.

Dans le cas particulier des ondes lumineuses, les critères de cohérence ne peuvent être vérifiés que si les deux ondes proviennent de la même source primaire mais ont suivi deux chemins différents pour atteindre le point d'observation.

Cette spécificité des ondes lumineuses vient des mécanismes (assez compliqués !) d'émission d'ondes lumineuses par la matière : vous en direz plus en MP-MP\*.

### II.A - Onde résultant d'une superposition

#### II.A.1 - Principe de superposition

Dans un milieu linéaire,

l'onde totale résultant de la présence de deux ondes en un même point  $M$  est leur somme :

$$\xi(M, t) = \xi_1(M, t) + \xi_2(M, t).$$

Le principe de superposition sous-entend notamment que les deux ondes se croisent sans interagir l'une avec l'autre. Il est valable dans la grande majorité des milieux tant que les ondes sont d'amplitudes pas trop élevées.

**Remarque :** Cette formulation du principe de superposition est tout autant un postulat qu'une définition d'un milieu linéaire, mais cela reste sans importance pratique pour nous.

**Exemples :**

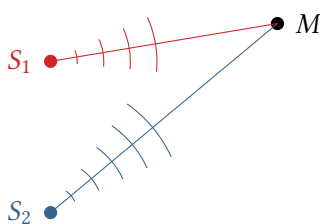
- ▶ un caillou lancé dans la mer par dessus une vague (qui ne déferle pas) engendre des ronds à la surface de la vague : il est raisonnable que la hauteur totale  $h_{\text{tot}}$  de l'eau vaille  $h_{\text{tot}} = h_{\text{vague}} + h_{\text{caillou}}$  ;
- ▶ si un chanteur s'accompagne d'une guitare, ce qu'on entend correspond à la superposition de la guitare seule et du chanteur seul, chacun émettant sa propre onde acoustique : il est raisonnable que la pression acoustique totale  $P_{\text{tot}}$  vaille  $P_{\text{tot}} = P_{\text{chanteur}} + P_{\text{guitare}}$ .

#### II.A.2 - Calcul de l'amplitude résultante

Considérons deux sources  $S_1$  et  $S_2$  émettant chacune une onde sinusoïdale dans un milieu homogène, voir figure ci-contre. Ces deux ondes se superposent dans tout l'espace, et on étudie l'onde résultante en un point  $M$ . Pour simplifier les calculs, on suppose les deux ondes de même amplitude :

$$\xi_1(M, t) = A \cos(\omega t + \phi_1(M)) \quad \text{et} \quad \xi_2(M, t) = A \cos(\omega t + \phi_2(M)),$$

où les phases  $\phi_i(M)$  sont reliées à la distance  $S_i M$  par  $\phi_i(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0}(S_i M)$ .





$$\begin{aligned}\xi(M, t) &= A \cos(\omega t + \phi_1) + A \cos(\omega t + \phi_2) \\ &= 2A \cos\left(\frac{\phi_2 - \phi_1}{2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right)\end{aligned}$$

Amplitude de l'onde résultante au point  $M$  :  $A(M) = 2A \left| \cos\left(\frac{\phi_2(M) - \phi_1(M)}{2}\right) \right| > 0$

Espace 15

→ l'amplitude de l'onde résultante dépend du déphasage  $\Delta\phi(M) = \phi_2(M) - \phi_1(M)$  entre les deux ondes, qui dépend a priori du point d'observation  $M$  : on a bien interférences.

**Remarque :** le résultat peut également se démontrer avec les représentations complexes,

$$\underline{\xi}_1(M, t) = A e^{j(\omega t + \phi_1(M))} \quad \text{et} \quad \underline{\xi}_2(M, t) = A e^{j(\omega t + \phi_2(M))}$$

ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned}\underline{\xi}(M, t) &= A(e^{j\phi_1} + e^{j\phi_2}) e^{j\omega t} \\ &= A \left( e^{-j\frac{\phi_2 - \phi_1}{2}} + e^{j\frac{\phi_2 - \phi_1}{2}} \right) e^{j\frac{\phi_2 + \phi_1}{2}} e^{j\omega t} \\ \underline{\xi}(M, t) &= 2A \cos\left(\frac{\phi_2(M) - \phi_1(M)}{2}\right) e^{j\frac{\phi_2 + \phi_1}{2}} e^{j\omega t}.\end{aligned}$$

L'onde  $\xi(M, t)$  étant sinusoïdale, son amplitude est le module de sa représentation complexe,

$$A(M) = |\underline{\xi}(M, t)| = 2A \left| \cos\left(\frac{\phi_2(M) - \phi_1(M)}{2}\right) \right|.$$

## II.B - Intensité et formule de Fresnel

### II.B.1 - Intensité d'une onde

En pratique, il est souvent intéressant de considérer l'énergie transportée par une onde plutôt que son amplitude. C'est en particulier incontournable en optique, où tous les capteurs sans exception<sup>1</sup> mesurent directement l'intensité lumineuse et non pas les champs de l'onde électromagnétique.

L'**intensité** d'une onde  $\xi(M, t)$  quantifie l'énergie moyenne qu'elle transporte.

L'intensité est proportionnelle à  $\langle \xi(M, t)^2 \rangle$ , donc indépendante du temps :

$$I(M) = \alpha \langle \xi(M, t)^2 \rangle = \frac{1}{2} \alpha |\underline{\xi}(M, t)|^2$$

En optique, l'intensité lumineuse est également appelée **éclairement**.



1. Ceci est lié à la période très rapide des ondes lumineuses, largement inférieure au temps de réponse des capteurs

**Démonstration :** montrons l'équivalence entre les deux expressions utilisant les grandeurs réelles ou complexes.

D'une part,

$$\langle \xi(M, t)^2 \rangle = A^2 \langle \cos^2(\omega t + \phi(M)) \rangle = A^2 \times \left\langle \frac{1 + \cos(2\omega t + 2\phi(M))}{2} \right\rangle = \frac{A^2}{2}.$$

D'autre part,

$$\underline{\xi}(M, t) = A e^{j(\omega t + \phi(M))} \quad \text{donc} \quad |\underline{\xi}(M, t)|^2 = A^2,$$

ce qui prouve donc le résultat.

## II.B.2 - Formule de Fresnel

R

L'intensité résultant de l'interférence de deux ondes en un point  $M$  s'écrit

$$I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta\phi(M)$$

où  $I_1$  et  $I_2$  désignent les intensités des deux ondes prises séparément,

et  $\Delta\phi(M) = \phi_2(M) - \phi_1(M)$  est leur déphasage au point  $M$ .

**Démonstration :** considérons deux ondes d'amplitudes *différentes* et utilisons les représentations complexes,

$$\underline{\xi}_1(M, t) = A_1 e^{j(\omega t + \phi_1(M))} \quad \text{et} \quad \underline{\xi}_2(M, t) = A_2 e^{j(\omega t + \phi_2(M))}$$

D

D'après le principe de superposition,

$$\underline{\xi}(M, t) = (A_1 e^{j\phi_1} + A_2 e^{j\phi_2}) e^{j\omega t}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} |\underline{\xi}(M, t)|^2 &= |A_1 e^{j\phi_1} + A_2 e^{j\phi_2}|^2 \\ &= (A_1 e^{j\phi_1} + A_2 e^{j\phi_2}) (A_1 e^{-j\phi_1} + A_2 e^{-j\phi_2}) \\ &= A_1^2 + A_2^2 + A_1 A_2 (e^{j(\phi_1 - \phi_2)} + e^{j(\phi_2 - \phi_1)}) \\ &= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\phi_2 - \phi_1) \end{aligned}$$

En multipliant le tout par  $\alpha/2$ , on identifie

$$\begin{cases} I_1 = \frac{1}{2}\alpha A_1^2 \\ I_2 = \frac{1}{2}\alpha A_2^2 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \left(\frac{1}{2}\alpha\right)^2 A_1^2 A_2^2 = I_1 I_2$$

ce qui donne finalement

$$I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta\phi(M).$$

Espace 16

### Application 5 : Formule de Fresnel pour des ondes de même intensité

- 1 - Simplifier la formule de Fresnel dans le cas où les deux ondes sont de même intensité  $I_0$ .
- 2 - Retrouver ce résultat à partir de l'expression de l'amplitude établie au paragraphe II.A,

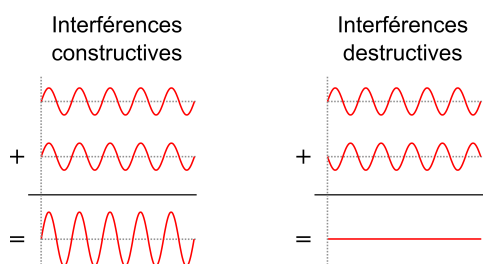
$$A(M) = 2A \left| \cos \frac{\Delta\phi}{2} \right|.$$

**Remarque :** la démonstration ci-dessus permet également de déterminer l'amplitude de l'onde totale lorsque les deux ondes qui se superposent sont d'amplitude différente :

$$A(M) = |\underline{\xi}(M, t)| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\phi_2 - \phi_1)}.$$

## II.C - Conditions d'interférences

### • Nature des interférences



Lorsque l'on superpose des ondes en phase, l'onde résultante est d'amplitude doublée alors que lorsque l'on superpose des ondes en opposition de phase, l'onde résultante est d'amplitude nulle.

R



Les interférences sont dites **constructives** en un point  $M$  si l'onde résultante est d'amplitude (et donc d'intensité) maximale.

Respectivement, elles sont dites **destructives** si l'onde résultante y est d'amplitude (et donc d'intensité) nulle.

- **Différence de marche et ordre d'interférence**

R



On appelle **différence de marche** la différence des chemins optiques entre les sources et le point d'observation,

$$\delta(M) = (S_2M) - (S_1M)$$

On appelle **ordre d'interférence**  $p(M) = \frac{\delta(M)}{\lambda}$ .

Le déphasage, la différence de marche et l'ordre d'interférence sont reliés par

$$\Delta\phi(M) = \frac{2\pi}{\lambda}\delta(M) = 2\pi p(M)$$

**Démonstration :** nous avons montré précédemment que la phase  $\phi(M)$  d'une onde émise par une source  $S$  en un point  $M$  est donnée par

$$\phi(M) = \frac{2\pi}{\lambda}(SM)$$

avec  $\lambda$  la longueur d'onde dans le vide et  $(SM)$  le chemin optique, ce qui donne directement

$$\Delta\phi(M) = \phi_2(M) - \phi_1(M) = \frac{2\pi}{\lambda}((S_2M) - (S_1M))$$

- **Conditions d'interférences**

R

	Déphasage $\Delta\phi$	Différence de marche $\delta$	Ordre d'interférence $p$
Définition	$\Delta\phi = \phi_2(M) - \phi_1(M)$	$\delta = (S_2M) - (S_1M)$	$p = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{\Delta\phi}{2\pi}$
Formule de Fresnel	$I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Delta\phi)$	$I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\delta\right)$	$I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(2\pi p)$
Interférences constructives	$\Delta\phi = 2m\pi, m \in \mathbb{Z}$	$\delta = m\lambda, m \in \mathbb{Z}$	$p = m \in \mathbb{Z}$ (ordre entier)
Interférences destructives	$\Delta\phi = (2m + 1)\pi, m \in \mathbb{Z}$	$\delta = \frac{\lambda}{2} + m\lambda, m \in \mathbb{Z}$	$p = m + \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}$ (ordre demi-entier)

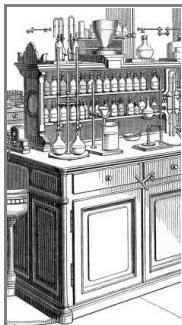
M

### Application 6 : Conditions d'interférences à partir de l'amplitude

Retrouver les conditions d'interférences en raisonnant sur l'amplitude de l'onde résultante établie au paragraphe II.A,

$$A(M) = 2A \left| \cos \frac{\Delta\phi}{2} \right|.$$

## III - Expérience des trous d'Young



*Un peu d'histoire : Thomas Young (1773-1829) est un savant britannique aux talents remarquablement variés. Enfant prodige, il apprend plusieurs langues anciennes et modernes avant de s'orienter vers la médecine, qu'il étudie à Cambridge puis à Göttingen. Médecin de profession, il se distingue surtout en physique par ses travaux en optique, notamment l'expérience qui porte son nom réalisée en 1801, qui démontre la nature ondulatoire de la lumière. Il contribue aussi à la compréhension de la vision des couleurs avec la théorie trichromatique. Par ailleurs, Young joue un rôle important dans le déchiffrement des hiéroglyphes égyptiens, préparant les travaux de Jean-François Champollion. Son œuvre illustre l'esprit encyclopédique des savants de son époque.*

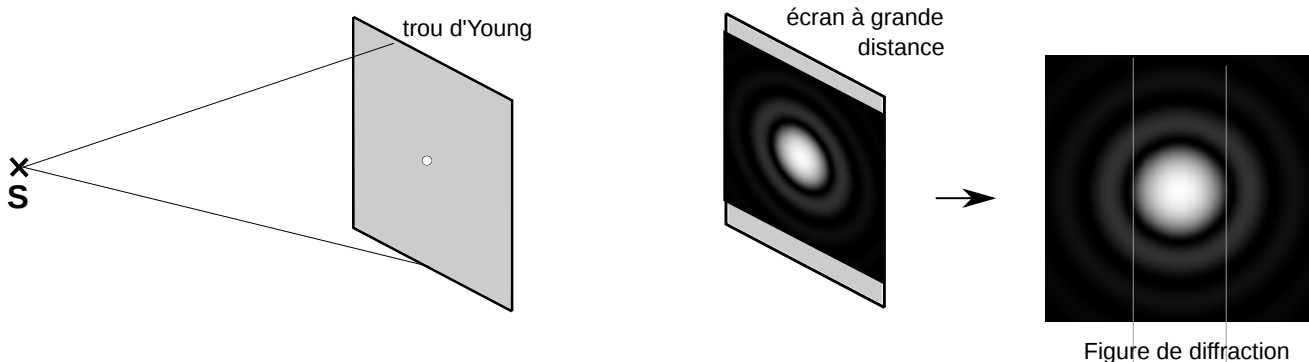
### III.A - Dispositifs d'Young

#### III.A.1 - Trous d'Young

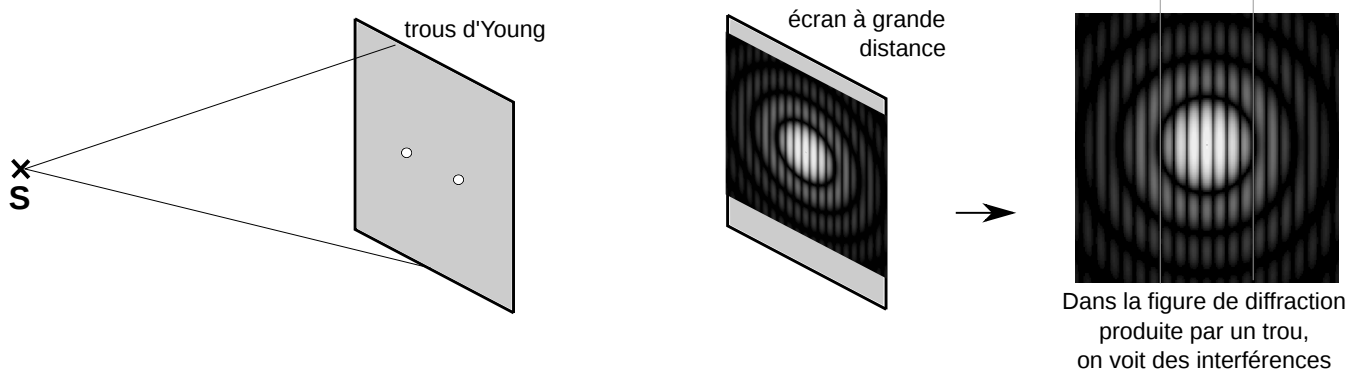


Le dispositif des trous d'Young est constitué d'un écran opaque percé de deux trous circulaires.

##### UN trou : diffraction



##### DEUX trous : diffraction + interférences



Notre objectif est de comprendre la figure d'interférences, mais pas d'étudier la figure de diffraction : même si elle est la cause des interférences, elle sera « négligée » par la suite. Ainsi, les ondes diffractées seront supposées parfaitement isotropes, ce qui revient à considérer que si un seul des trous est ouvert alors l'éclairement sur l'écran est uniforme. Cela revient à décrire l'éclairement à proximité du centre de l'écran.

#### III.A.2 - Fentes d'Young

Un dispositif très proche est celui des **fentes d'Young**, où les deux trous sont remplacés par deux fentes parallèles, ce qui permet de produire une figure d'interférences plus lumineuse. Cela change la figure de diffraction mais pas la présence d'interférences.

~> compte tenu de nos restrictions sur la diffraction, les deux dispositifs peuvent être étudiés exactement de la même façon.



### III.B - Différence de marche à grande distance

#### • Hypothèses et notations

- ▶ Les trous d'Young sont éclairés par une **source primaire**  $S$  ponctuelle et monochromatique, et les deux **sources secondaires**  $S_1$  et  $S_2$  sont également ponctuelles et monochromatiques.
- ▶ Les sources secondaires sont situées dans le plan  $y = 0$ , mais le point  $M$  a une ordonnée  $y$  a priori non nulle : le schéma de la figure 3 donne donc une vue « écrasée » de la situation.
- ▶ Dans un dispositif expérimental, on a classiquement  $d$  et  $D$  de l'ordre de 10 à 20 cm,  $a$  de l'ordre de quelques mm au maximum et une figure d'interférence qui mesure quelques cm sur l'écran. Ainsi, on peut considérer les distances  $d$  et  $D$  très supérieures aux autres :

$$d, D \gg a, x, y.$$

- ▶ On se place dans l'air d'indice 1 : les chemins optiques sont directement égaux aux distances géométriques. Le calcul de la différence de marche se résume donc à des calculs de longueur.

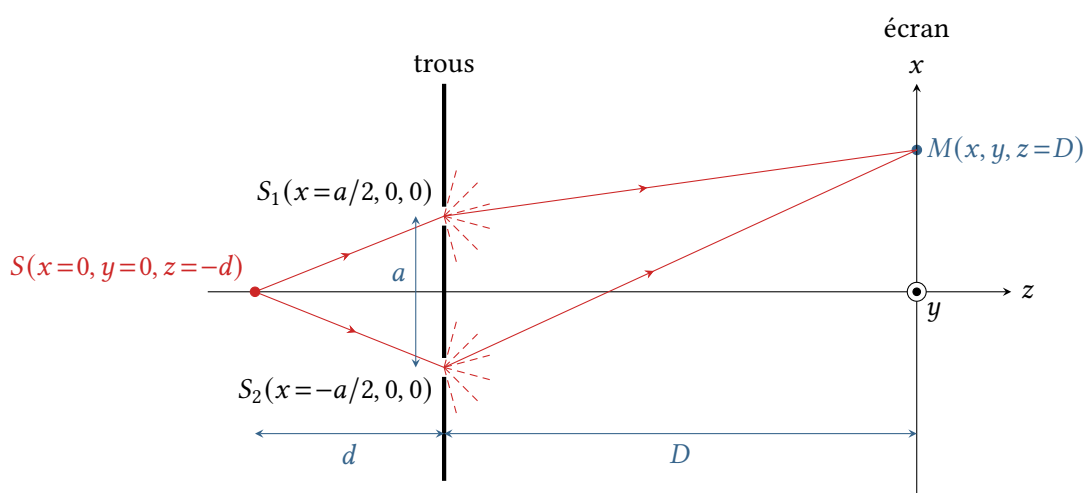


Figure 3 – Schéma du dispositif.

#### • Démonstration de la différence de marche à grande distance

- 1 Simplification par symétrie : en décomposant,

$$\delta = (SM)_2 - (SM)_1 = (SS_2M) - (SS_1M) = (SS_2) + (S_2M) - (SS_1) - (S_1M)$$

Or par symétrie  $(SS_1) = (SS_2)$ , donc

$$\delta = (S_2M) - (S_1M).$$

- 2 Calcul de la distance  $S_1M$  : les coordonnées des points sont  $S_1(a/2, 0, 0)$  et  $M(x, y, D)$  donc

$$S_1M = \sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + D^2} \quad \text{soit} \quad S_1M = \left(D^2 + x^2 - ax + \frac{a^2}{4} + y^2\right)^{1/2}.$$

Comme  $D \gg a, x, y$  on peut procéder à un développement limité :

$$S_1M = D \left(1 + \frac{x^2 - ax + \frac{a^2}{4} + y^2}{D^2}\right)^{1/2} \underset{D \gg a, x, y}{\simeq} D \left(1 + \frac{x^2 - ax + \frac{a^2}{4} + y^2}{2D^2}\right)$$

- 3 Calcul de la distance  $S_2M$  : le calcul est formellement identique en remplaçant  $a$  par  $-a$ , donc

$$S_2M = D \left(1 + \frac{x^2 + ax + \frac{a^2}{4} + y^2}{2D^2}\right)$$

**4 Conclusion :**

$$\begin{aligned}\delta &= D \left( \lambda + \frac{x^2 + ax + \frac{a^2}{4} + y^2}{2D^2} \right) - D \left( \lambda + \frac{x^2 - ax + \frac{a^2}{4} + y^2}{2D^2} \right) \\ &= D \frac{ax}{2D^2} + nD \frac{ax}{2D^2} \\ \delta &= \frac{ax}{D}\end{aligned}$$

Espace 17

R



Dans un dispositif de trous d'Young distants de  $a$  placés dans l'air d'indice 1, la différence de marche en un point  $M$  d'un écran placé à une distance  $D$  des trous ne dépend que de l'abscisse  $x$  sur l'écran et vaut

$$\delta(M) = \frac{ax}{D}.$$

Ordre d'interférences et déphasage :

$$p(M) = \frac{\delta(M)}{\lambda} = \frac{ax}{\lambda D} \quad \text{et} \quad \Delta\phi(M) = 2\pi p(M) = \frac{2\pi ax}{\lambda D}$$

### III.C - Figure d'interférences

#### III.C.1 - Allure en franges rectilignes

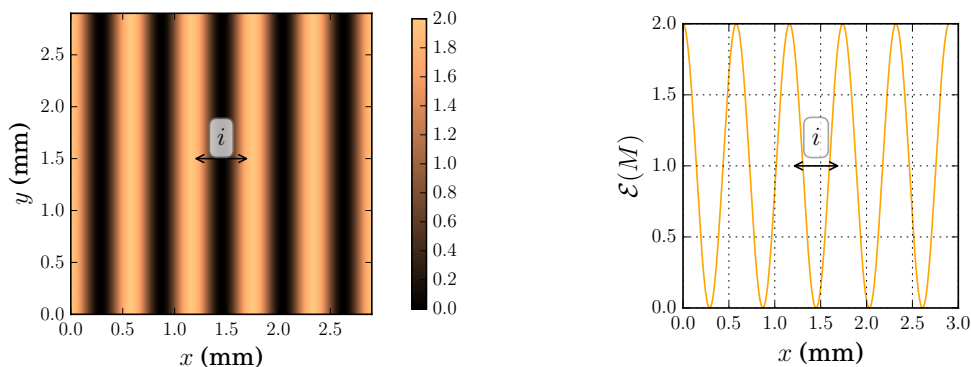


Figure 4 – Expérience des trous d'Young. Simulation réalisée pour  $\lambda = 580 \text{ nm}$ ,  $D = 1 \text{ m}$  et  $a = 1 \text{ mm}$ .

**Interprétation de l'allure en franges rectilignes :** les deux trous jouant des rôles équivalents,

$$I(M) = 2I_0 \left[ 1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\delta\right) \right] = 2I_0 \left[ 1 + \cos\left(\frac{2\pi ax}{\lambda D}\right) \right].$$

D

L'intensité est périodique en  $x$  mais elle est indépendante de la coordonnée  $y$  de  $M$ , elle est donc invariante par translation le long de cet axe.

Espace 18

**Remarque :** ce résultat se voit dès l'expression de la différence de marche, puisqu'elle détermine à elle seule l'état d'interférence en un point donné.

#### III.C.2 - Interfrange

R



On appelle **interfrange**  $i$  la période spatiale de la figure d'interférences. L'interfrange représente la distance entre deux franges sombres ou deux franges brillantes consécutives.

$$\Delta\phi(x+i) = \Delta\phi(x) + 2\pi \quad p(x+i) = p(x) + 1 \quad \delta(x+i) = \delta(x) + \lambda.$$

M

#### Application 7 : Interfrange dans l'expérience des trous d'Young

- 1 - Déterminer l'interfrange en fonction des caractéristiques de l'interféromètre.
- 2 - On prend une source de longueur d'onde  $650 \text{ nm}$  au lieu de  $580 \text{ nm}$ . Quel est l'effet visuel sur la figure d'interférences ?
- 3 - Même question si on utilise des trous plus rapprochés.

## Correction des applications de cours

### Application 2 : Onde sur une corde

1 Voir figure 5.

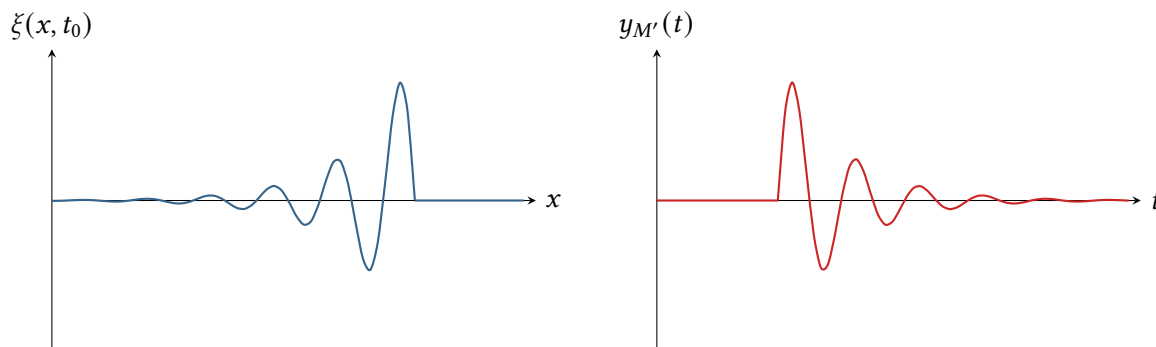


Figure 5 – Allure de la corde à  $t_0 > 0$  et position d'un point quelconque.

2 On connaît

$$F(t) = \xi(x=0, t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ H e^{-t/\tau} \sin(\omega t) & (t \geq 0) \end{cases}$$

On en déduit

$$\xi(x, t) = F(t - x/c) = H e^{-(t-x/c)/\tau} \sin \left[ \omega \left( t - \frac{x}{c} \right) \right]$$

pour  $t - x/c > 0$  soit  $x < ct$ .

### Application 5 : Formule de Fresnel pour des ondes de même intensité

1  $I = 2I_0 (1 + \cos \Delta\phi)$

2 On a établi

$$A(M) = 2A \left| \cos \left( \frac{\phi_2(M) - \phi_1(M)}{2} \right) \right| \quad \text{donc} \quad I(M) = \frac{1}{2} \alpha 4A^2 \cos^2 \left( \frac{\Delta\phi(M)}{2} \right)$$

On identifie  $I_0 = \frac{1}{2} \alpha A^2$  puis

$$4 \cos^2 \left( \frac{\Delta\phi(M)}{2} \right) = 4 \frac{1 + \cos \Delta\phi}{2} = 2(1 + \cos \Delta\phi)$$

ce qui nous ramène bien au même résultat.

### Application 7 : Interfrange dans l'expérience des trous d'Young

1  $p(x) = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{ax}{\lambda D}$  donc  $\frac{a(x+i)}{\lambda D} = \frac{ax}{\lambda D} + 1$  soit  $\frac{ai}{\lambda D} = 1$   
d'où on conclut  $i = \frac{\lambda D}{a}$ .

2 L'interfrange augmente, donc la figure d'interférences semble qualitativement se dilater sur l'écran.

3 Même chose.