

Propagation et interférences

Ondes progressives

Exercice 1 : Propagation sur une corde



▸ Représentations graphiques.

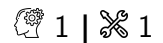
On constate que la perturbation de longueur 3 cm défile en 30 ms, la célérité vaut donc

$$c = \frac{3 \cdot 10^{-2}}{30 \cdot 10^{-3}} = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Les deux représentations sont symétriques l'une de l'autre, l'onde se propage donc dans le sens des x croissants. L'avant de la perturbation atteint le point étudié à l'instant $\tau = 20$ ms, et se trouvait initialement à une abscisse $x_0 = 4$ cm. On en déduit l'abscisse du point étudié,

$$x = x_0 + c\tau = 6 \text{ cm}.$$

Exercice 2 : Propagation sur une cuve à ondes



▸ Expressions d'une onde progressive.

1 La longueur d'onde est la période spatiale des vaguelettes le long d'un rayon des cercles, c'est-à-dire la distance entre deux raies foncées ou claires successives. En utilisant l'échelle, on trouve

$$\lambda = 1,5 \text{ cm}.$$

La célérité se déduit de la relation de dispersion,

$$c = \lambda f = 0,30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

2 Pour $x > 0$, l'onde se propage dans le sens des x croissants et s'écrit donc

$$h_{\rightarrow}(x, t) = A_0 \cos(\omega t - kx + \varphi).$$

Réciproquement, pour $x < 0$, l'onde se propage dans le sens des x décroissants et s'écrit alors

$$h_{\leftarrow}(x, t) = H \cos(\omega t + kx + \varphi).$$

La phase initiale φ est la même pour les deux fonctions car elles doivent coïncider à tout instant en $x = 0$.

Si on admet que la photo est prise à l'instant $t = 0$, alors la surface de l'eau est convexe en $x = 0$, c'est-à-dire que la hauteur d'eau y est maximale. On peut donc en conclure que $\varphi = 0$.

Toutefois, au cours de la propagation, **l'énergie que le vibreur transmet à la surface de l'eau se répartit sur des cercles de plus en plus grands**. Il est donc raisonnable que l'amplitude de l'onde diminue au fur et à mesure que le cercle s'agrandit. Cela se voit d'ailleurs sur la figure, où le niveau de gris est de moins en moins marqué lorsque l'on s'éloigne du centre.

3 Par définition,

$$\int_0^{2\pi} A(r)^2 \langle \cos^2(\omega t - kr) \rangle r d\theta = \frac{1}{2} A(r)^2 r \int_0^{2\pi} d\theta = \pi r A(r)^2.$$

S'agissant d'une constante, on peut l'exprimer au niveau de la pointe :

$$\pi r A(r)^2 = \pi b A_0^2 \quad \text{d'où} \quad A(r) = A_0 \sqrt{\frac{b}{r}}.$$

Exercice 3 : Réflexion sur un point fixe

2 | ✂ 1



▸ Expressions d'une onde progressive ;
▸ Représentations graphiques.

1 L'avant de la perturbation atteint le point O à l'instant

$$t_0 = \frac{x_0 - a}{c}.$$

L'onde se propageant dans le sens des x décroissants,

$$\xi(x, t) = f(x + ct),$$

ce qui vérifie bien $\xi(x, t=0) = f(x)$.

2 Il existe un intervalle de temps lors duquel l'avant de la perturbation a atteint le point O et s'y est déjà réfléchi alors que l'arrière n'y est pas encore, et continue donc à avancer vers la gauche, ce que la fonction g seule n'est pas en mesure de décrire.

3 Le point O étant fixe, on a à tout instant

$$\xi(x=0, t) = 0 \quad \text{soit} \quad f(ct) + g(-ct) = 0.$$

Poser $u = -ct$ conduit bien au résultat. On en déduit

$$\xi(x, t) = f(x + ct) - f(ct - x).$$

4 • À l'instant t_1 :

$$\xi(x, t=t_1) = f(x + x_0) - f(x_0 - x).$$

Or la courbe de la fonction f est symétrique par rapport à $x = x_0$, donc

$$f(x_0 + x) = f(x_0 - x).$$

On en déduit

$$\forall x, \xi(x, t=t_1) = 0.$$

La corde est donc parfaitement plate à l'instant t_1 (plate, mais pas immobile!)

• À l'instant t_2 :

$$\xi(x, t=t_2) = f(x + 2x_0) - f(2x_0 - x).$$

Comme f est nulle pour $x > x_0 + a$ et que $2x_0 > x_0 + a$, on a nécessairement $f(x + 2x_0) = 0$. On observe donc une impulsion triangulaire inversée (à cause du signe $-$), dont le maximum se trouve en x_{\max} tel que

$$2x_0 - x_{\max} = x_0 \quad \text{soit} \quad x_{\max} = x_0$$

puisque la fonction f est maximale en x_0 .

5 Les deux points voient passer la perturbation dans un sens puis l'autre. Le premier passage a lieu autour de l'instant $-t_1 < 0$ pour le point d'abscisse $2x_0$. On en déduit la figure 1.

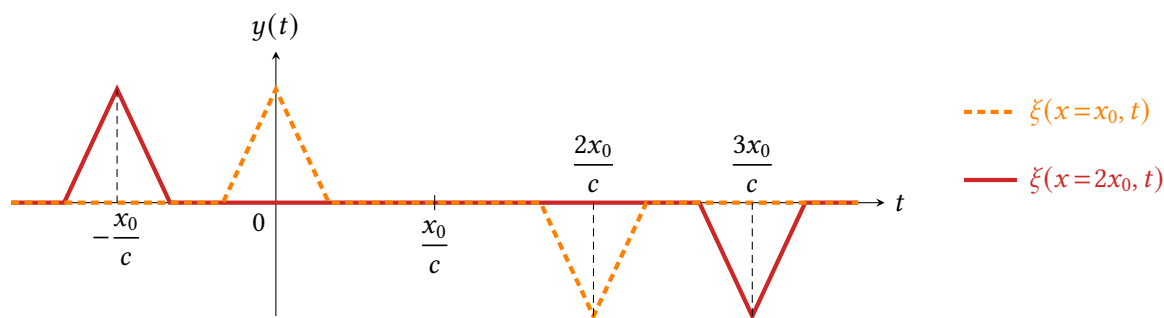


Figure 1 – Positions des deux points au cours du temps.

Interférences à deux ondes

Exercice 4 : Trombone de König



▸ Conditions d'interférences.

L'onde sonore arrivant au micro est la superposition des deux ondes passées par chacun des tuyaux. Ces ondes sont de même fréquence et interfèrent.

Lorsque l'on déplace la partie mobile du tuyau T_1 , on modifie la longueur du chemin parcouru par l'onde acoustique dans ledit tuyau, et donc la différence de marche entre les deux ondes se superposant. Précisément, lorsque le tuyau T_1 est déplacé d'une distance d vers la gauche le trajet est allongé de $2d$ et la différence de marche augmentée d'autant.

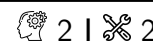
D'autre part, l'amplitude mesurée par le micro est minimale lorsque les interférences sont destructives, c'est-à-dire lorsque les deux ondes sont en opposition de phase :

$$\delta = \frac{\lambda}{2} + n\lambda$$

En déplaçant le tuyau T_1 d'une position où les interférences sont destructives à la suivante, la différence de marche a donc varié de $\pm\lambda$, le signe \pm dépendant du sens dans lequel le tuyau est déplacé.

$$\Delta\delta = 2d = \lambda = \frac{c}{f} \quad \text{d'où} \quad \boxed{c = 2fd = 345 \pm 6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

Exercice 5 : Écoute musicale et interférences



▸ Retard temporel et déphasage;
▸ Conditions d'interférences.

1 En plus de la distance séparant l'enceinte de l'auditeur, l'onde réfléchi parcourt une distance $2D$ correspondant à un aller-retour entre l'auditeur et le mur. Cela se traduit par un retard

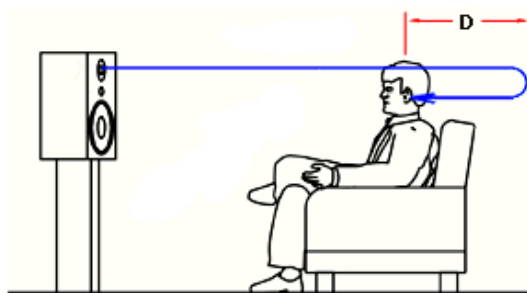
$$\boxed{\tau = \frac{2D}{c}}$$

Le déphasage est relié au retard temporel par

$$\Delta\phi = \omega \Delta\tau = 2\pi f \Delta\tau \quad \text{soit} \quad \boxed{\Delta\phi = \frac{4\pi f D}{c}}$$

2 Il peut y avoir une diminution de l'amplitude si l'onde directement incidente et l'onde réfléchi sur le mur **interfèrent destructivement**. La condition d'interférences destructives se traduit par

$$\Delta\phi_p = (2p + 1)\pi \quad \text{soit} \quad \boxed{f_p = (2p + 1) \frac{c}{4D} \quad (p \in \mathbb{Z})}$$



Les fréquences du domaine audible courent de $f_{\min} = 20 \text{ Hz}$ à $f_{\max} = 20 \text{ kHz}$. Les fréquences où les interférences sont destructives augmentent avec p . Pour qu'aucune d'entre elles ne fasse partie du domaine audible, il faut donc que

$$f_{p=0} = \frac{c}{4D} > f_{\max} \quad \text{soit} \quad D < \frac{c}{4f_{\max}} = 4,3 \text{ mm}.$$

Il faudrait donc que les oreilles de l'auditeur soient presque collées au mur, ce qui est tout simplement **impossible**.

3 Les interférences ne sont parfaitement destructives que si les deux ondes ont même amplitude, mais l'amplitude de l'onde émise par une enceinte décroît avec la distance qu'elle parcourt. Par conséquent, si l'auditeur est suffisamment loin du mur, **l'onde réfléchi sur le mur a une amplitude suffisamment faible devant l'onde directement incidente** pour que l'effet des interférences ne soit pas perceptible. Un revêtement qui absorbe une partie de l'onde incidente sans la réfléchir aura le même résultat sur les interférences.

4 L'écart moyen entre deux fréquences pour lesquelles l'amplitude mesurée est minimale vaut $\Delta f = 0,84 \text{ kHz}$. D'après les questions précédentes,

$$\Delta f = f_{p+1} - f_p = \frac{c}{2D} \quad \text{d'où} \quad D = \frac{c}{2\Delta f} = 20 \text{ cm}.$$

Penser à mesurer l'écart entre plusieurs minima pour gagner en précision : j'en ai ici mesuré 12. La distance D est faible par rapport à une distance « normale » entre l'auditeur et le mur, mais cela permet qu'à distance plus grande le résultat ne pourra qu'être meilleur.

5 L'amplitude est maximale dans le cas d'interférences constructives, et vaut alors $2A_0$. Sa valeur en décibels vaut

$$\Delta I_{\text{dB}} = 20 \log \frac{2A_0}{A_{\text{réf}}} = 20 \log \frac{A_0}{A_{\text{réf}}} + 20 \log 2 = 20 \log \frac{A_0}{A_{\text{réf}}} + 6.$$

Comme la valeur maximale de la différence de niveau sonore est de l'ordre de 6 dB à une fréquence d'environ 5,65 kHz, on peut penser que les ingénieurs qui ont réalisé l'expérience ont choisi comme amplitude de référence celle d'une onde seule, en l'absence d'interférences.

Exercice 6 : Mesure de l'indice optique du méthane



- ▷ Chemin optique;
- ▷ Ordre d'interférences.

1 Notons L_2 la longueur géométrique du bras contenant la cuve, et L_1 celle de l'autre bras. En négligeant l'effet des parois de la cuve, lorsque la cuve contient de l'air, la différence de marche des rayons reçus par la photodiode vaut

$$\delta_{\text{air}} = n_{\text{air}}L_2 - n_{\text{air}}L_1.$$

L'ordre de la frange perçue par la photodiode est donc

$$p_{\text{air}} = \frac{n_{\text{air}}(L_2 - L_1)}{\lambda}$$

Si l'interféromètre est impeccablement réglé, $L_2 = L_1$ donc $\delta_{\text{air}} = 0$, mais ce n'est pas nécessaire pour que l'expérience soit exploitable. Heureusement, d'ailleurs, car c'est impossible en pratique sur un interféromètre de Mach-Zehnder : les mesures interférentielles sont sensibles à des différences de longueur de l'ordre de quelques dizaines de nanomètres, il faudrait donc régler l'égalité des longueurs des deux voies avec la même précision, ce qui est très difficile à réaliser.

2 Lorsque la cuve contient du méthane, le chemin optique dans le bras 2 est modifié : la lumière parcourt moins de distance dans l'air, et davantage dans le méthane. Ainsi,

$$\delta_{\text{CH}_4} = n_{\text{air}}(L_2 - \ell) + n_{\text{CH}_4}\ell - n_{\text{air}}L_1,$$

d'où un ordre

$$p_{\text{CH}_4} = \frac{n_{\text{air}}(L_2 - L_1)}{\lambda} + \frac{(n_{\text{CH}_4} - n_{\text{air}})\ell}{\lambda} = p_{\text{air}} + \frac{(n_{\text{CH}_4} - n_{\text{air}})\ell}{\lambda}.$$

3 Comme la cuve est remplie progressivement, alors l'ordre change progressivement également, ce qui explique qu'on observe un défilement de franges (brillantes lorsque l'ordre est entier et sombres lorsqu'il est demi-entier). Puisque 32 franges défilent, alors

$$p_{\text{CH}_4} = p_{\text{air}} + 32$$

Il est nécessaire de savoir au préalable que $n_{\text{air}} > n_{\text{CH}_4}$, sans quoi il est impossible de connaître le signe de la variation d'ordre : a priori, $p_{\text{CH}_4} = p_{\text{air}} \pm 32$.

On peut constater que l'hypothèse de négliger les parois de la cuve n'affecte pas le résultat final. Les prendre en compte rajouterait une différence de marche δ_{paroi} qui serait égale avec et sans méthane, et se simplifierait dans le résultat final.

On en déduit

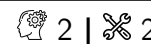
$$(n_{\text{CH}_4} - n_{\text{air}})\ell = 32\lambda$$

et ainsi

$$n_{\text{CH}_4} = n_{\text{air}} + \frac{32\lambda}{\ell} = 1 + 4,48 \cdot 10^{-4}.$$

On pourrait s'étonner d'un tel nombre de chiffres significatifs sur l'indice n_{CH_4} alors que λ et ℓ n'en comptent que trois. Rappelons que dans une addition ce sont les décimales qui comptent, et pas les chiffres significatifs. Par exemple, il serait aberrant de considérer que $1250,7 + 0,13 = 1,3 \cdot 10^3$ par application de la règle du plus petit nombre de chiffres significatifs ! Il est impossible pour autant de considérer comme résultat $1250,83$ car la dernière décimale est incertaine. Ici, la donnée la moins précise l'est à 10^{-1} près donc le résultat de l'addition doit être donné à la même décimale, soit $1250,8$.

Exercice 7 : Gyromètre à fibre optique



- Chemin optique ;
- Conditions d'interférences.

1 Notons Δt_1 le temps de parcours dans la fibre. Pendant cette durée, la sortie de la fibre tourne d'une distance $R\Omega \Delta t_1$, si bien que

$$\ell_1 = L + R\Omega \Delta t_1.$$

En outre, la lumière se propageant à la célérité c/n dans la fibre,

$$\Delta t_1 = \frac{\ell_1}{c/n}.$$

On en déduit

$$\ell_1 = L + \frac{nR\Omega}{c}\ell_1 \quad \text{soit} \quad \left(1 - \frac{nR\Omega}{c}\right)\ell_1 = L$$

ce qui conduit bien à

$$\ell_1 = \frac{L}{1 - nR\Omega/c}.$$

2 L'onde ② se propageant en sens opposé, son trajet est raccourci, et on a cette fois

$$\ell_2 = L - R\Omega \Delta t_2 \quad \text{soit} \quad \ell_2 = \frac{L}{1 + nR\Omega/c}.$$

La différence de marche en sortie de fibre vaut donc

$$\delta = \ell_1 - \ell_2 = \frac{L}{1 - nR\Omega/c} - \frac{L}{1 + nR\Omega/c}$$

Dans la limite $R\Omega \ll c$, on peut procéder par développement limité

$$\delta = L \left(1 + \frac{nR\Omega}{c} \right) - L \left(1 - \frac{nR\Omega}{c} \right) = 2L \frac{nR\Omega}{c},$$

d'où on déduit le déphasage

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta \quad \text{soit} \quad \Delta\phi = \frac{4\pi L}{\lambda} \frac{nR\Omega}{c}.$$

3 Lorsque l'onde incidente se sépare, les ondes ① et ② ont chacune une intensité $I_0/2$. En « oubliant » les interférences, lorsque l'onde ① revient sur la séparatrice, seule la moitié de l'intensité est transmise, soit une intensité $I_0/4$, et de même pour l'onde ②. Ainsi, en écrivant la formule de Fresnel avec une intensité de référence $I_1 = I_2 = I_0/4$ on obtient

$$I = \frac{I_0}{2} (1 + \cos \Delta\phi).$$

On constate que l'intensité I est une fonction paire de $\Delta\phi$, et donc de Ω : une rotation à la même vitesse dans un sens ou dans l'autre produit le même signal en sortie. Le sens de rotation n'est donc pas détectable aussi facilement.

4 L'idée du dispositif consiste à faire une correspondance entre l'intensité mesurée et la vitesse de rotation, via le déphasage. Au delà de la première annulation, en raison de la périodicité du cosinus, plusieurs vitesses de rotation produiraient le même signal. La vitesse de rotation maximale mesurable de la sorte est donc telle que

$$\Delta\phi = \pi \quad \text{soit} \quad \frac{4\pi L}{\lambda} \frac{nR\Omega_{\max}}{c} = \pi$$

ce qui donne

$$\Omega_{\max} = \frac{\lambda c}{4nLR}.$$

5 En dérivant la formule de Fresnel,

$$k = \frac{1}{I_0} \left| \frac{dI}{d\Delta\phi} \right| \times \frac{d\Delta\phi}{d\Omega} = \frac{1}{I_0} \left| -\frac{I_0}{2} \sin \Delta\phi \right| \times \frac{4\pi L}{\lambda} \frac{nR}{c}$$

ce qui donne

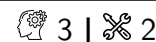
$$k = \frac{2\pi nLR}{\lambda c} |\sin \Delta\phi|.$$

Pour l'améliorer, il faut choisir une bobine de grande taille et une fibre de grande longueur ... ce qui limite la vitesse de rotation mesurable en vertu de la question précédente. En outre, aux faibles vitesses de rotation, la sensibilité devient proportionnelle à Ω et tend donc à s'annuler :

$$k \sim \frac{2\pi nLR}{\lambda c} \times \Delta\phi = 2 \left(\frac{2\pi nLR}{\lambda c} \right)^2 \Omega$$

Ainsi, quelle que soit la géométrie retenue, le dispositif sera toujours intrinsèquement limité pour mesurer les faibles vitesses de rotation.

Exercice 8 : Corde de Melde



▸ Amplitude résultant d'une superposition d'ondes.

1 D'après le principe de superposition,

$$\xi(z, t) = a \left(\cos(\omega t - kz - \varphi) + \cos(\omega t + kz + \varphi) \right)$$

$$\xi(z, t) = 2a \cos(\omega t) \cos(kz + \varphi)$$

Cette onde ne peut pas s'écrire sous la forme $f(x \pm ct)$, il ne s'agit donc pas d'une onde progressive : on parle d'onde **stationnaire**, que vous étudierez en deuxième année.

Le calcul utilise la formule de trigonométrie

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

où beaucoup de termes se simplifient grâce au choix de notation du déphasage.

2 L'amplitude de vibration au point d'abscisse z est donnée par

$$a(z) = 2a |\cos(kz + \varphi)| > 0.$$

On constate qu'elle dépend de z : la présence des ventres et des nœuds s'interprète comme des interférences constructives ou destructives entre l'onde incidente et l'onde réfléchie.

• **Ventres** : Les ventres correspondent aux abscisses z_v ($v \in \mathbb{Z}$ a priori) telles que

$$\cos(kz_v + \varphi) = \pm 1 \quad \text{soit} \quad kz_v + \varphi = v\pi \quad \text{donc} \quad z_v = -\frac{\varphi}{k} + \frac{v\pi}{k}.$$

Sachant que $k = 2\pi/\lambda$, on conclut

$$z_v = -\frac{\varphi}{2\pi} \lambda + v \frac{\lambda}{2} \quad (v \in \mathbb{Z})$$

Deux ventres consécutifs sont donc distants de $\lambda/2$.

• **Nœuds** : Les nœuds correspondent aux abscisses z_n ($n \in \mathbb{Z}$ a priori) telles que

$$\cos(kz_n + \varphi) = 0 \quad \text{soit} \quad kz_n + \varphi = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad \text{donc} \quad z_n = -\frac{\varphi}{k} + \frac{\pi}{2k} + \frac{n\pi}{k}.$$

Sachant que $k = 2\pi/\lambda$, on conclut

$$z_n = -\frac{\varphi}{2\pi} \lambda + \frac{\lambda}{4} + n \frac{\lambda}{2} \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Deux nœuds consécutifs sont donc distants de $\lambda/2$, un nœud et un ventre consécutifs sont distants de $\lambda/4$.

3.a Il s'agit d'exploiter les conditions limites, c'est-à-dire l'analogue des conditions initiales mais pour l'espace. La condition limite en $z = 0$ impose à tout instant

$$\xi(0, t) \underset{\text{CL}}{=} 0 = \underset{\text{expr}}{2a \cos(\omega t) \cos \varphi} \quad \text{donc} \quad \cos \varphi = 0 \quad \text{soit} \quad \varphi = \frac{\pi}{2} + m\pi \quad (m \in \mathbb{Z}).$$

On peut donc bien choisir $\varphi = -\pi/2$.

S'agissant d'un déphasage, on dispose d'une liberté de choix parmi toutes les valeurs possibles. En revanche, une fois ce choix fait il faut s'y tenir jusqu'au bout car il peut impacter d'autres grandeurs.

3.b La condition limite en $z = L$ impose

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{CL}}}{\xi(L, t)} = 0 = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{expr}}}{2a \cos(\omega t) \cos(kL + \varphi)} \quad \text{donc} \quad \cos(kL + \varphi) = \sin(kL) = 0 \quad \text{soit} \quad kL = n\pi$$

On en déduit

$$\boxed{k = \frac{n\pi}{L} \quad \text{et} \quad f = \frac{nc}{2L} \quad (n \in \mathbb{N}^*)}$$

grâce à la relation de dispersion $\omega = 2\pi f = kc$.

Les entiers introduits précédemment concernaient des abscisses ou des phases, il s'agissait donc d'entiers relatifs, mais l'entier n introduit dans cette question est forcément strictement positif compte tenu des grandeurs qu'il relie.

3.c Si $n = 3$, on a alors

$$k = \frac{3\pi}{L} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{soit} \quad L = \frac{3}{2}\lambda.$$

Sachant d'une part que les conditions limites imposent deux nœuds en $x = 0$ et $x = L$, d'autre part que deux nœuds sont distants de $\lambda/2$, on en déduit l'allure de la figure 2.

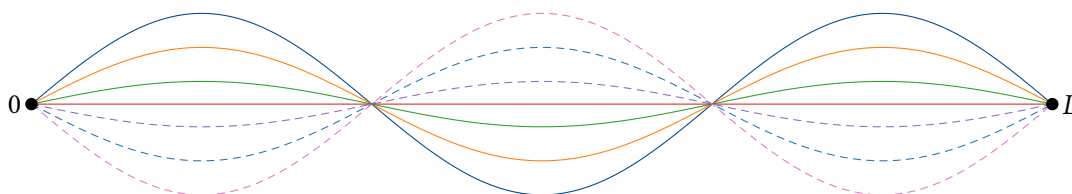


Figure 2 – Allure de la corde de Melde à différents instants. L'allure de la corde fait apparaître trois fuseaux de vibrations, séparés par les nœuds. On remarque que deux fuseaux consécutifs vibrent en opposition de phase : le déplacement de la corde est positif pour l'un et négatif pour l'autre.

4.a La condition limite en $x = L$ est inchangée et donne

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{CL}}}{\xi(L, t)} = 0 = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{expr}}}{2a \cos(\omega t) \cos(kL + \varphi)} \quad \text{donc} \quad \cos(kL + \varphi) = 0. \quad \text{soit} \quad kL + \varphi = \frac{\pi}{2} + n\pi.$$

La condition limite en $z = 0$ s'écrit maintenant

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{CL}}}{\xi(0, t)} = A \cos(\omega t) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{expr}}}{2a \cos(\omega t) \cos \varphi}$$

Or

$$\cos \varphi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - kL + n\pi\right) = -\sin(kL + n\pi) = (-1)^n \sin(kL)$$

d'où on déduit

$$a = (-1)^n \frac{A}{2 \sin(kL)}.$$

Par le même raisonnement,

$$\cos(kz + \varphi) = (-1)^n \sin(k(L - z))$$

En conclusion, les $(-1)^n$ se compensent et on obtient le résultat escompté

$$\boxed{\xi(z, t) = A \frac{\sin(k(L - z))}{\sin(kL)} \cos(\omega t).}$$

4.b L'onde est toujours stationnaire, avec des nœuds séparés de $\lambda/2$. Le nombre de nœuds observables est donc reliée à la partie entière

$$N = \left\lfloor \frac{L}{\lambda/2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2Lf}{c} \right\rfloor$$

4.c Si la corde est excitée à l'une de ses fréquences propres, alors $\sin(kL) = 0$ donc l'amplitude de vibration devrait diverger en tout point ! C'est évidemment impossible, car la corde est inextensible et des effets non-linéaires viennent limiter cette amplitude. Toutefois, on observe bien un phénomène de **résonance**, avec une amplitude de vibration maximale par rapport à celle observée pour des fréquences d'excitation voisines.

Dispositifs d'Young et analogues

Exercice 9 : Homogénéité d'indice

oral banque PT | 1 | 2 |



- ▷ Calcul de différence de marche ;
- ▷ Chemin optique et indice optique.

1 Cf. cours pour les calculs. On trouve

$$\delta = \frac{ax}{L} \quad i = \frac{\lambda L}{a} \quad E(x) = 2E_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{ax}{L} \right) \right]$$

2 Le rayon issu de S_1 parcourt une épaisseur e dans du verre au lieu de l'air, ce qui augmente le chemin optique de $(n - 1)e$. Ainsi,

$$\delta' = \frac{ax}{L} - (n - 1)e.$$

L'ajout d'une différence de marche constante se traduit par un « déphasage spatial » de l'éclairement, c'est-à-dire un déplacement des franges d'interférences observées sur l'écran.

Ne pas oublier le « -1 » : la distance parcourue dans l'air est raccourcie, il faut donc soustraire cette contribution au chemin optique.

3 En faisant attention aux signes, les différences de marche extrêmes sont reliées aux valeurs extrêmes de l'indice par

$$\delta'_{\max} = \frac{ax}{L} - (n_{\min} - 1)e \quad \text{et} \quad \delta'_{\min} = \frac{ax}{L} - (n_{\max} - 1)e$$

Par ailleurs, lorsque l'on voit défiler un interfrange, c'est que la différence de marche a varié de λ . Ainsi,

$$\delta'_{\max} = \delta'_{\min} + 4\lambda.$$

En combinant, on en déduit

$$\frac{ax}{L} - (n_{\min} - 1)e = \frac{ax}{L} - (n_{\max} - 1)e + 4\lambda$$

ce qui conduit à

$$-n_{\min}e = -n_{\max}e + 4\lambda \quad \text{d'où} \quad \Delta n = \frac{4\lambda}{e} = 1,16 \cdot 10^{-3}.$$

La variation relative d'indice vaut donc

$$\frac{\Delta n}{n} = 7,25 \cdot 10^{-4} = 0,0725 \%$$

Supposer la lame d'indice homogène est donc une excellente approximation dans la plupart des situations !

Exercice 10 : Miroir de Lloydoral CCINP MP |  2 |  2 | 

- ▷ Calcul de différence de marche ;
- ▷ Interfrange.

Dans son retour d'oral, le candidat mentionne qu'il a donné tous les résultats sans démonstration et sans que l'examineur ne demande de détail.

- 1 Les rayons issus de S peuvent atteindre l'écran directement ou se réfléchir sur le miroir. Tout se passe comme si l'image S' de S , symétrique de S par rapport au miroir, était une deuxième source ponctuelle cohérente avec S , voir figure 3.

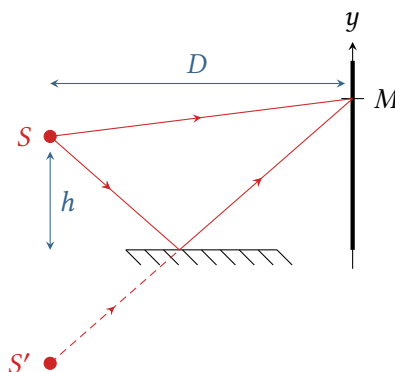


Figure 3 – Tracé des rayons.

- 2 En raisonnant dans le plan de la figure, d'après le théorème de Pythagore et sachant que $D \gg y, h$,

$$SM = \sqrt{D^2 + (y - h)^2} = D \sqrt{1 + \left(\frac{y - h}{D}\right)^2} \approx D \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{y - h}{D}\right)^2\right) = D \left(1 + \frac{y^2}{2D^2} + \frac{h^2}{2D^2} - \frac{hy}{D^2}\right)$$

De même,

$$S'M = \sqrt{D^2 + (y + h)^2} = D \sqrt{1 + \left(\frac{y + h}{D}\right)^2} \approx D \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{y + h}{D}\right)^2\right) = D \left(1 + \frac{y^2}{2D^2} + \frac{h^2}{2D^2} + \frac{hy}{D^2}\right)$$

Je propose ici une démonstration alternative à celle utilisée dans le cours. Bien entendu, vous pouvez exprimer de même les vecteurs \vec{SM} et $\vec{S'M}$ dans la base cartésienne puis calculer leur norme.

À ces distances géométriques s'ajoute le déphasage de π dû à la réflexion métallique sur le miroir, qui se traduit par l'ajout de $\lambda/2$ au chemin optique. On en déduit

$$\delta = (SM)_{\text{miroir}} - (SM)_{\text{direct}} = (S'M) - (SM) = S'M + \frac{\lambda}{2} - SM \quad \text{d'où} \quad \delta = \frac{2hy}{D} + \frac{\lambda}{2}.$$

L'ordre d'interférences vaut donc

$$p = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{2hy}{\lambda D} + \frac{1}{2}$$

D'après la formule de Fresnel,

$$I(M) = 2I_0 [1 + \cos(2\pi p(M))] = 2I_0 \left[1 + \cos\left\{\frac{2\pi}{\lambda} \frac{2hy}{D} + \pi\right\}\right]$$

soit finalement

$$I(M) = 2I_0 \left[1 - \cos\left\{\frac{2\pi}{\lambda} \frac{2hy}{D}\right\}\right]$$

L'interfrange s'en déduit par

$$p(y+i) = p(y) + 1 \quad \text{d'où} \quad \frac{2hi}{\lambda D} = 1 \quad \text{donc} \quad \boxed{i = \frac{\lambda D}{2h}}.$$

3 Comme $i' > i$ et d'après les questions précédentes on déduit

$$h = \frac{\lambda D}{2i} \quad \text{et} \quad h - \Delta h = \frac{\lambda D}{2i'}$$

si bien que

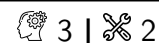
$$\Delta h = \frac{\lambda D}{2} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i'} \right) = \frac{\lambda D}{2i} \left(1 - \frac{2}{3} \right) = \frac{\lambda D}{6i}$$

d'où on déduit finalement

$$\boxed{\lambda = \frac{6i \Delta h}{D}}.$$

Le signe \ominus devant Δh vient du fait que $i' > i$ et que l'on souhaite avoir $\Delta h > 0$. On pourrait également conserver un signe \oplus et travailler avec $\Delta h < 0$, mais c'est nettement moins naturel.

Exercice 11 : Billelles de Billet



- ▶ Formation d'image par une lentille ;
- ▶ Calcul de différence de marche ;
- ▶ Interfrange.

1 Voir figure 4 : il suffit d'être méthodique, et de ne pas avoir peur de traiter les deux demi-lentilles comme deux lentilles indépendantes l'une de l'autre.

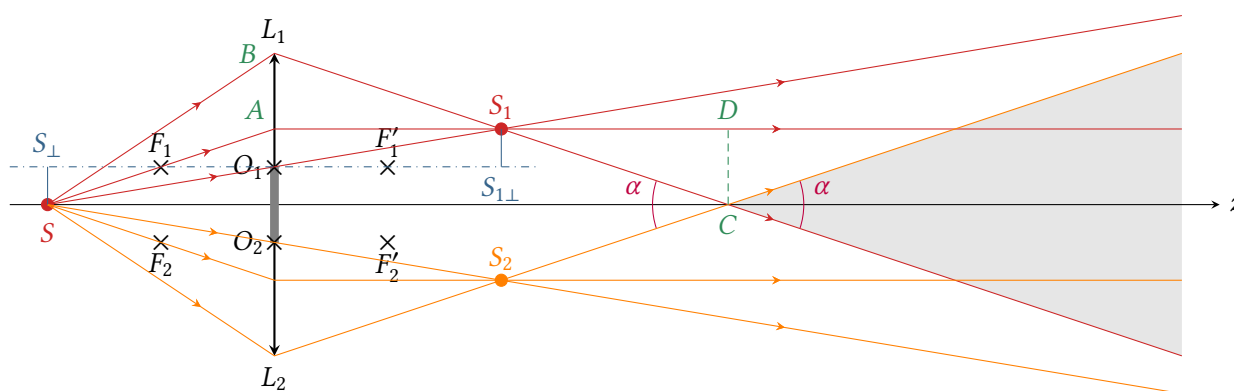


Figure 4 – Billelles de Billet. Les interférences sont observables dans la zone grisée.

2 Raisonnons pour la lentille L_1 . Notons S_{\perp} et $S_{1\perp}$ les projetés orthogonaux de S et S_1 sur l'axe optique. D'après la relation de conjugaison,

$$\frac{1}{\overline{O_1 S_{1\perp}}} - \frac{1}{\overline{O_1 S_{\perp}}} = \frac{1}{f'} \quad \text{soit} \quad \frac{1}{d} + \frac{1}{2f'} = \frac{1}{f'}$$

ce qui permet d'isoler

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{f'} - \frac{1}{2f'} = \frac{1}{2f'} \quad \text{d'où} \quad \boxed{d = 2f'}.$$

D'après la relation de grandissement,

$$\frac{\overline{S_{1\perp} S_1}}{\overline{S_{\perp} S}} = \frac{\overline{O_1 S_{1\perp}}}{\overline{O_1 S_{\perp}}} = -1 \quad \text{d'où} \quad S_{1\perp} S_1 = \frac{\Delta}{2}.$$

On en déduit par symétrie

$$a = S_1 S_2 = \frac{\Delta}{2} + \Delta + \frac{\Delta}{2} = 2\Delta.$$

Le théorème de Thalès est tout aussi efficace pour calculer a .

3 S_1 et S_2 sont les images géométriques de S , les ondes sphériques issues de ces points sont donc de même fréquence et cohérentes. On peut donc les considérer comme deux sources secondaires.

Le champ d'interférence est la zone de l'espace où les deux faisceaux convergents en S_1 et S_2 se recouvrent, représenté en gris sur la figure 4. Pour l'obtenir, il faut commencer par compléter les faisceaux en s'appuyant sur les extrémités de la lentille : par stigmatisme, tous les rayons issus de S passent par S_1 ou S_2 .

Notons r le rayon de la lentille. D'après le théorème de Thalès appliqué aux deux triangles S_1AB et S_1CD ,

$$\frac{AB}{CD} = \frac{AS_1}{DS_1} \quad \text{soit} \quad \frac{r - \frac{\Delta}{2}}{\Delta} = \frac{2f'}{D_{\min} - 2f'} \quad \text{d'où} \quad D_{\min} = 2f' \left(1 + \frac{\Delta}{r - \frac{\Delta}{2}} \right).$$

4 Si l'écran est à une distance D des demi-lentilles, alors les sources sont à une distance $d = D - 2f'$ de l'écran. On est alors dans une situation classique de type trous d'Young :

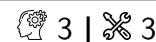
$$\delta = \frac{ax}{d} = \frac{2\Delta x}{D - 2f'}$$

d'où

$$I(x) = 2I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi ax}{\lambda d} \right) \right] \quad \text{et} \quad i = \frac{\lambda d}{a} = \frac{\lambda(D - 2f')}{2\Delta}.$$

5 Si on recule la source S alors les sources secondaires S_1 et S_2 se rapprochent des lentilles, donc d augmente, et le grandissement diminue donc a diminue. Par conséquent l'interfrange augmente.

Exercice 12 : Montage à trois fentes d'Young



- Calcul de différence de marche ;
- Démonstration de la formule de Fresnel ;
- Représentation complexe.

1 Compte tenu de la façon dont A_0 est définie, $\varphi(z)$ est le déphasage au point M entre les deux ondes issues de S_0 et de S_2 . Calculons la différence de marche, en supposant le problème plan pour simplifier (pas d'intervention de la coordonnée y). D'une part,

$$S_0M = \sqrt{d^2 + z^2} = d\sqrt{1 + \frac{z^2}{d^2}} \simeq d \left(1 + \frac{z^2}{2d^2} \right)$$

D'autre part,

$$S_2M = \sqrt{d^2 + (z+a)^2} = d\sqrt{1 + \frac{(z+a)^2}{d^2}} \simeq d \left(1 + \frac{(z+a)^2}{2d^2} \right)$$

On en déduit

$$\delta_2 = S_2M - S_0M = \frac{(z+a)^2}{2d} - \frac{z^2}{2d} = \frac{az}{d} + \frac{a^2}{2d},$$

puis le déphasage

$$\phi_2 = \frac{2\pi}{\lambda} \delta = \underbrace{\frac{2\pi az}{\lambda d}}_{=\varphi(z)} + \underbrace{\frac{\pi a^2}{\lambda d}}_{\psi}.$$

2 Le calcul est analogue aux signes près, car $S_1M < S_0M$.

$$\delta_1 = S_1M - S_0M = \frac{(z-a)^2}{2d} - \frac{z^2}{2d} = -\frac{az}{d} + \frac{a^2}{2d} \quad \text{d'où} \quad \phi_1 = -\varphi(z) + \psi.$$

3 L'onde totale au point M a pour amplitude

$$\underline{s}(M) = \underline{s}_0(M) + \underline{s}_1(M) + \underline{s}_2(M) = A_0 \left(1 + e^{-i(\varphi+\psi)} + e^{+i(\varphi+\psi)} \right)$$

ce qui se simplifie en

$$\underline{s}(M) = A_0 \left(1 + 2 e^{i\psi} \cos \varphi \right).$$

Par définition, l'intensité lumineuse totale au point M a pour expression

$$I(M) = \frac{\alpha}{2} |\underline{s}(M)|^2$$

donc en développant le calcul

$$I(M) = \frac{\alpha}{2} A_0^2 (1 + 4 \cos \varphi \cos \psi + 4 \cos^2 \varphi)$$

4 Si $\cos \psi = 1$, le résultat précédent se factorise sous la forme

$$I(M) = \frac{\alpha}{2} A_0^2 (1 + 2 \cos \varphi)^2 = I_0 (1 + 2 \cos \varphi)^2.$$

Commençons par calculer des valeurs particulières à partir des valeurs remarquables du cosinus et d'annulation de $I(M)$.

φ	0	$2\pi/3$	π	$4\pi/3$	2π
I/I_0	9	0	1	0	9

On en déduit le tracé de la figure 5.

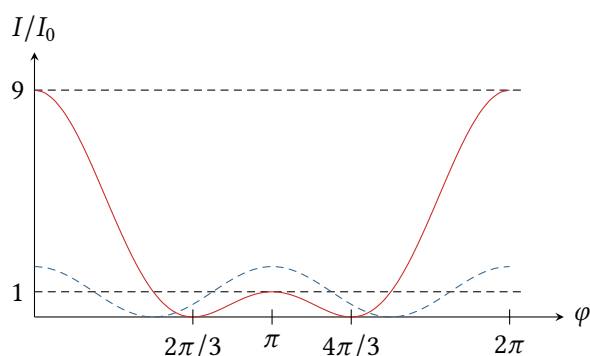


Figure 5 – Éclairement du système à trois fentes en fonction du déphasage.

Si la fente centrale était obstruée, on aurait $\underline{s}_0(M) = 0$ et on aurait

$$\underline{s}(M) = 2A_0 \cos \varphi \quad \text{soit} \quad I(M) = 4A_0^2 \cos^2 \varphi = \frac{A_0^2}{2} (1 + \cos(2\varphi)) = I_0 (1 + \cos(2\varphi)).$$

On retrouve sans surprise la formule de Fresnel. Le tracé donne alors la courbe en traits pointillés bleus. La présence d'une fente supplémentaire rend certaines franges beaucoup plus brillantes et d'autres moins.

Ce même mécanisme est à l'œuvre dans les réseaux, où le grand nombre de fentes rend les maxima principaux d'intensité très brillants mais beaucoup moins nombreux. De nombreux maxima secondaires se forment également, mais ils sont très peu visibles.