

# Ouverture vers la physique quantique

## Plan du cours

<b>I</b>	<b>Dualité onde-corpuscule</b>	<b>2</b>
I.A	Quantification des échanges d'énergie : effet photoélectrique . . . . .	2
I.B	Nature corpusculaire du photon : expérience de Kimble, Dagenais et Mandel . . . . .	4
I.C	Dualité onde-corpuscule pour la lumière : interférences de photons uniques . . . . .	5
I.D	Dualité onde-corpuscule pour la matière : interférences d'électrons uniques . . . . .	6
I.E	Influence d'un observateur . . . . .	8
<b>II</b>	<b>Introduction au formalisme de la mécanique ondulatoire</b>	<b>8</b>
II.A	Fonction d'onde . . . . .	8
II.B	Interprétation d'une expérience d'interférences de particules uniques . . . . .	9
II.C	Inégalité d'Heisenberg. . . . .	10
<b>III</b>	<b>Description semi-classique de l'atome d'hydrogène</b>	<b>12</b>
III.A	Taille caractéristique de l'atome . . . . .	12
III.B	Modèle de Bohr . . . . .	12
III.C	Spectre de l'hydrogène dans le modèle de Bohr . . . . .	13
	<b>Annexe historique</b>	<b>15</b>

- |          |                                 |          |  |
|----------|---------------------------------|----------|--|
| <b>R</b> | Résultat à connaître par cœur.  | <b>M</b> | Méthode à retenir, mais pas le résultat. |
| <b>D</b> | Démonstration à savoir refaire. | <b>Q</b> | Aspect qualitatif uniquement.            |

*Les paragraphes sans mention en marge sont là pour faciliter votre compréhension ou pour votre culture mais n'ont pas forcément besoin d'être appris en tant que tel.*

Ce chapitre a pour but d'entrouvrir une fenêtre vers le monde de la mécanique quantique, que l'on pourrait définir schématiquement comme la physique de l'infiniment petit et de l'infiniment froid. De nombreux phénomènes relevant aussi bien de la physique fondamentale que de ses applications ne peuvent s'expliquer que dans ce cadre : fonctionnement des transistors (briques élémentaires de toute l'électronique contemporaine), des LED, des lasers, principe de l'IRM, horloges atomiques utilisées dans les GPS, etc.

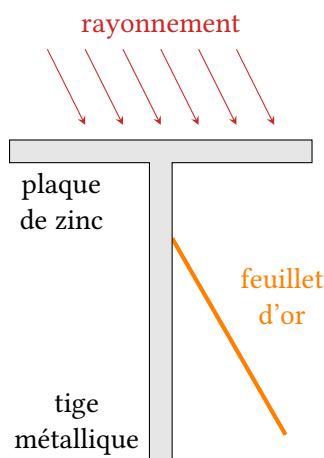
## I - Dualité onde-corpuscule

### I.A - Quantification des échanges d'énergie : effet photoélectrique

#### I.A.1 - Mise en évidence expérimentale (1887-1902)



L'expérience commence à 1' environ.



L'électroscope est initialement chargé négativement par influence électrostatique, ce qui a pour effet de repousser la feuille d'or de la tige métallique. Or un électron est retenu dans la plaque de zinc par des forces attractives : pour l'arracher, il faut lui apporter une énergie supérieure à une énergie seuil appelée **travail d'extraction**, caractéristique du métal. Éclairer l'électroscope permet d'apporter de l'énergie, et donc de le décharger.

#### Prédiction de physique classique :

plus l'intensité lumineuse est élevée, plus il y a d'électrons arrachés, et plus l'électroscope se décharge vite.

Espace 1



#### Observations expérimentales :

- quelle que soit son intensité, une lumière visible ne décharge jamais l'électroscope ;
  - quelle que soit son intensité, une lumière ultra-violette (longueur plus courte et fréquence plus élevée que la lumière visible) décharge toujours l'électroscope ;
  - plus l'intensité du rayonnement UV est élevée, plus l'électroscope se décharge vite.
- l'importance de la fréquence du rayonnement est inexplicable par la théorie classique des ondes électromagnétiques.

#### I.A.2 - Interprétation d'Einstein (1905)



Les échanges d'énergie entre la matière et le rayonnement sont quantifiés : l'énergie s'échange par multiples entiers d'une quantité élémentaire appelée **quantum d'énergie** proportionnelle à la fréquence  $\nu$  du rayonnement,

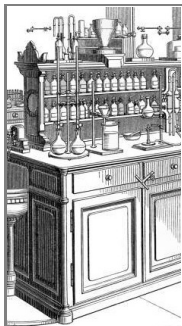
$$\varepsilon = h\nu$$

où  $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$  est la **constante de Planck**.

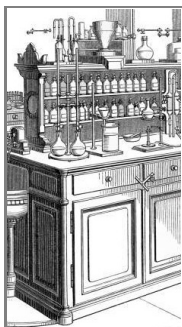
- interprétation du seuil en fréquence :  
un électron ne peut être éjecté que si  $h\nu > W$ .

Espace 2

Historiquement, Einstein a postulé que la quantification venait du rayonnement (et non pas de la matière), composé de quanta de lumière que Lewis nommera **photons** en 1926. Cela permettait de rejoindre une hypothèse proposée par Planck pour expliquer le rayonnement du corps noir, qui n'apparaissait alors que comme un artifice mathématique mal compris physiquement. Toutefois, l'expérience ne permet pas d'aller aussi loin dans les conclusions : elle ne peut pas déterminer si la quantification vient du rayonnement, de la matière, ou du mode d'échange d'énergie entre les deux.



*Un peu d'histoire : Albert Einstein est né en Allemagne en 1879. Il étudie et commence sa carrière en Suisse, et c'est en 1905 qu'il publie plusieurs travaux majeurs qui transforment la physique moderne : il explique l'effet photoélectrique, interprète le mouvement brownien et établit la théorie de la relativité restreinte. En 1915, il développe la relativité générale, nouvelle théorie de la gravitation fondée sur la courbure de l'espace-temps. Ses contributions jouent également un rôle fondamental dans la naissance de la mécanique quantique, même s'il reste critique envers son interprétation probabiliste. Il reçoit le prix Nobel de physique en 1921 pour ses travaux sur l'effet photoélectrique. D'origine juive et opposant au nazisme, il quitte l'Europe et s'installe aux États-Unis en 1933 puis est naturalisé américain. Il décède en 1955.*



*Un peu d'histoire : Max Planck (1858-1947) est un physicien allemand considéré comme le fondateur de la théorie quantique. Spécialiste de thermodynamique et du rayonnement, il cherche à expliquer le spectre du rayonnement du corps noir, problème majeur de la physique de la fin du XIX<sup>e</sup> siècle. En 1900, il propose que l'énergie s'échange par quanta entre matière et rayonnement, introduisant ainsi la constante  $h$  qui porte aujourd'hui son nom. Cette hypothèse, à l'origine purement calculatoire et à laquelle il croyait peu, marque en réalité le point de départ de la mécanique quantique. Ses travaux influencent profondément Einstein, Bohr et l'ensemble de la physique moderne. Planck reçoit le prix Nobel de physique en 1918. Il joue également un rôle important dans l'organisation de la recherche scientifique allemande.*

### I.A.3 - Confirmation expérimentale de l'hypothèse des quanta (1916)

Des travaux expérimentaux très soignés de Robert Millikan publiés en 1916 ont permis de confirmer cette théorie<sup>1</sup>. Son travail a consisté à mesurer l'énergie cinétique maximale d'électrons extraits d'une plaque de sodium éclairée par des rayonnements de différentes fréquences.

#### Prédiction dans l'hypothèse des quanta :

l'énergie du photon absorbé compense le travail d'extraction, et l'excédent est conservé par l'électron éjecté sous forme d'énergie cinétique :  $h\nu = W + E_c$  soit  $E_c = h\nu - W$ .

Espace 3

**Observations expérimentales :** l'énergie cinétique mesurée ne dépend que de la fréquence du rayonnement, voir figure 1, mais pas de son intensité.

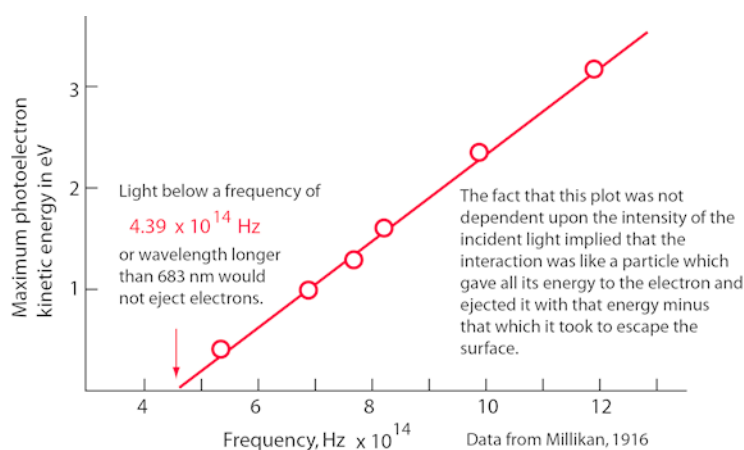


Figure 1 – Résultats expérimentaux de Millikan.

1. L'hypothèse d'Einstein semblait tellement inconcevable à Millikan qu'il cherchait en fait à la mettre en défaut. Finalement, c'est la confirmation de Millikan qui permit à Einstein d'être récompensé du prix Nobel en 1921.

## I.B - Nature corpusculaire du photon : expérience de Kimble, Dagenais et Mandel

L'existence des photons a été largement admise dès les années 1920-1930, mais il subsistait toujours une possibilité d'interprétation semi-classique dans les expériences réalisées. Celle de Kimble, Mandel et Dagenais (1977) a constitué une des premières (la première ?) démonstrations expérimentales directes et sans ambiguïté du caractère corpusculaire de la lumière.

**Dispositif expérimental :** voir figure 2.

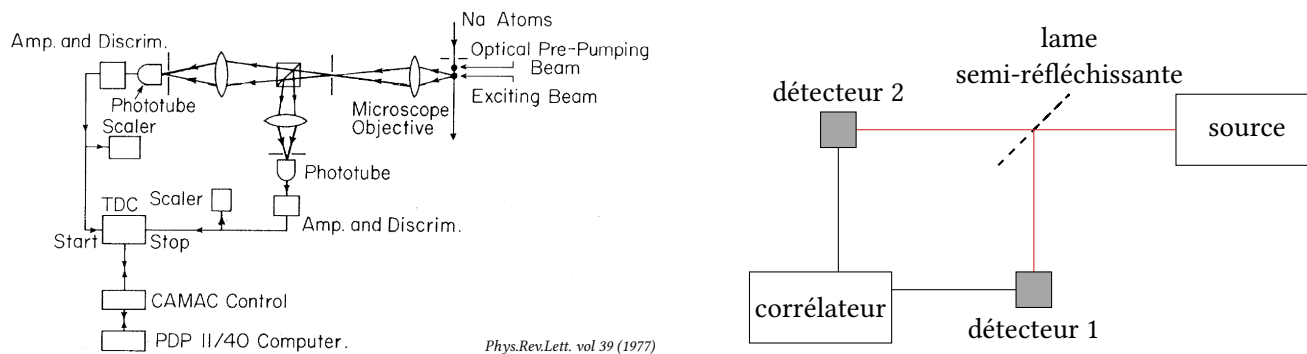


Figure 2 – Expérience de Kimble, Dagenais et Mandel.

- Q ▶ La source est une *source de photons uniques*, très peu lumineuse : si la lumière se compose de photons, alors il n'y a pas plus d'un photon à la fois dans le dispositif.
- ▶ La lame semi-réfléchissante est un composant optique qui divise un faisceau de lumière en deux parties d'intensité égale : la moitié du rayonnement traverse la lame, alors que l'autre moitié est réfléchi.
- ▶ Le corrélateur permet de mesurer le paramètre de corrélation

$$g^{(2)} = \frac{\langle I_1 I_2 \rangle}{\langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle}$$

où  $I_1$  et  $I_2$  sont les intensités mesurées par les détecteurs et les crochets désignent la moyenne sur un temps long.

M **Prédiction de la théorie ondulatoire classique :** le rayonnement se partage équitablement entre les deux voies de sortie de la lame semi-réfléchissante, donc à tout instant  $I_1 = I_2 = I_S/2$ , donc

$$\langle I_1 \rangle = \langle I_2 \rangle = \frac{I_S}{2} \quad \text{et} \quad \langle I_1 I_2 \rangle = \frac{I_S^2}{4} \quad \text{d'où} \quad g^{(2)} = 1.$$

M **Prédiction de la théorie corpusculaire :** un photon ne peut être détecté que sur un seul détecteur, donc à tout instant  $I_1 = 0$  ou  $I_2 = 0$  (parfois les deux!), et par conséquent

$$\forall t, I_1 I_2 = 0 \quad \text{d'où} \quad g^{(2)} = 0.$$

Q **Résultat expérimental :** une fois corrigés du fonctionnement non-idéal de la source de photons uniques, les résultats sont compatibles uniquement avec la théorie corpusculaire.

Certaines expériences ne peuvent être interprétées qu'en attribuant à la lumière des propriétés corpusculaires.

La lumière apparaît alors comme un flux de particules élémentaires : les **photons**.

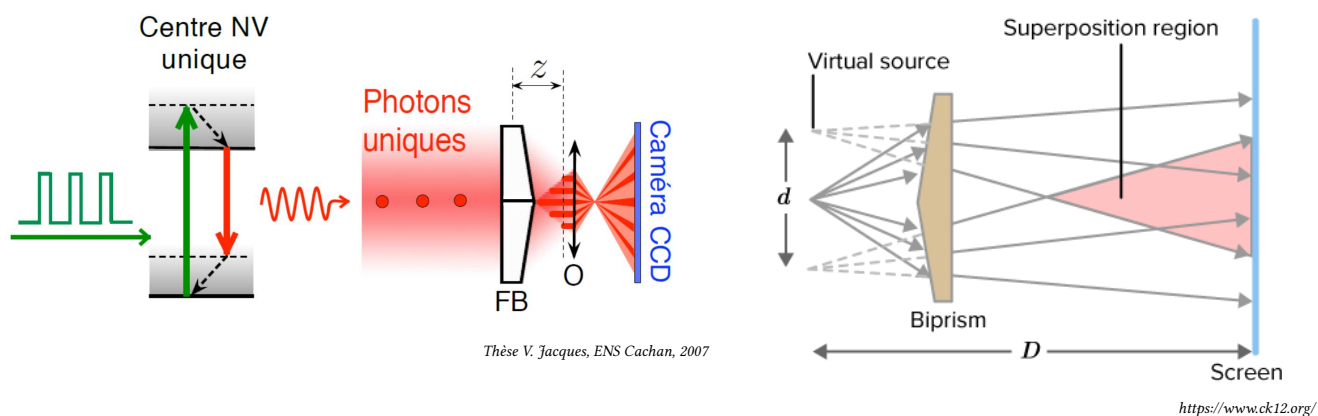
## I.C - Dualité onde-corpuscule pour la lumière : interférences de photons uniques

### I.C.1 - Mise en évidence expérimentale

Les résultats de l'expérience de Kimble semblent complètement contradictoires avec les expériences classiques d'interférométrie, comme celle des trous d'Young.

→ qu'observe-t-on si on éclaire des trous d'Young avec une source de photons uniques ?

**Dispositif expérimental :** Pour des questions pratiques, l'interféromètre utilisé est un biprisme de Fresnel, voir figure 3, plutôt que des trous d'Young au sens strict. Deux prismes identiques sont accolés par leur base, éclairés par une source ponctuelle placée sur l'axe de symétrie du biprisme. Les rayons issus de la source primaire sont réfractés différemment par les deux prismes, ce qui permet de les superposer. Des calculs basés sur les lois de la réfraction de Snell-Descartes permettent de montrer que le dispositif est équivalent à deux sources secondaires cohérentes dans une géométrie de type trous d'Young.



**Figure 3 – Biprisme de Fresnel éclairé par une source de photons uniques.** Un centre NV (azote-lacune) est l'un des défauts pouvant exister dans la structure cristalline du diamant, résultant de la juxtaposition d'une lacune et d'un atome d'azote s'étant substitué à un atome de carbone. Il peut se comporter en source de photons uniques lorsqu'il est excité par un laser de pompe.



**Résultats expérimentaux :** Le film montre 2000 clichés successifs, correspondant à la détection de 200 000 photons.

- les détections de photons se manifestent par des impacts ponctuels sur l'écran ;
- la répartition de ces impacts coïncide avec la figure d'interférences de l'optique ondulatoire.

→ ni un modèle totalement ondulatoire, ni un modèle totalement corpusculaire ne suffisent à interpréter l'expérience : la lumière présente une nature mixte.

⇒ **Généralisation :**

La lumière a donc une double nature : on parle de **dualité onde-corpuscule**.

Les photons présentent un comportement de type particule dans leur détection, mais la probabilité de les détecter en un point est régie par des lois ondulatoires.



### I.C.2 - Propriétés du photon

Comme la particule « photon » décrit le même objet physique que l'onde lumineuse, leurs propriétés sont liées.

R

#### Un photon

- ▷ se propage à la vitesse de la lumière dans la direction  $\vec{u}$  de propagation de l'onde ;
- ▷ est de masse rigoureusement nulle ;
- ▷ possède une énergie  $\varepsilon = h\nu = \hbar\omega$  où  $\nu$  et  $\omega$  sont la fréquence et la pulsation de l'onde ;
- ▷ possède une quantité de mouvement  $\vec{p} = \frac{h}{\lambda}\vec{u} = \hbar\vec{k}$  où  $\vec{k}$  est le vecteur d'onde.

Ces deux dernières relations sont appelées **relations de Planck-Einstein**, et elles impliquent la **constante de Planck  $h$**  ou la constante de Planck « réduite »  $\hbar$ ,

$$h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \quad \text{et} \quad \hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}.$$

Q

#### Application 1 : Combien de photons en TP ?

Le laser que nous avons utilisé en TP a une longueur d'onde de 630 nm et une puissance de 1 mW. Combien de photons sont émis par le laser chaque seconde ?

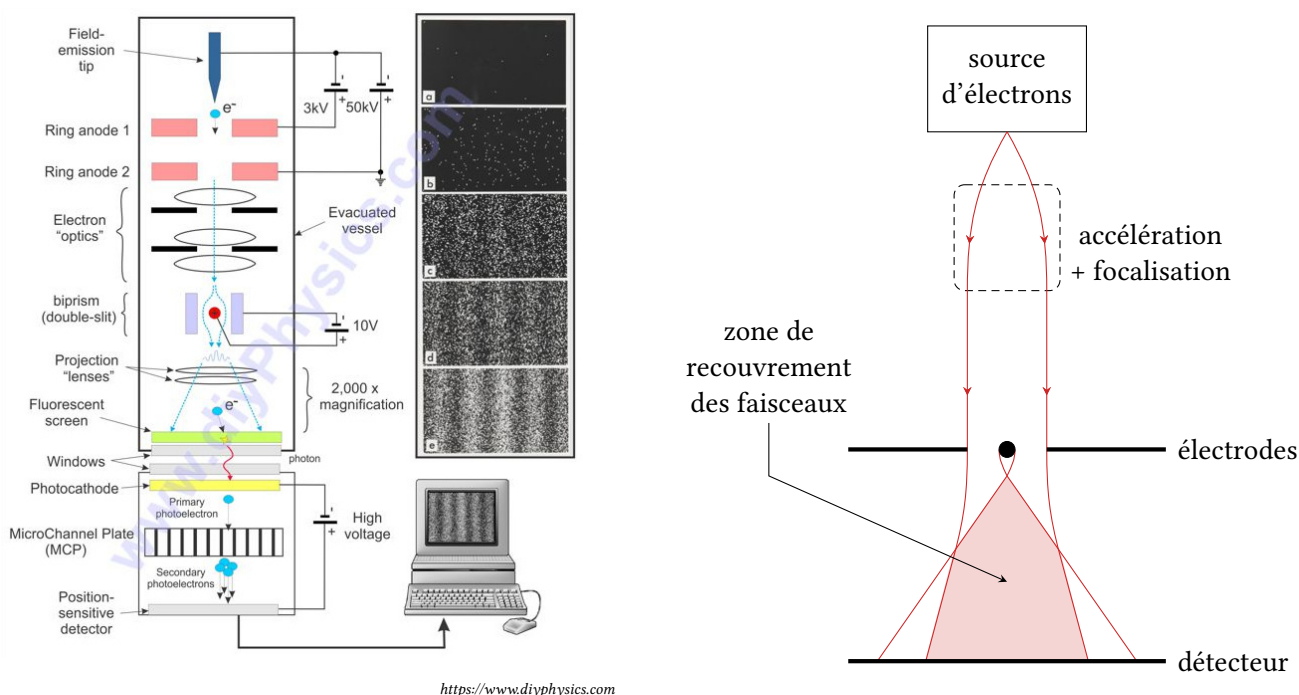
### I.D - Dualité onde-corpuscule pour la matière : interférences d'électrons uniques

Connaissant la dualité onde-corpuscule pour la lumière, il est légitime de s'interroger sur la réciproque : une particule peut-elle présenter un comportement ondulatoire ?

#### I.D.1 - Mise en évidence expérimentale

Étudions dans ce paragraphe une expérience d'interférences d'électrons dans une géométrie analogue à des trous d'Young, réalisée en 1987 par Akira Tonomura et ses collaborateurs dans les laboratoires d'Hitachi.

**Dispositif expérimental :** Des électrons émis individuellement sont accélérés puis dirigés vers un ensemble de trois électrodes, voir figure 4. Une électrode centrale cylindrique, de diamètre inférieur au micromètre, est portée à un potentiel supérieur de 10 V à celui de deux électrodes planes disposées latéralement, ce qui dévie les électrons. La distance entre les deux électrodes latérales est de 10 mm.



**Figure 4 – Expérience de Tonomura.** Le faisceau d'électrons peut être contrôlé grâce à des lentilles magnétiques, exploitant la force de Lorentz pour dévier la trajectoire des électrons.

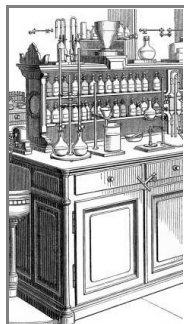


**Résultats expérimentaux :** tout à fait analogue aux interférences de photons uniques.

- ▷ les détections d'électrons se manifestent par des impacts ponctuels sur l'écran ;
  - ▷ la répartition de ces impacts coïncide avec la figure d'interférences de l'optique ondulatoire.
- ↪ les électrons présentent aussi une dualité onde-corpuscule.



### I.D.2 - Relations de de Broglie



*Un peu d'histoire :* Louis de Broglie (1892-1987) est un physicien français, membre de l'Académie des sciences et lauréat du prix Nobel de physique en 1929. Issu d'une famille aristocratique, il se tourne d'abord vers les lettres avant de s'orienter vers la physique. Son apport majeur est sa thèse de 1924 dans laquelle il postule que toute particule matérielle possède une nature ondulatoire. Cette idée ouvre la voie à la mécanique quantique moderne. Ses travaux influencent directement Schrödinger dans sa formulation de l'équation de propagation d'une particule quantique. Il s'intéresse aussi à l'interprétation physique de la mécanique quantique et défend une vision selon laquelle l'onde de matière piloterait la trajectoire de la particule, dont la cohérence a été prouvée mais qui est désormais tombée en désuétude au profit de l'interprétation probabiliste.

L'onde associée à une particule est appelée **onde de matière**. Comme pour le photon et l'onde lumineuse, la particule et l'onde de matière décrivent le même objet physique et leurs propriétés sont donc intimement liées. Ces propriétés sont données par les relations de de Broglie (prononcer « de Breuille »), qui sont le pendant des relations de Planck-Einstein.

#### Une onde de matière

- ▷ se propage à la vitesse  $\vec{v}$  de déplacement de la particule ;
- ▷ a pour vecteur d'onde  $\vec{k} = \frac{\vec{p}}{\hbar}$  où  $\vec{p} = m\vec{v}$  est la quantité de mouvement de la particule ;
- ▷ de façon équivalente, a pour longueur d'onde la **longueur d'onde de de Broglie**  $\lambda = \frac{h}{p}$  ;

avec la constante de Planck  $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$  et  $\hbar = h/2\pi$ .

Il n'existe pas de relation simple et universelle entre l'onde de matière et l'énergie de la particule : tout dépend du profil d'énergie potentielle dans lequel elle évolue. Aller plus loin demande de résoudre l'équation de Schrödinger, l'équation fondamentale de la mécanique quantique, ce que vous ferez en MP-MP\*.

*Remarque :* postulées théoriquement en 1924 par des arguments de symétrie interne de la physique, les relations de de Broglie ont été confirmées par Davisson et Germer dès 1927 qui ont mis en évidence la diffraction d'électrons par des cristaux.

### I.D.3 - Quand une description ondulatoire est-elle nécessaire ?

Les effets ondulatoires de la matière deviennent significatifs lorsque la longueur d'onde de de Broglie est du même ordre de grandeur que les dimensions caractéristiques du système.

#### Application 2 : Ordres de grandeur

- 1 - Une balle de tennis risque-t-elle d'être diffractée par le cordage d'une raquette ?
- 2 - Vérifier que la structure de cristaux peut être investiguée par diffraction de neutrons thermiques, se déplaçant à une vitesse de l'ordre de  $2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$

## I.E - Influence d'un observateur

Le résultat de l'expérience de Tonomura laisse entendre que l'onde de matière, donc l'électron, passe par les deux fentes *à la fois* ... ce qui semble très surprenant ! On peut donc imaginer inclure dans l'expérience un détecteur placé juste après les fentes permettant de déterminer par quelle fente l'électron est passé.

De telles expériences ont été réalisées par Michael Chapman (1995) ou encore Yoon-Ho Kim (1999), mais leur géométrie s'éloigne de celle des trous d'Young et devient trop complexe pour être présentée dans ce cours. Leur conclusion est toujours la même :

R



Lorsque l'on détermine par quelle « fente » la particule est passée, les interférences disparaissent et les particules se répartissent uniformément sur « l'écran » !

Q

**Interprétation** (simplifiée) :

La particule est détectée au niveau d'une des fentes, il n'y a donc plus de fente à traverser entre cette détection et l'écran, et donc plus de figure d'interférences.

Espace 4

**Récapitulatif :**



Vidéo courte récapitulant de manière imagée les conclusions de ce paragraphe.



Vidéo plus longue ScienceEtonnante reprenant les discussions de ce paragraphe.

## II - Introduction au formalisme de la mécanique ondulatoire

La **mécanique ondulatoire** désigne la mécanique quantique version « dualité onde-corpuscule ». Son formalisme est très fructueux dans une première approche, mais la formulation moderne de la théorie quantique utilise des objets plus généraux issus de l'algèbre linéaire ... et s'affranchit complètement du formalisme ondulatoire.

### II.A - Fonction d'onde

**En mécanique classique :** deux particules lancées d'un même point  $M_0$  à l'instant  $t_0$  avec une même vitesse arriveront toujours au même point  $M_1$  au même temps  $t_1$  en suivant toujours la même trajectoire qu'il est possible de suivre point par point.

**En mécanique quantique :** ce n'est plus vrai, comme l'atteste l'émergence de figures d'interférence qui implique la nécessité d'une description ondulatoire.

↪ tous les électrons ou tous les photons, même émis exactement de la même façon, peuvent être détectés à deux endroits différents avec une certaine probabilité ;

↪ parler de trajectoire d'une particule quantique n'a pas vraiment de sens puisqu'il n'est pas possible de localiser une onde.

R



En mécanique quantique, la notion de trajectoire  $t \mapsto \overrightarrow{OM}(t)$  doit être remplacée par celle de **fonction d'onde**  $(M, t) \mapsto \psi(M, t)$ .

Cette fonction d'onde est telle que  $dP = |\psi(M, t)|^2 dV$  est la probabilité qu'une mesure de la position de la particule à l'instant  $t$  la détecte dans un volume élémentaire  $dV$  centré sur le point  $M$ .

On dit que  $|\psi(M, t)|^2$  est la **densité de probabilité de détection** (ou parfois de présence) au point  $M$ , et  $\psi(M, t)$  l'amplitude de probabilité de détection.

🔴🔴🔴 **Attention !** Il est essentiel de comprendre que c'est la *détection* de la particule qui est probabiliste, et non pas sa *propagation*, qui est déterministe. Autrement dit, deux particules émises à l'identique auront toujours la même fonction d'onde, et donc la même probabilité d'être détectées en chaque point de l'espace. Mais comme cette détection est probabiliste, elle n'aura pas toujours lieu au même endroit.



🔴🔴🔴 **Attention !** Cette probabilité de détection est intrinsèque au comportement quantique de la particule, et **pas du tout** reliée à des incertitudes expérimentales !



- ▶ L'existence et l'interprétation de la fonction d'onde constituent un postulat de la mécanique quantique ondulatoire, qui ne se démontre donc pas.
- ▶ Une particularité de la fonction d'onde est d'être à valeurs complexes. Cela peut paraître surprenant mais ne pose pas de difficulté car c'est son module (donc un nombre réel) qui a une signification expérimentale.
- ▶ La fonction d'onde vérifie une condition de normalisation : la particule se trouve bien quelque part !

$$\iiint_{\text{espace}} |\psi(M, t)|^2 dV = 1$$

Espace 5

- ▶ Dimension :

une probabilité est sans dimension, donc  $[|\psi(M, t)|^2 dV] = [\psi]^2 \times \text{m}^3 = 1$ ,  
donc  $[\psi] = \text{m}^{-3/2}$ .

Espace 6

**Remarque :** Il est fréquent de raisonner sur des géométries simplifiées, par exemple unidimensionnelle où  $\psi(x, t)$  ne dépend que d'une seule coordonnée d'espace. Dans ce cas, la condition de normalisation s'écrit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x, t)|^2 dx = 1.$$

Notons que cela modifie également la dimension de la fonction d'onde, qui s'exprimerait ici en  $\text{m}^{-1/2}$ .

- ▶ Lorsque l'on raisonne en termes de fonction d'onde, les lois de Newton ne s'appliquent évidemment pas et doivent être remplacées par l'**équation de Schrödinger**, qui est à la mécanique ondulatoire ce que le PFD est à la mécanique newtonienne.
- ▶ L'équation de Schrödinger est linéaire, donc les fonctions d'onde vérifient le principe de superposition : si  $\psi_1(M, t)$  et  $\psi_2(M, t)$  décrivent deux états possibles de la particule, alors  $\lambda_1\psi_1(M, t) + \lambda_2\psi_2(M, t)$  est également un état possible si les constantes (complexes)  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont correctement normalisées.

## II.B - Interprétation d'une expérience d'interférences de particules uniques

Considérons une expérience d'interférences de particules uniques de type fentes d'Young. On s'intéresse à la probabilité de détecter la particule en un point d'abscisse  $x$  de l'écran. Notons  $\psi_1(x, t)$  (resp.  $\psi_2(x, t)$ ) la fonction d'onde de la particule au point de l'écran d'abscisse  $x$  lorsque la particule part de la source, que la fente ① est ouverte et la fente ② fermée (resp. ② ouverte et ① fermée).

Lorsque seule la fente ① est ouverte : probabilité de détecter la particule dans une bande élémentaire de l'écran d'abscisse comprise entre  $x$  et  $x + dx$  :  $dP_1(x) = |\psi_1(x, t)|^2 dx$

Espace 7

Lorsque seule la fente ② est ouverte :  $dP_2(x) = |\psi_2(x, t)|^2 dx$

Espace 8



Lorsque les deux fentes sont ouvertes simultanément :

Principe de superposition :  $\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1(x, t) + \psi_2(x, t))$  ( $\sqrt{2}$  pour la normalisation).

Proba de détection :  $dP_{1+2}(x) = |\psi(x, t)|^2 dx$ , avec

$$|\psi|^2 = \frac{1}{2} |\psi_1 + \psi_2|^2 = \frac{1}{2} |\psi_1|^2 + \frac{1}{2} |\psi_2|^2 + \frac{1}{2} (\psi_1 \psi_2^* + \psi_1^* \psi_2)$$

et ainsi  $dP_{1+2} \neq \frac{1}{2}(dP_1 + dP_2)$  : il y a bien interférences.

Espace 9

Aller plus loin dans le calcul nécessite l'expression des fonctions d'onde, et donc de résoudre l'équation de Schrödinger. Ce ne serait pas particulièrement compliqué dans ce cas, mais un peu loin de nos préoccupations quand même.

► **Pour approfondir** : En présence d'un détecteur qui identifierait la fente par laquelle passe la particule, l'état quantique après les fentes ne serait plus la superposition  $\psi$ , mais  $\psi_1$  pour la moitié des particules et  $\psi_2$  pour l'autre moitié, selon la fente où elles auraient été détectées. On a alors un **mélange statistique** d'états, ce qui est profondément différent d'une superposition quantique. Pour les particules détectées au niveau de la fente ①, la probabilité de détection sur l'écran entre  $x$  et  $x + dx$  serait  $dP_1(x)$ , et réciproquement  $dP_2(x)$  pour les particules détectées au niveau de la fente ②. En effet, savoir par quelle fente la particule est passée ramène à la situation où une seule fente est ouverte. En supposant que la moitié des particules sont détectées au niveau de chaque fente, on a donc

$$dP_{1+2+\text{détecteur}}(x) = \frac{1}{2}dP_1(x) + \frac{1}{2}dP_2(x).$$

Il n'y a donc plus d'interférences entre particules. La mesure a détruit l'état de superposition quantique. ■

## II.C - Inégalité d'Heisenberg

### II.C.1 - Énoncé

**En mécanique classique** : la position et la vitesse peuvent être connues avec une précision infinie, en pratique seulement limitée par la précision des instruments de mesure.

**En mécanique quantique** : la nécessité de prendre en compte le caractère ondulatoire implique une indétermination sur la position et la quantité de mouvement de la particule (une onde ne peut pas être parfaitement localisée), et ce **indépendamment** de toute problématique de précision des mesures.

↪ ces indéterminations sont quantifiées par les écarts-types  $\Delta x$  et  $\Delta p_x$  des distributions de probabilité de détection à une position donnée ou avec une quantité de mouvement donnée.

### Inégalité d'Heisenberg

Pour une particule quantique se déplaçant à une dimension, repérée par sa position  $x$  et ayant pour quantité de mouvement  $p_x = mv_x$ , l'indétermination quantique  $\Delta x$  sur la position et celle  $\Delta p_x$  sur la quantité de mouvement vérifient

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

Connaître simultanément position et quantité de mouvement d'une particule quantique est impossible.

→ si la position de la particule est connue précisément ( $\Delta x$  petit), alors sa vitesse l'est forcément assez mal ( $\Delta p_x$  grand).

**Attention !**  $\Delta x$  et  $\Delta p_x$  traduisent une indétermination physique intrinsèque, ce n'est pas une question de manque de précision de l'appareil de mesure.

→ même avec des appareils (fictifs) infiniment précis, répéter un grand nombre de fois la même mesure donnerait toujours des résultats qui présenteraient une dispersion  $\Delta x$  et  $\Delta p_x$ .

#### Application 3 : Ordres de grandeur

1 - Considérons le bras automatisé d'un robot chargé de positionner une pièce d'un assemblage. La précision du robot est-elle limitée par la physique quantique ?

- ▷ masse de la pièce :  $m = 10 \text{ g}$  ;
- ▷ position finale de la pièce : doit être précise à mieux que  $\Delta x = 0,1 \text{ mm}$  ;
- ▷ vitesse de la pièce au moment où elle est positionnée : inférieure à  $\Delta v = 1 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$ .

2 - Des techniques de refroidissement laser et confinement magnétique permettent de piéger un nuage d'atomes de sodium. Peut-on améliorer le piégeage ?

- ▷ masse d'un atome de sodium :  $m = 4 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$  ;
- ▷ le nuage d'atome occupe un domaine de taille  $\Delta x \sim 3 \mu\text{m}$  ;
- ▷ les vitesses des atomes sont de l'ordre de  $\Delta v \sim 3 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$ .

→ une particule quantique ne peut pas être immobilisée !

### II.C.2 - « Égalité » d'Heisenberg à la limite quantique

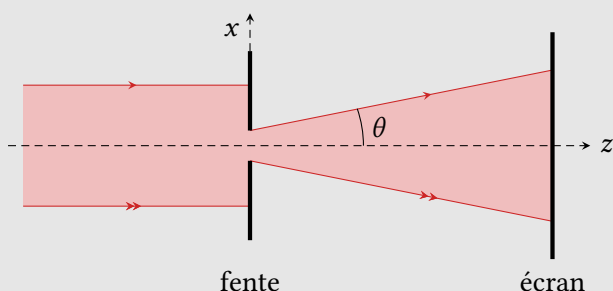
Il s'agit de renverser l'interprétation faite dans les exemples précédents : si un système est quantique, alors les indéterminations de position et quantité de mouvement sont proches de la limite d'Heisenberg.

Si le comportement d'une particule est quantique, elle est à la limite de l'inégalité d'Heisenberg : les indéterminations  $\Delta r$  sur sa position et  $\Delta p$  sur sa quantité de mouvement sont reliées par

$$\Delta r \times \Delta p \sim \hbar$$

En l'absence d'information sur la direction du mouvement de la particule, on assimile fréquemment  $\Delta r$  à la taille caractéristique du domaine qui lui est accessible et  $\Delta p$  à la norme  $p = mv$  : lorsque la particule peut se déplacer dans toutes les directions, les projections du vecteur quantité de mouvement peuvent prendre toutes les valeurs entre  $-p$  et  $p$ , ce qui entraîne donc une dispersion de l'ordre de  $p$ .

#### Application 4 : Diffraction d'une onde de matière



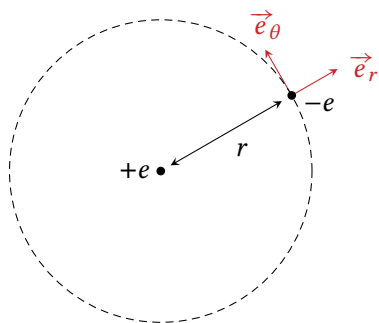
Un faisceau de particule quantique de quantité de mouvement  $\vec{p}_0 = p_0 \vec{e}_z$  est diffracté par une fente de largeur  $a$ .

Estimer l'angle d'ouverture  $\theta$  du faisceau diffracté en fonction de  $a$  et de la longueur d'onde de Bröglie  $\lambda$  des particules diffractées.

### III - Description semi-classique de l'atome d'hydrogène

On qualifie de **semi-classique** une approche qui conserve certains concepts de la physique classique (p.ex. forces faisant référence aux positions des particules) tout en introduisant « à la main » les éléments quantiques nécessaires à l'explication des phénomènes observés. Ce paragraphe a pour but de développer une telle approche pour décrire un peu de la physique de l'atome d'hydrogène.

**Modèle :** un électron ponctuel (masse  $m$ , charge  $e$ ) suit une orbite plane circulaire autour d'un proton ponctuel, fixe dans un référentiel galiléen.



Force et énergie potentielle d'interaction :

$$\vec{F} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \text{ et } E_p = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Espace 10

#### III.A - Taille caractéristique de l'atome

M

##### Application 5 : Rayon de Bohr de l'atome d'hydrogène

Estimons un ordre de grandeur du rayon de l'atome d'hydrogène dans son état le plus stable, en s'appuyant sur « l'égalité » d'Heisenberg à la limite quantique.

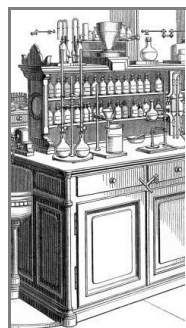
- 1 - Justifier que la quantité de mouvement d'un électron en orbite circulaire de rayon  $r$  est de l'ordre de  $\hbar/r$ .
- 2 - En déduire une expression de l'énergie mécanique de l'électron ne dépendant que du rayon  $r$  de son orbite.
- 3 - Représenter l'allure de l'énergie mécanique de l'électron en fonction du rayon de l'orbite. Comment identifier l'orbite la plus stable ? En déduire son rayon.

Q

Le rayon de l'atome d'hydrogène dans son état le plus stable est de l'ordre du **rayon de Bohr**,

$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2} = 5,29 \cdot 10^{-11} \text{ m.}$$

#### III.B - Modèle de Bohr



*Un peu d'histoire :* Niels Bohr (1885-1962) est un physicien danois qui joue un rôle central dans la naissance de la mécanique quantique. Après des études à l'Université de Copenhague et un séjour auprès de Ernest Rutherford, il propose en 1913 un modèle de l'atome d'hydrogène fondé sur des orbites électroniques quantifiées, expliquant les raies spectrales observées. Il fonde ainsi la première théorie quantique de la structure atomique. Bohr développe ensuite le principe de complémentarité, selon lequel les descriptions ondulatoire et corpusculaire sont nécessaires et non exclusives. Il contribue également à la formation de nombreux physiciens au sein de l'Institut de Copenhague. Pendant la Seconde Guerre mondiale, il s'exile aux États-Unis et participe aux réflexions sur l'énergie nucléaire. Il reçoit le prix Nobel de physique en 1922.

##### III.B.1 - Hypothèses

Le modèle de Bohr (1913) a pour but d'expliquer le fait que les spectres atomiques en général, et de l'hydrogène en particulier, ne contiennent que certaines raies à des longueurs d'onde bien précises. Il atteint ce but, au prix d'une hypothèse initialement sans justification physique. S'il permet de prédire correctement le spectre de l'hydrogène, le modèle de Bohr ne permet pas une description complètement satisfaisante de l'atome. En particulier, ce modèle ne peut expliquer le spectre d'éléments à plusieurs électrons, pas plus que la formation de liaisons chimiques.

R

**Modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène :**

- L'électron suit une orbite circulaire autour du proton sous l'action de la force coulombienne.
- Les seules orbites possibles sont telles que le moment cinétique y prend des valeurs discrètes

$$L_z = n\hbar \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}^* .$$

On dit que le moment cinétique est **quantifié**.

- L'électron n'émet ou n'absorbe de lumière que lors de transitions entre niveaux, avec une fréquence vérifiant la relation de Planck-Einstein :  $h\nu = \Delta E$ .

**III.B.2 - Interprétation ondulatoire de la quantification**

L'hypothèse de quantification a été justifiée par Schrödinger en 1926, dans le cadre de la mécanique ondulatoire.

Expression du moment cinétique :

$$\vec{L} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p} = r \vec{e}_r \wedge p \vec{e}_\theta = rp \vec{e}_z .$$

Or l'électron a une longueur d'onde de de Bröglie  $\lambda = h/p$ , d'où

$$L_z = r \frac{h}{\lambda} = \frac{2\pi r}{\lambda} \hbar .$$

L'hypothèse de quantification revient donc à supposer qu'une orbite peut exister si et seulement si son rayon  $r_n$  est tel que  $2\pi r_n = n\lambda$ , ce qui est une condition d'interférence constructive de l'onde de matière.

Espace 11

L'hypothèse de quantification de Bohr revient à supposer que l'onde de matière associée à l'électron interfère constructivement avec elle-même après avoir parcouru toute l'orbite.

**III.C - Spectre de l'hydrogène dans le modèle de Bohr****III.C.1 - Niveaux d'énergie de l'électron dans l'atome****Application 6 : Niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène**

- 1 - En utilisant uniquement la théorie classique, établir l'expression de la vitesse de l'électron en orbite circulaire de rayon  $r$  autour du proton.
- 2 - En déduire les rayons  $r_n$  des orbites permises par l'hypothèse de quantification de Bohr.
- 3 - Montrer que l'énergie (sous-entendu mécanique) de l'électron vérifie également une condition de quantification, faisant apparaître une constante  $E_i$  à déterminer et interpréter.

Les rayons des orbites permises du modèle de Bohr sont reliées au rayon de Bohr par

$$r_n = n^2 a_0 \quad \text{avec} \quad a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2} = 5,29 \cdot 10^{-11} \text{ m}$$

Il en découle une quantification des niveaux d'énergie de l'électron dans l'atome,

$$E_n = -\frac{E_i}{n^2} \quad \text{avec} \quad E_i = \frac{me^4}{32\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2} = 13,6 \text{ eV}$$

La constante  $E_i$  représente l'**énergie d'ionisation** de l'atome d'hydrogène, c'est-à-dire l'énergie qu'il faut apporter pour lui arracher un électron.

→ si l'électron se trouve dans l'état de plus basse énergie et qu'on lui apporte une énergie supérieure à  $E_i$ , alors il n'existe plus d'orbite pour l'accueillir, et il se retrouve donc arraché à l'atome.

### III.C.2 - Interprétation du spectre

Les transitions entre différents niveaux d'énergie ( $n \geq m$ ), c'est-à-dire entre différentes orbites, se font par émission ou absorption d'un photon de fréquence telle que

$$h\nu_{nm} = \frac{hc}{\lambda_{nm}} = E_n - E_m \quad \text{soit} \quad \lambda_{nm} = \frac{hc}{E_i} \frac{1}{\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}}.$$

Lorsqu'on excite des atomes, dans une lampe à décharge par exemple, ceux-ci se desexcitent en émettant des photons dont les longueurs d'onde correspondent aux écarts entre niveaux d'énergie de l'atome, voir figure 5. Le spectre de la lumière émise est alors un **spectre de raies d'émission**.

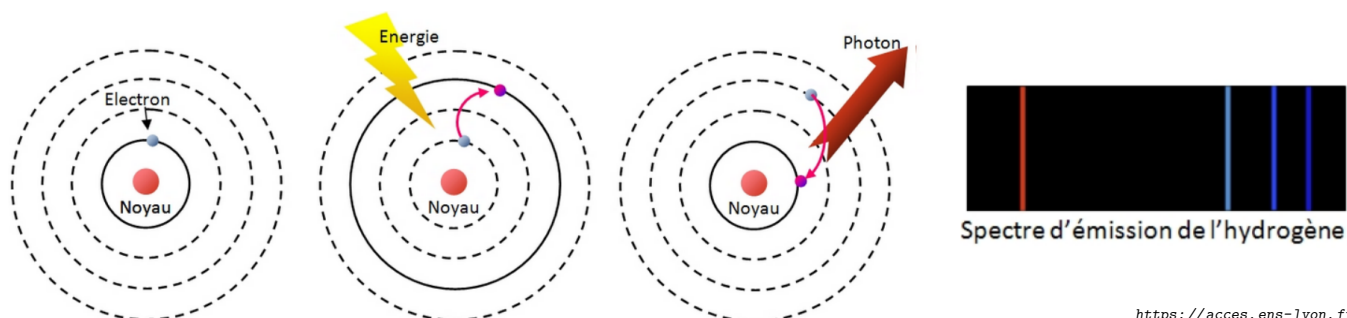


Figure 5 – Spectre d'émission.

Réciproquement, lorsqu'on envoie une lumière blanche de spectre continu sur des atomes au repos, ceux-ci n'absorbent que les longueurs d'ondes correspondant aux écarts entre niveaux d'énergie de l'atome, voir figure 6. Les atomes excités finissent par se desexciter, mais le photon de desexcitation est émis dans une direction aléatoire, indépendante la direction de propagation de la lumière incidente. Le spectre de la lumière transmise est alors appauvri en ces longueurs d'ondes, et devient un **spectre de raies d'absorption**.

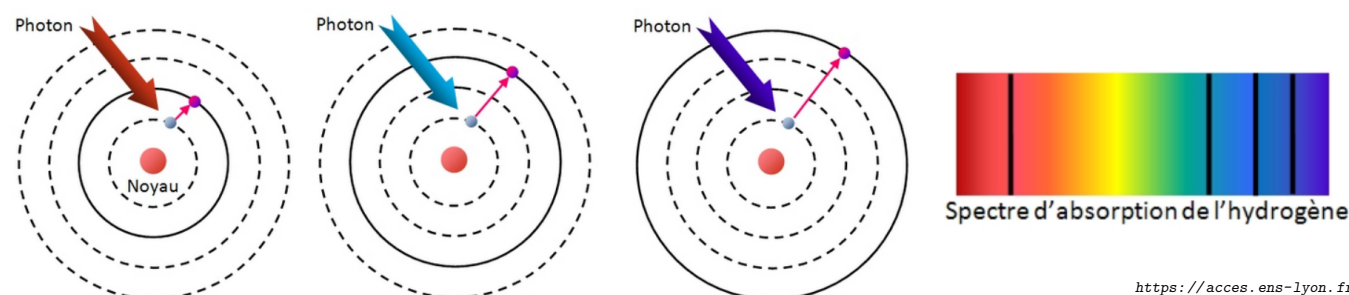


Figure 6 – Spectre d'absorption.

## Annexe : Physique quantique d'hier et d'aujourd'hui

La mécanique quantique est la branche de la physique qui étudie les phénomènes fondamentaux à l'œuvre dans les systèmes physiques, en particulier à l'échelle atomique et subatomique, ainsi qu'à très basse température.

Elle a été introduite au début du XX<sup>e</sup> siècle afin de résoudre plusieurs problèmes que la physique classique ne parvenait pas à expliquer, tels que le rayonnement du corps noir, l'effet photoélectrique ou encore l'existence de raies spectrales dans les spectres d'émission. Parmi les figures majeures de cette période fondatrice figurent Max Planck, Albert Einstein, Niels Bohr, Werner Heisenberg, Erwin Schrödinger et Louis de Broglie, auxquels se sont ajoutés par la suite des physiciens comme Paul Dirac, Wolfgang Pauli ou Enrico Fermi. Au fil de son développement, la mécanique quantique s'est révélée extraordinairement féconde, tant sur le plan théorique que dans ses applications. Elle a permis de comprendre la structure de l'atome et constitue aujourd'hui le cadre fondamental de description de la matière et des particules élémentaires. Elle forme ainsi l'un des piliers de la physique moderne, aux côtés de la relativité.

La physique quantique est également célèbre pour les difficultés conceptuelles qu'elle soulève et les débats qu'elle a suscités quant à son interprétation. Des notions présentées parfois de manière quasiment mystique comme la dualité onde-corpuscule, la superposition d'états, l'intrication quantique (illustrée par le célèbre paradoxe du chat de Schrödinger) ou encore la non-localité interrogent profondément notre intuition classique du monde physique.

Aujourd'hui, la physique quantique constitue un domaine de recherche extrêmement actif, mobilisant des milliers de chercheurs à travers le monde. Les thématiques modernes concernent par exemple la cryptographie quantique, la réalisation d'ordinateurs quantiques, ou encore l'électronique quantique. On parle également de plus en plus de matériaux quantiques, c'est-à-dire de systèmes dans lesquels les effets quantiques collectifs des électrons donnent naissance à des propriétés inédites à l'échelle macroscopique. Dans ce contexte, l'ingénierie quantique désigne l'ensemble des approches visant à contrôler, fabriquer et exploiter directement les états quantiques de la matière et du rayonnement. Elle repose sur la capacité à manipuler des systèmes quantiques individuels (atomes, photons, circuits supraconducteurs) afin de réaliser des fonctions technologiques nouvelles.

La France occupe une place importante dans ce domaine, notamment sur le plan expérimental. Des centres de recherche majeurs se trouvent en région parisienne, en particulier sur le plateau de Saclay et à l'École normale supérieure, ainsi qu'en région grenobloise, où sont développées des infrastructures de pointe utilisées par des équipes internationales. Tous les chercheurs français récompensés au XXI<sup>e</sup> siècle par le prix Nobel de physique l'ont été pour leurs contributions majeures à la physique quantique ou pour des applications qui en découlent :

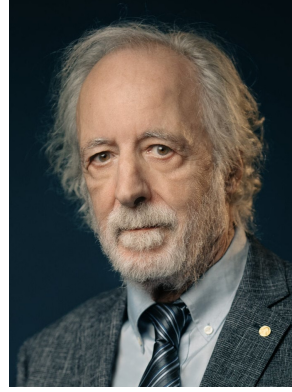
- ▶ Michel Devoret (2025), pour la mise en évidence d'effets quantiques macroscopiques (effet tunnel et quantification de l'énergie) dans les circuits supraconducteurs ;
- ▶ Anne Lhuillier et Pierre Agostini (2023), pour leurs travaux sur les impulsions lasers ultra-courtes permettant de suivre le mouvement des électrons à l'intérieur des molécules ;
- ▶ Alain Aspect (2022), pour ses expériences sur l'intrication quantique et les inégalités de Bell, qui ont confirmé la nature non locale de la mécanique quantique ;
- ▶ Gérard Mourou (2018), pour la production d'impulsions lumineuses ultra-brèves de forte intensité qui ont eu des applications majeures dans le domaine médical ;
- ▶ Serge Haroche (2012), pour ses méthodes expérimentales permettant la mesure et la manipulation de systèmes quantiques individuels ;
- ▶ Albert Fert (2007), pour la découverte de la magnétorésistance géante, à l'origine de nombreuses applications en électronique moderne ;
- ▶ Claude Cohen-Tannoudji (1997), pour le développement de méthodes de refroidissement et de piégeage d'atomes par laser.



Michel Devoret



Anne Lhuillier



Pierre Agostini



Alain Aspect



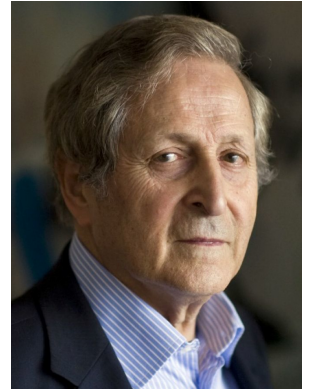
Gérard Mourou



Serge Haroche



Albert Fert



Claude Cohen-Tannoudji

## Correction des applications de cours

### Application 1 : Combien de photons en TP ?

Un photon émis par le laser a une énergie

$$\varepsilon = \frac{hc}{\lambda} \sim 3 \cdot 10^{-19} \text{ J.}$$

L'énergie totale rayonnée par le laser en une seconde vaut

$$E = P \Delta t = 1 \cdot 10^{-3} \text{ J.}$$

On en déduit le nombre  $N$  de photons

$$E = N\varepsilon \quad \text{soit} \quad N = \frac{E}{\varepsilon} = 3 \cdot 10^{15}$$

On comprend pourquoi les impacts de photons uniques ne sont pas décelables ...

### Application 2 : Ordres de grandeur

1  $m \sim 50 \text{ g}, v \sim 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  donc  $\lambda = \frac{h}{mv} \sim 6 \cdot 10^{-34} \text{ m}$  ce qui est même plus petit que le noyau atomique.

2  $m = 1,6 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$  donc  $\lambda = \frac{h}{mv} \sim 2 \cdot 10^{-10} \text{ m}$  ce qui est exactement l'ordre de grandeur de la distance entre atomes dans un solide.

### Application 3 : Ordres de grandeur

1  $\Delta p = m \Delta v = 10 \cdot 10^{-3} \times 1 \cdot 10^{-3} = 1 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$   
donc  $\Delta x \times \Delta p \sim 1 \cdot 10^{-4} \times 1 \cdot 10^{-5} = 1 \cdot 10^{-9} \text{ J} \cdot \text{s} = 10^{25} \hbar \gg \frac{\hbar}{2}$

2  $\Delta p = m \Delta v = 4 \cdot 10^{-26} \times 3 \cdot 10^{-3} = 1 \cdot 10^{-28} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$   
donc  $\Delta x \times \Delta p \sim 3 \cdot 10^{-6} \times 1 \cdot 10^{-28} = 3 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \simeq \frac{\hbar}{2}$

### Application 4 : Diffraction d'une onde de matière

Raisonnons sur une unique particule quantique diffractée. Sa quantité de mouvement avant diffraction est supposée bien connue (mais pas sa position!) et vaut

$$\vec{p}_0 = \frac{h}{\lambda} \vec{e}_z.$$

Juste après l'objet diffractant, la position est connue avec une indétermination  $\Delta x \sim a/2$ , mais on a perdu en information sur la quantité de mouvement : on sait seulement qu'elle est comprise entre  $\vec{p}_+$  et  $\vec{p}_-$  tels que

$$\vec{p}_{\pm} = \frac{h}{\lambda} (\pm \sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_z).$$

On en déduit l'indétermination

$$\Delta p_x \sim \frac{h}{\lambda} \sin \theta.$$

La diffraction étant due à un phénomène quantique, on est proche de la limite de l'inégalité d'Heisenberg, d'où en ordre de grandeur

$$\Delta x \Delta p_x \sim \hbar \quad \text{soit} \quad a \times \frac{h}{\lambda} \sin \theta \sim \hbar$$

ce qui est à rapprocher du résultat bien connu de diffraction,

$$\sin \theta \sim \frac{\lambda}{a}.$$

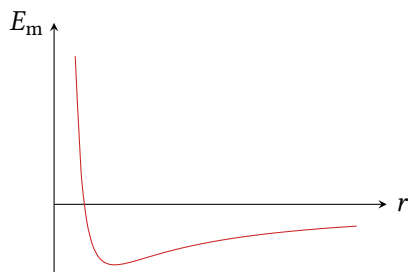
Ne pas retomber exactement sur la même expression n'a rien de surprenant puisque notre raisonnement est uniquement qualitatif en ordre de grandeur.

## Application 5 : Rayon de Bohr de l'atome d'hydrogène

1 L'indétermination sur la position de l'électron est de l'ordre du rayon de l'atome, et comme le mouvement peut avoir lieu dans toutes les directions, on en déduit

$$p \sim \Delta p \sim \frac{\hbar}{r}$$

d'après « l'égalité » d'Heisenberg à la limite quantique.



2 Par définition,

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 + E_p(r) = \frac{p^2}{2m} + E_p = \frac{\hbar^2}{2mr^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

3 L'orbite la plus stable est celle qui est atteignable lorsque l'énergie mécanique est minimale.

$$\frac{dE_m}{dr} = -\frac{2\hbar^2}{2mr^3} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{1}{r^2} \left( -\frac{\hbar^2}{m} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right).$$

qui s'annule pour

$$r = a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2} = 5,29 \cdot 10^{-11} \text{ m}$$

## Application 6 : Niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène

4 D'après le PFD dans la base de Frénet,

$$-m \frac{v^2}{r} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{d'où} \quad v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m r}}$$

5 Quantification du moment cinétique :

$$L_z = mrv = mr_n \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m r_n}} \underset{\text{Bohr}}{=} n\hbar$$

d'où on déduit

$$r_n = n^2 \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2} = n^2 a_0.$$

6 En reprenant l'expression de la vitesse,

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}$$

donc pour les orbites stables,

$$E_n = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 n^2 a_0} = -\frac{E_i}{n^2}$$

où la constante  $E_i$  s'interprète comme l'énergie d'ionisation, c'est-à-dire l'énergie au delà de laquelle l'électron est arraché à l'atome.