Formation des images optiques

Conformément au programme, on rappelle les relations de conjugaison et de grandissement pour une lentille mince. Les notations sont celles du cours.

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \qquad \text{et} \qquad \overline{FA} \times \overline{F'A'} = -f'^2$$

$$\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} \qquad \text{et} \qquad \gamma = -\frac{\overline{F'A'}}{f'} = -\frac{f}{\overline{FA}}$$

La distance focale *image* est notée f' alors que la distance focale *objet* est notée f.

Exercices

Exercice 1 : Construction de figures [♦◊◊]

> *Les tracés demandés dans cet exercice doivent vous aider à vous familiariser avec la construction de rayons : vous devez savoir les faire sans difficulté. Cet exercice n'est là que pour vous rappeler les différents cas possibles.*

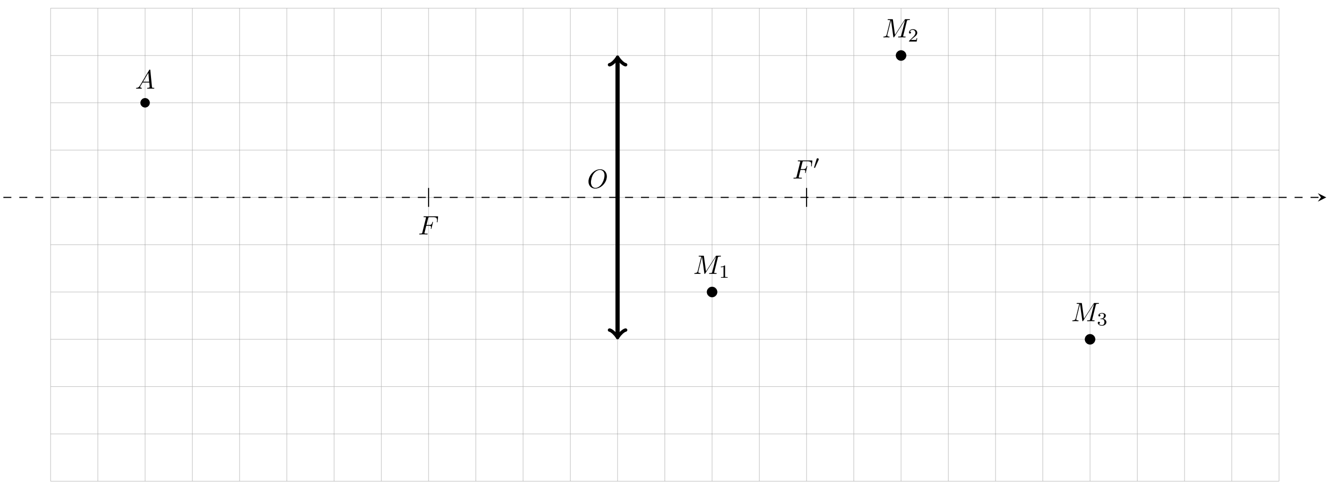
Considérons une lentille convergente de focale valant 3 cm sur votre feuille et un objet de hauteur 1,5 cm sur votre feuille. Sur des schémas différents, construire l'image de cet objet lorsqu'il est situé
- ▷ à l'infini avant de la lentille ;
- ▷ avant le foyer objet ;
- ▷ entre le foyer objet et le centre optique ;
- ▷ entre le centre optique et le foyer image ;
- ▷ après le foyer image.

Préciser à chaque fois si l'objet et l'image sont réel(s) ou virtuel(s). Veiller à respecter la convention de tracé des rayons réels en traits pleins et des rayons virtuels en traits pointillés.

Reprendre les tracés dans le cas d'une lentille divergente, en inversant les mots « foyer objet » et « foyer image ».

Exercice 2 : Que voit-on ? [♦◊◊]

Compléter la figure ci-dessous pour tracer la marche du faisceau lumineux complet émis par le point A. En déduire si des observateurs dont l'œil serait placé aux différents points M voient ou non le point A.



Exercice 3 : Pouvoir séparateur de l'œil [♦◊◊]

Le pouvoir séparateur d'un œil emmétrope (normal) est $\theta_0 = 3 \cdot 10^{-4}$ rad, c'est-à-dire que deux points ne peuvent être vus distinctement que si leur écart angulaire est supérieur à cette valeur.

1 - Déterminer la distance jusqu'à laquelle cet œil peut distinguer deux traits parallèles séparés de 2 mm.

2 - Déterminer la hauteur que doit avoir une lettre d'un panneau autoroutier pour être lisible à 250 m.

3 - En modélisant l'œil comme une lentille convergente associée à un écran placé à une distance fixe de 20 mm derrière, déterminer la taille moyenne d'un récepteur de la rétine.

Exercice 4 : Manipulation des relations de conjugaison et de grandissement [♦♦◊]

> *Toutes les questions sont indépendantes. L'objectif de l'exercice est que vous y répondiez par le calcul, en utilisant les relations de conjugaison et de grandissement, mais cela ne doit surtout pas vous empêcher de tracer des schémas pour vous aider à identifier les paramètres pertinents ou confirmer vos réponses !*

1 - Une lentille de focale $f' = 10$ cm forme sur un écran situé à 1,5 m de la lentille l'image d'un objet de hauteur $AB = 3{,}0$ cm. Déterminer la position de l'objet par rapport à la lentille et la taille de l'image sur l'écran.

2 - Une lentille mince convergente donne d'un objet AB réel une image $A'B'$ réelle deux fois plus grande. La distance AA' vaut 90 cm. Déterminer les distances OA, OA' et f'.

3 - Même question avec une image $A'B'$ virtuelle.

4 - Déterminer les positions des objets ayant une image virtuelle par une lentille convergente. On fera très attention au caractère réel ou virtuel de l'objet (pourquoi ?).

5 - Même question avec une lentille divergente.

Exercice 5 : Mesure de distance focale par la méthode de Bessel [♦♦◊]

On cherche à mesurer la distance focale d'une lentille convergente. Pour cela on place sur un banc optique un objet à la graduation 0 et un écran qui en est éloigné de $D = 60{,}0$ cm. On place ensuite la lentille entre l'objet et l'écran, et on la déplace afin de former une image nette de l'objet sur l'écran.

1 - Montrer qu'il existe deux positions possibles pour la lentille, à condition que la distance D soit supérieure à une certaine valeur à préciser.

2 - Notons d la distance entre ces deux positions. Montrer que la focale f' s'exprime en fonction de D et d seulement.

3 - On mesure $d = 41{,}0$ cm. En déduire la focale f'.

> *Une animation JAVA illustrant cette méthode est proposée par G. Tulloué, voir le lien sur le site de la classe. Pour bien comprendre ce qu'il se passe, choisissez d'afficher le faisceau.*

Exercice 6 : Rétroprojecteur [♦♦◊]

Un rétroprojecteur est composé d'une lentille convergente de focale 30 cm suivie d'un miroir plan incliné. Le centre du miroir est situé à 15 cm du centre optique de la lentille. Le centre du miroir se trouve à 3 m d'un écran vertical.

1 - À quelle distance du transparent à projeter faut-il placer la lentille ?

2 - Quelle est alors la taille à l'écran d'une lettre de hauteur 5 mm sur le transparent ?

Exercice 7 : Encombrement d'un téléobjectif [♦♦◊]

Modélisons un téléobjectif d'appareil photo par une association de lentilles suivie d'un capteur CCD de taille $15{,}8 \times 23{,}6$ mm^2. La lentille d'entrée est convergente, de vergence 5,0 δ. Une seconde lentille est présente entre la lentille d'entrée et le capteur, à 15,5 cm de la lentille d'entrée. Elle est divergente, de vergence −20 δ. La distance entre la lentille d'entrée de l'objectif et le capteur, notée habituellement Δ, est appelée *encombrement* du téléobjectif. Cet appareil est utilisé pour photographier un chamois de hauteur 80 cm au garot situé à 150 m du photographe.

1 - En l'absence de la lentille divergente, quelle serait la taille de l'image du chamois sur le capteur ? Commenter.

2 - Quelle est en fait la taille de l'image formée par le système composé ?

3 - Quel est alors l'encombrement du téléobjectif ?

4 - Quelle serait la distance focale d'une lentille convergente qui donnerait à elle seule une image de la même dimension que la précédente ? En déduire ce que vaudrait l'encombrement du téléobjectif dans ce cas.

Exercice 8 : Microscope optique [♦♦◊]

Du point de vue de la formation d'image, un microscope optique commercial peut se modéliser par l'association de deux lentilles minces convergentes utilisées dans les conditions de Gauss, voir le schéma à compléter en fin d'énoncé. La première lentille, notée L_1, est l'objectif du microscope. La seconde, notée L_2 est l'oculaire. L'échantillon à observer doit être placé sur la platine, devant l'objectif. Un système dont on parlera pas dans cet exercice permet d'éclairer l'objet sans perturber la formation de l'image. Le microscope modélisé dans cet exercice porte les indications suivantes : « Objectif $40\times$; Oculaire $10\times$; Ouverture numérique $ON = 0{,}65$; Intervalle optique $\Delta = 16\,\mathrm{cm}$ ». L'objectif de l'exercice est de comprendre à quoi ces indications correspondent.

1 - Justifier que si le microscope est correctement réglé l'objectif fournit une image (intermédiaire) *réelle* et *agrandie* d'un objet réel alors que l'oculaire fournit une image *à l'infini* d'un objet réel. En déduire la position de l'image intermédiaire par rapport à l'oculaire L_2.

2 - Compléter le schéma figure 1, page 4, en construisant l'image finale en sortie de l'oculaire.

Intéressons-nous d'abord à l'oculaire **seul**. L'indication $10\times$ portée sur l'oculaire donne la valeur du *grossissement commercial* G_2, c'est-à-dire la valeur du rapport entre d'une part l'angle α' sous lequel est vue l'image d'un objet de taille finie lorsqu'elle est renvoyée à l'infini par l'oculaire seul et d'autre part l'angle α_{max} sous lequel un rayon issu du même objet traverse le centre optique d'un œil emmétrope lorsque cet objet est placé à la distance minimale de vision distincte $\delta_{\mathrm{m}} = 25\,\mathrm{cm}$.

3 - Faire un schéma représentant chacune des situations décrites ci-dessus. Pourquoi est-il intéressant d'utiliser l'angle α_{max} comme référence pour définir un grossissement commercial ?

4 - En déduire que la distance focale image de l'oculaire vaut $f_2' = 2{,}5\,\mathrm{cm}$.

Considérons maintenant le microscope **complet**, avec l'objectif. L'indication $40\times$ portée sur l'objectif est la valeur absolue du grandissement transversal γ_1 de la lentille L_1. L'intervalle optique Δ correspond à la distance $\overline{F_1'F_2}$.

5 - Donner en le justifiant le signe de γ_1.

6 - En utilisant le théorème de Thalès ou des relations impliquant les tangentes d'angles bien choisis, montrer que $\gamma_1 = -\Delta/f_1'$.

> ***Remarque :*** *Ce que l'on démontre ici est en fait de façon plus générale l'une des relations de grandissement de Newton, avec origine au foyer image.*

7 - En déduire la distance focale image de l'objectif f_1', littéralement puis numériquement.

8 - Montrer que la distance $\overline{O_1A}$ où l'objet doit être placé pour obtenir une image à l'infini en sortie du microscope vaut

$$\overline{O_1A} = -\frac{f_1'(\Delta + f_1')}{\Delta}$$

Commenter le signe obtenu.

Le grossissement commercial G du microscope complet est le rapport entre d'une part l'angle sous lequel on voit l'image à l'infini d'un objet de taille finie à travers le microscope et l'angle sous lequel on le voit à l'œil nu s'il est placé à la distance minimale de vision distincte δ_{m}.

9 - Exprimer le grossissement commercial d'abord en fonction de δ_{m}, γ_1 et f_2', littéralement puis numériquement. Comment déduire ce grossisement des indications portées sur l'objectif et l'oculaire ?

Annales de concours

Exercice 9 : Hauteur d'un miroir [oral banque PT, ♦♦◊]

Un homme est situé à $d = 1\,\mathrm{m}$ d'un miroir plan. Cet homme mesure $1{,}80\,\mathrm{m}$ et la distance entre les yeux et le haut de son crâne vaut $10\,\mathrm{cm}$. Le miroir a une hauteur H et son extrémité inférieure est située à une distance h du sol.

1 - À quelles conditions sur h et H l'homme peut-il se voir entièrement ?

2 - Si l'homme recule, a-t-il plus de chances de se voir ?

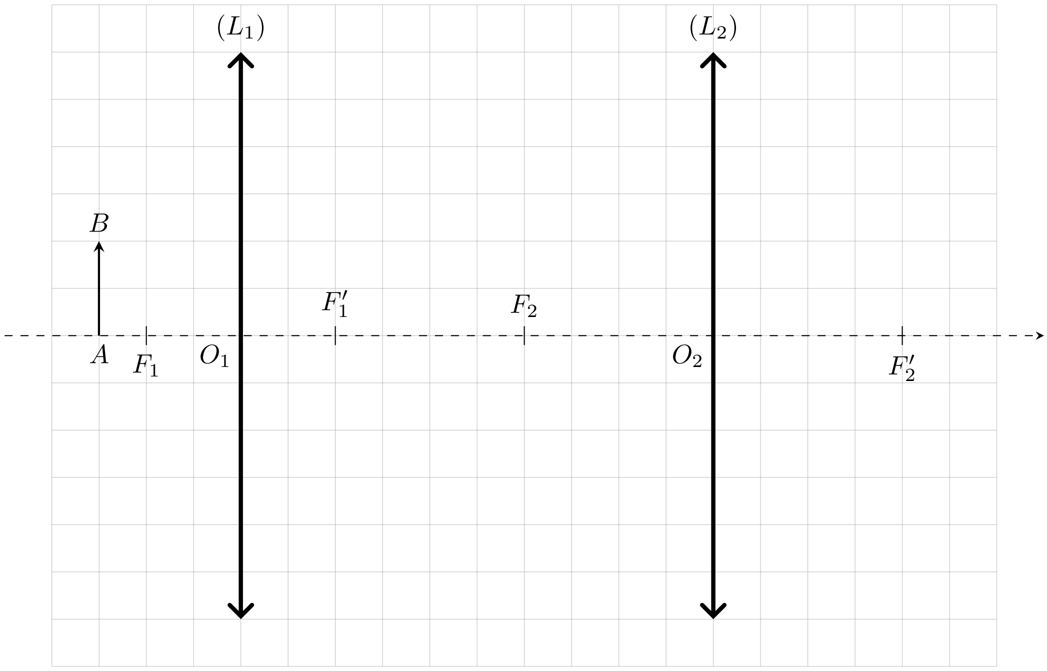
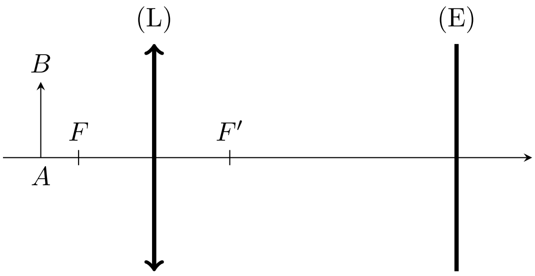


Figure 1 – Schéma à compléter du microscope, exercice 8. Le schéma n'est pas à l'échelle par rapport aux valeurs à déterminer dans l'exercice.

Exercice 10 : Projecteur de cinéma [oral CCP, ♦♦♢]



Dans une salle de cinéma, on lit, à l'aide d'un projecteur, une pellicule AB de largeur b sur un écran (E) de largeur ℓ. On modélise le projecteur par une source lumineuse et une lentille convergente (L) de focale f' suivant le schéma ci-contre, qui n'est pas représenté à l'échelle. On note d la distance de la pellicule à l'objectif et D celle de la pellicule à l'écran.

1 - Tracer l'image $A'B'$ de AB à l'aide de trois rayons différents.

2 - Montrer que l'existence d'une solution pour d implique une condition sur D et f'.

3 - Donner l'expression du grandissement transversal γ et déterminer la meilleure valeur de d. Comment faut-il placer la pellicule ?

4 - Calculer d et f' pour $b = 24\,\text{mm}$, $\ell = 5\,\text{m}$ et $D = 40\,\text{m}$.

Donnée : on rappelle les relations de conjugaison, avec les notations habituelles,

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \qquad \text{et} \qquad \overline{FA}\,\overline{F'A'} = -f'^2$$

Exercice 11 : Lunette astronomique [oral CCP, ♦♦♢]

Mars est située à une distance variant entre 56 et 160 millions de kilomètres de la Terre. Son diamètre vaut 6800 km. On l'observe au travers d'une lunette astronomique composée d'un objectif et d'un oculaire. Ces deux systèmes optiques complexes sont modélisables par deux lentilles convergentes, la première (l'objectif) de focale 1,0 m et la seconde (l'oculaire) de focale 2,5 cm.

1 - Calculer le diamètre apparent α de la planète Mars lorsqu'elle est observée sans lunette.

2 - Commençons par étudier la structure de la lunette.
2.a **-** La lunette est un instrument d'optique afocal. Quel en est l'intérêt ? Quelle en est la conséquence sur la position des lentilles ?
2.b **-** Tracer la marche d'un faisceau non parallèle à l'axe dans la lunette, en prenant pour le schéma $f_{\text{obj}} = 4\,f_{\text{oc}}$.
2.c **-** L'image finale est-elle droite ou renversée ?

3 - La lunette est caractérisée par son grossissement $G = \alpha'/\alpha$, où α est le diamètre apparent de la planète et α'

l'angle sous lequel elle est vue en sortie de la lunette.
3.a **-** Exprimer G en fonction de f_{obj} et f_{oc}.
3.b **-** Sous quel angle Mars est-elle perçue lorsque son diamètre apparent est minimal ?

4 - Où faut-il placer le capteur CCD d'un appareil photo pour photographier la planète ?

5 - Quelle est la différence entre les lunettes et les télescopes ? Pourquoi utilise-t-on plus volontiers les télescopes ?

Résolution de problème

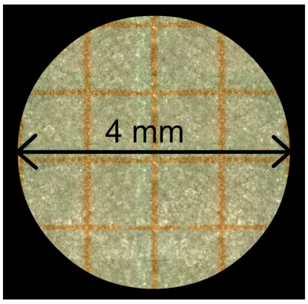
Pour aborder un exercice de type résolution de problème, il peut notamment être utile de faire un schéma modèle, d'identifier et nommer les grandeurs pertinentes, d'utiliser l'analyse dimensionnelle, de proposer des hypothèses simplificatrices, de décomposer le problème en des sous-problèmes simples, etc. Le candidat peut également être amené à proposer des valeurs numériques raisonnables pour les grandeurs manquantes ... et toutes les valeurs données ne sont pas forcément utiles. Le tout est évidemment à adapter à la situation proposée !

Exercice 12 : Taille du tube d'un microscope [♦♦◊]

Cette résolution de problème fait suite à l'exercice 8.

On photographie une feuille de papier millimétré au travers d'un microscope optique. Ce microscope porte les indications suivantes : « Objectif 4× ; Oculaire 10× ».

Déterminer le diamètre du tube du microscope séparant l'objectif et l'oculaire. Une valeur numérique est attendue.



Formation des images optiques

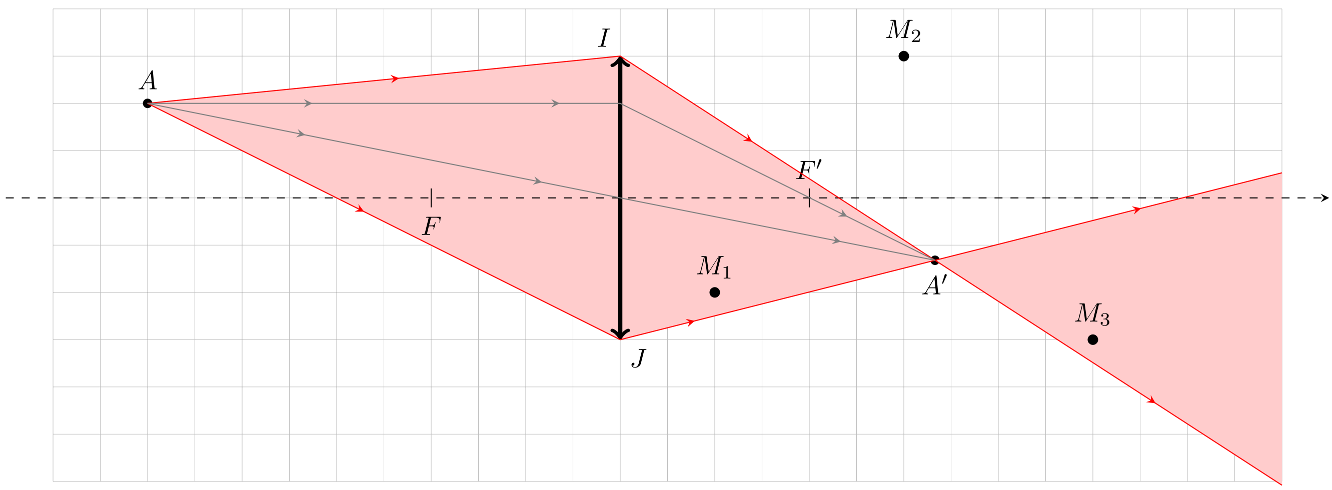
Exercices

Exercice 1 : Construction de figures

Voir les figures récapitulatives pages 2 et 3, extraites du cours en ligne de Rémy Duperray ... mais manifestement scannées d'un autre ouvrage.

Exercice 2 : Que voit-on ?

Construire la marche du faisceau demande d'abord de construire l'image A' de A par la lentille. On trace ensuite les deux rayons extrêmes du faisceau, c'est-à-dire ceux qui touchent les extrémités de la lentille, en utilisant la propriété de stigmatisme : ces deux rayons passent aussi par A'. Le faisceau remplit l'ensemble de l'espace entre les deux rayons extrêmes, coloré en rouge sur la figure.



Pour dire ce que voient les observateurs, il faut se souvenir que « voir » signifie que l'œil est en mesure de former une image réelle de l'objet sur la rétine, ce qui implique que l'image finale par le système optique, ici A', soit située en amont du cristallin plus loin que ponctum proximum.

- ▷ L'image A' est située en aval du point M_1 : un observateur qui y est placé ne pourra pas voir l'objet net, mais des rayons vont de l'objet à l'œil de l'observateur, qui **le verra donc flou**.
- ▷ Aucun rayon issu de l'objet A ne passe par M_2 : un observateur qui y est placé ne pourra donc **pas le voir du tout**.
- ▷ Le point M_3 est situé en aval de l'image A', par conséquent **un observateur pourra voir l'objet net**, sous réserve que la distance entre A' et M_3 soit suffisante pour que A' soit au delà du ponctum proximum.

Exercice 3 : Pouvoir séparateur de l'œil

1 La distance limite D_{lim} est celle pour laquelle l'écart angulaire entre les deux traits séparés de $a = 2\,\text{mm}$ vaut θ_0. La figure ci-dessous permet de voir que

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{a}{2D}$$

d'où dans l'approximation des petits angles

$$\theta = \frac{a}{D}$$

et enfin

$$\boxed{D_{\text{lim}} = \frac{a}{\theta_0} = 6{,}7\,\text{m}\,.}$$

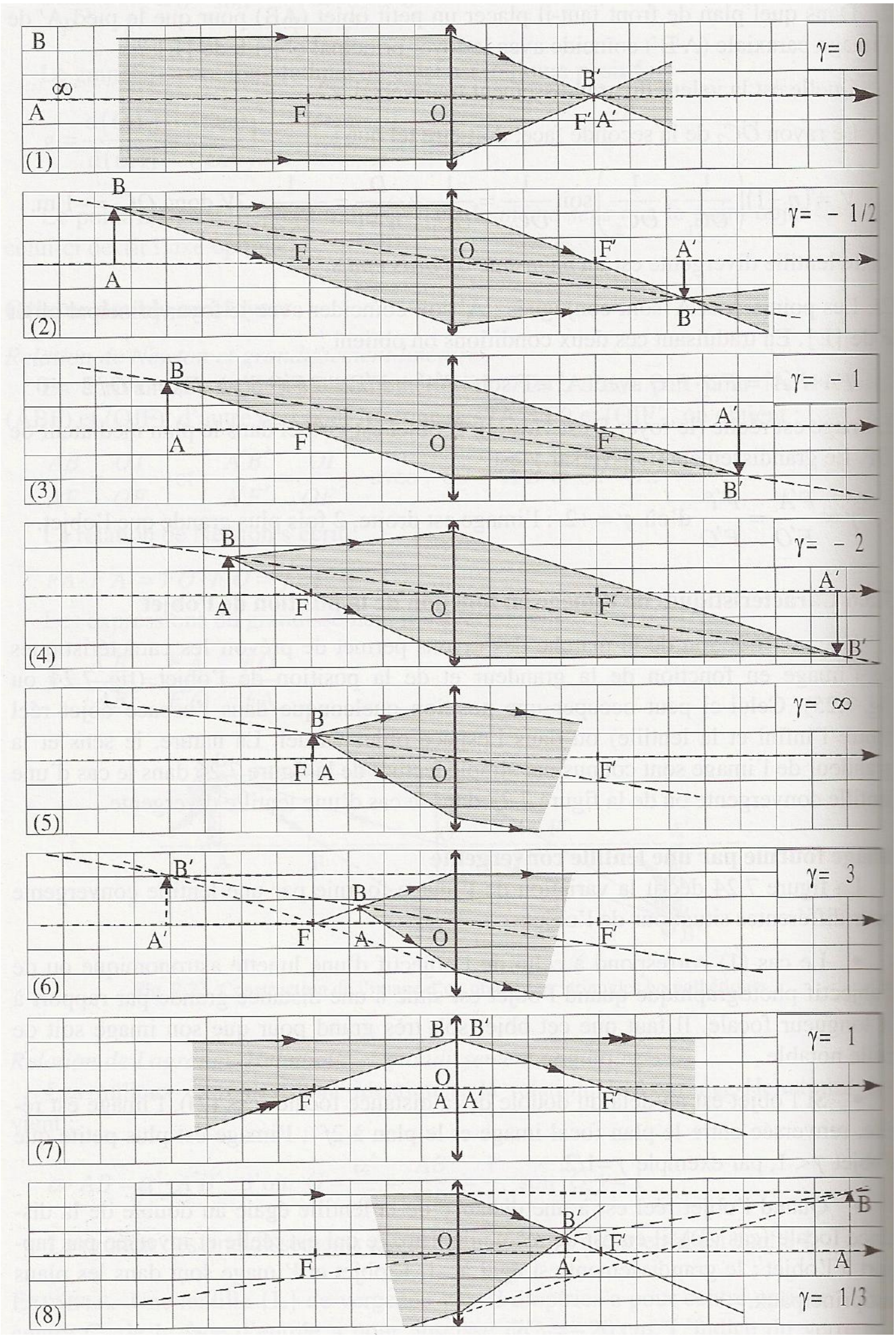


Figure 2 – Constructions pour une lentille convergente.

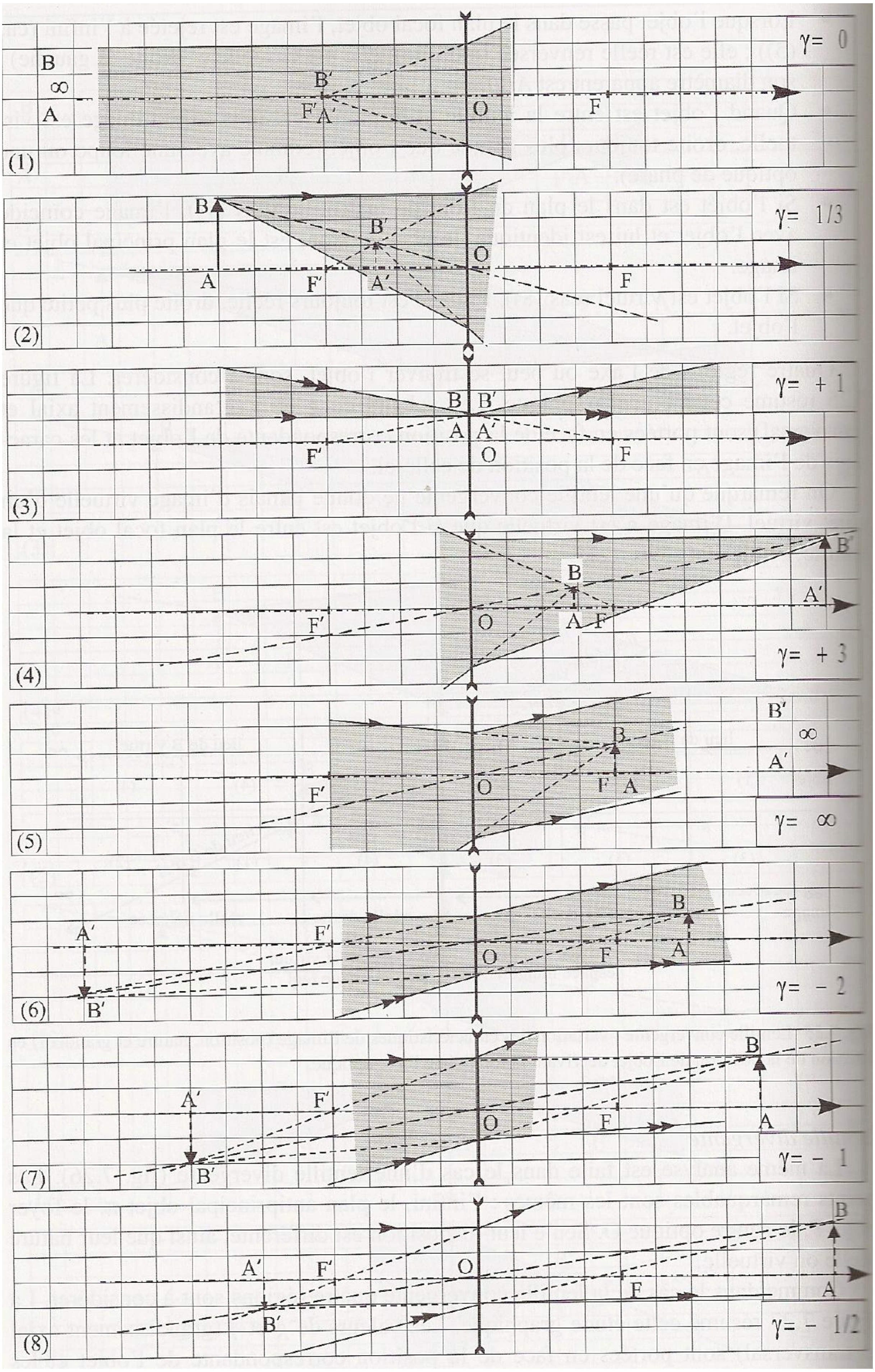
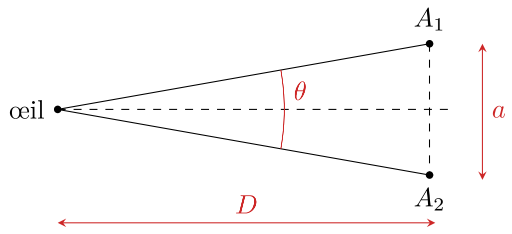


Figure 3 – Constructions pour une lentille divergente.

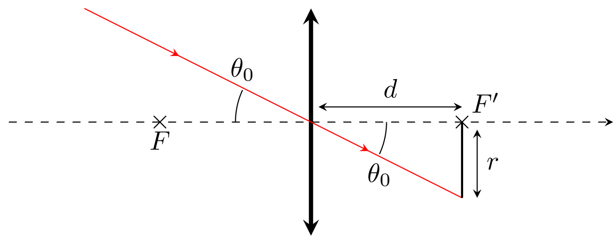


2 Il s'agit simplement d'inverser le raisonnement précédent en connaissant cette fois $D_{\text{lim}} = 250\,\text{m}$ et cherchant a_{min}, ce qui donne

$$\boxed{a_{\text{min}} = D_{\text{lim}}\,\theta_0 = 7{,}5\,\text{cm}\,.}$$

3 Deux points objet ne seront distingués par l'œil que si leur image se forme sur deux récepteurs de la rétine. Considérons ces deux points issus d'un même objet situé à l'infini optique, pour lequel la focale du cristallin est égale à la distance $d = 20\,\text{mm}$ entre le cristallin et la rétine. On les suppose de plus séparés angulairement de θ_0. Dans ce cas, la taille de l'image correspond à la taille caractéristique r d'un récepteur de la rétine, soit

$$\boxed{r = d\,\theta_0 \simeq 6\,\mu\text{m}\,.}$$



Exercice 4 : Manipulation des relations de conjugaison et de grandissement

1 Considérons que le point objet A appartient à l'axe optique. On connaît la distance séparant son image A' du centre optique O de la lentille, c'est donc la relation de conjugaison de Descartes qu'il faut utiliser, qui donne

$$\frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{f'} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\overline{OA} = \frac{\overline{OA'} \times f'}{f' - \overline{OA'}} = -11\,\text{cm}}$$

L'objet est donc situé 11 cm avant le centre optique de la lentille, et c'est un objet réel. La taille de l'image sur l'écran se déduit directement de la relation de grandissement,

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\overline{A'B'} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}\,\overline{AB} = -41\,\text{cm}\,.}$$

L'image est donc renversée et mesure 41 cm.

2 L'objet et l'image étant réels tous les deux, l'image est forcément renversée. On déduit de la relation de grandissement

$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -2 \qquad \text{soit} \qquad \overline{OA'} = -2\,\overline{OA}$$

Ainsi, comme la distance AA' est connue, on en déduit

$$\overline{AA'} = \overline{AO} + \overline{OA'} = -\overline{OA} + \overline{OA'} = -3\,\overline{OA}$$

d'où

$$\boxed{\overline{OA} = -\frac{1}{3}\,\overline{AA'} = -30\,\text{cm} \qquad \text{et} \qquad \overline{OA'} = \frac{2}{3}\,\overline{AA'} = 60\,\text{cm}}$$

La distance focale f' se déduit alors de la relation de conjugaison de Descartes, qui donne

$$\boxed{f' = \frac{\overline{OA} \times \overline{OA'}}{\overline{OA} - \overline{OA'}} = 20\,\text{cm}\,.}$$

3 L'objet est réel et l'image virtuelle : comme la lentille est convergente, l'image est forcément droite. Néanmoins, attention, l'image se trouve avant l'objet : on a donc $\overline{AA'} < 0$ On déduit de la relation de grandissement

$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = 2 \qquad \text{soit} \qquad \overline{OA'} = 2\,\overline{OA}$$

Ainsi, comme la distance AA' est connue, on en déduit

$$\overline{AA'} = \overline{AO} + \overline{OA'} = -\overline{OA} + \overline{OA'} = \overline{OA}$$

d'où

$$\boxed{\overline{OA} = \overline{AA'} = -90\,\mathrm{cm} \qquad \text{et} \qquad \overline{OA'} = 2\,\overline{AA'} = -180\,\mathrm{cm}}$$

La distance focale f' se déduit alors de la relation de conjugaison de Descartes, qui donne

$$\boxed{f' = \frac{\overline{OA} \times \overline{OA'}}{\overline{OA} - \overline{OA'}} = 180\,\mathrm{cm}\,.}$$

4 La propriété d'aplanétisme permet de se ramener au cas où l'objet est sur l'axe optique. Une image virtuelle A' se trouve avant la lentille, c'est-à-dire $\overline{OA'} < 0$. La condition implique le centre optique O : c'est donc la relation de Descartes qu'il faut utiliser. Par conséquent, on cherche $\overline{OA}$ tel que

$$\frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{f'} < 0\,, \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\frac{1}{\overline{OA}} < -\frac{1}{f'}\,.}$$

Résoudre cette inégalité demande **de faire très attention au signe des différentes grandeurs qui apparaissent** : inverser l'inégalité directement n'est possible que si les deux membres sont de même signe. Il faut donc raisonner par disjonction des cas.

Pour une lentille convergente, $f' > 0$ donc $-1/f' < 0$. Deux cas sont à distinguer en fonction du signe de $\overline{OA}$ et donc de la nature réelle ($\overline{OA} < 0$) ou virtuelle ($\overline{OA} > 0$) de l'objet.

- ▷ Si $\overline{OA} > 0$, l'inégalité ne peut jamais être vérifiée : **un objet virtuel donnera toujours une image réelle**.
- ▷ Si $\overline{OA} < 0$, l'inégalité s'inverse en $\overline{OA} < -f' = -\overline{OF'} = \overline{OF}$, ce qui signifie que **pour former une image virtuelle, un objet réel doit être placé entre le plan focal objet et le plan de la lentille**.

Ces résultats sont résumés sur la figure 4.

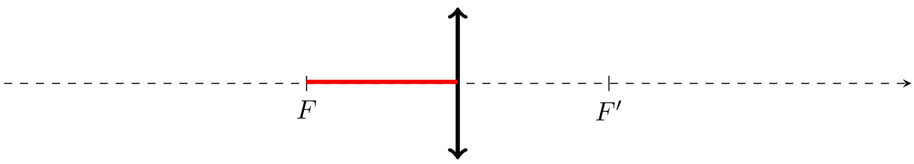


Figure 4 – Position des objets permettant de former une image réelle par une lentille convergente. Les objets placés avant le centre optique O sont réels (trait plein), ceux placés après sont virtuels (trait pointillé).

5 La relation de conjugaison s'écrivant de la même façon pour les deux types de lentille, le calcul est exactement le même et donne

$$\frac{1}{\overline{OA}} < -\frac{1}{f'}$$

mais cette cette fois $f' < 0$ donc $-1/f' > 0$.

- ▷ Si $\overline{OA} < 0$, l'inégalité est toujours vérifiée : **quelle que soit la position d'un objet réel, son image par une lentille divergente est toujours virtuelle**.
- ▷ Si $\overline{OA} > 0$, l'inégalité s'inverse en $\overline{OA} > -f' = -\overline{OF'} = \overline{OF}$, ce qui signifie que **pour former une image virtuelle, un objet virtuel doit être placé après le plan focal objet** de la lentille divergente.

Ces résultats sont résumés sur la figure 5.

Exercice 5 : Mesure de distance focale par la méthode de Bessel

1 Appelons (comme toujours !) A un point de l'objet situé sur l'axe optique de la lentille et A' son image. On a donc $\overline{AA'} = D$, et on cherche la position du centre optique de la lentille repéré par l'abscisse $x = \overline{AO}$. Utilisons la relation de conjugaison de Descartes,

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \qquad \text{soit} \qquad \frac{1}{\overline{OA} + \overline{AA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \qquad \text{qui donne donc} \qquad \frac{1}{-x + D} - \frac{1}{-x} = \frac{1}{f'}\,.$$

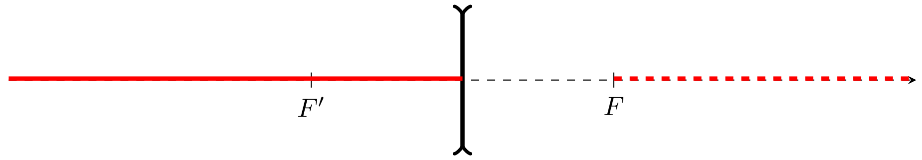


Figure 5 – Position des objets permettant de former une image virtuelle par une lentille divergente. Les objets placés avant le centre optique O sont réels (trait plein), ceux placés après sont virtuels (trait pointillé).

Cette dernière expression peut s'écrire sous la forme d'une équation polynomiale de degré deux,

$$-D = \frac{-x(-x+D)}{f'} \qquad \text{soit} \qquad x^2 - D\,x + D\,f' = 0$$

Le discriminant de cette équation vaut $D^2 - 4Df' = D(D-4f')$. Si le discriminant est positif, donc **si $D \geq 4f'$, l'équation admet deux solutions, c'est-à-dire que deux positions de la lentille sont compatibles avec la relation de conjugaison.**

2 Les deux positions en question sont les deux racines de l'équation, qui sont données par

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(D - \sqrt{D(D-4f')}\right) \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{1}{2}\left(D + \sqrt{D(D-4f')}\right)$$

La distance entre les deux positions vaut donc

$$d = x_2 - x_1 = \sqrt{D(D-4f')}$$

d'où on déduit

$$4f'D = D^2 - d^2 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{f' = \frac{D^2-d^2}{4D}}$$

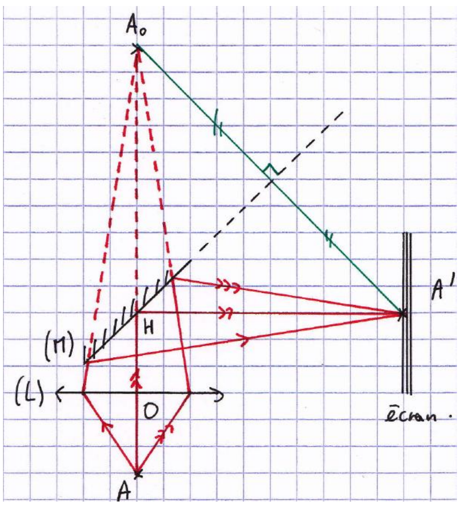
3 Numériquement,

$$\boxed{f' = 8{,}00\,\text{cm}\,.}$$

Exercice 6 : Rétroprojecteur

Commençons par un schéma de principe, sans chercher à respecter les échelles. Notons O le centre optique de la lentille et H le centre du miroir. Le transparent sert d'objet au système optique composé de la lentille convergente (L) et du miroir (M). Notons A un point objet au centre du transparent. La conjugaison se traduit comme suit :

$$A \in \text{transparent} \xmapsto{(\text{L})} A_0 \xmapsto{(\text{M})} A' \in \text{écran}\,.$$



L'énoncé indique les distances absolues

$$OH = 15\,\text{cm} \qquad \text{et} \qquad HA' = 3\,\text{m}\,.$$

$\boxed{1}$ D'après la loi de conjugaison écrite ci-dessus, A' est l'image de A_0 par le miroir, c'est-à-dire son symétrique par rapport au miroir. Par conséquent, le miroir est le plan médiateur du segment A_0A' : tout point situé sur le miroir est à égale distance de A_0 et A'. En particulier $A_0H = HA'$ et donc

$$OA_0 = OH + HA' = 3{,}15\,\text{m}\,.$$

Or la distance OA_0 est reliée à la distance OA par la relation de conjugaison de Newton,

$$\frac{1}{\overline{OA_0}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

En remplaçant les distances algébriques le long de l'axe vertical par les distances absolues, cela donne

$$\frac{1}{OA_0} + \frac{1}{OA} = \frac{1}{f'} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{OA = \frac{OA_0\,f'}{OA_0 - f'} = 33\,\text{cm}\,.}$$

$\boxed{2}$ Il s'agit maintenant de calculer le grandissement γ du système, ou plus précisémment sa valeur absolue. Comme un miroir plan a un grandissement de 1, il suffit de connaître celui de la lentille. Ainsi,

$$|\gamma| = \frac{OA_0}{OA} = 9{,}5\,,$$

d'où on déduit que **la lettre mesure 4,8 cm sur l'écran**.

Exercice 7 : Encombrement d'un téléobjectif

Notons D la distance entre le photographe et le chamois, et d la distance entre les deux lentilles du téléobjectif.

$\boxed{1}$ Le chamois est à une distance du photographe bien supérieure à la focale de la lentille d'entrée (L_1), qui vaut $f'_1 = 1/V_1 = 20\,\text{cm}$: il est donc à l'infini optique de cette lentille. On peut donc légitimement faire l'approximation que la distance entre le centre optique de la lentille d'entrée et le capteur est égale à f'_1. Par conséquent, le grandissement de la lentille d'entrée vaut

$$\gamma_1 = \frac{f'_1}{-D} = -1{,}3 \cdot 10^{-3}\,.$$

La hauteur du chamois sur le capteur CCD est donc de l'ordre de 1,1 mm, ce qui signifie que moins de 10% de la hauteur de la photo est occupée par le chamois ...

> *On aurait pu chercher à utiliser la formule de grandissement avec origine au foyer et faire la même approximation, mais ici il est tout aussi simple d'ajouter l'étape intermédiaire et non-nécessaire consistant à déterminer la position de l'image.*

$\boxed{2}$ Le téléobjectif complet est un système optique composé, où l'image formée par la lentille convergente (L_1) sert d'objet à la lentille divergente (L_2). Comme $f'_1 > d$, il s'agit d'un objet virtuel situé à une distance $\overline{O_2A} = f'_1 - d = 4{,}5\,\text{cm}$ avant le centre optique de la lentille divergente. Pour utiliser la formule de grandissement avec origine au foyer objet, on utilise plutôt

$$\overline{F_2A} = \overline{F_2O_2} + \overline{O_2A} = -f_2 + \overline{O_2A}$$

On en déduit alors le grandissement dû à la deuxième lentille

$$\gamma_2 = -\frac{f_2}{-f_2 + \overline{O_2A}} = \frac{1}{1 + V_2\,\overline{O_2A}} = \frac{1}{1 + V_2\,(f'_1 - d)} = 10$$

> *Attention aux signes : la vergence est égale à* ***l'opposée*** *de l'inverse de la distance focale objet, soit ici $V_2\,f_2 = -1$!*

Le grandissement du système optique complet est égal au produit des grandissements des deux lentilles le composant. Par conséquent,

$$\gamma = \gamma_1\,\gamma_2 = -\frac{f'_1}{D\,[1 + V_2\,(f'_1 - d)]} = -1{,}3 \cdot 10^{-2}$$

et on déduit que **l'image du chamois formée par le téléobjectif mesure 10,6 mm**, ce qui peut tout à fait correspondre à une photo bien cadrée compte tenu de la taille du capteur.

La formule $\gamma = \gamma_1\,\gamma_2$ est très simple à retrouver. Notons $\overline{AB}$ la hauteur de l'objet, $\overline{A_1B_1}$ celle de l'image intermédiaire et $\overline{A_2B_2}$ celle de l'image finale. Alors,

$$\gamma = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1B_1}} \times \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \gamma_2 \times \gamma_1$$

par définition du grandissement.

3 Pour que l'image soit nette, le capteur doit être placée là où l'image finale du chamois est formée. Puisqu'on connaît tant le grandissement γ_2 que la distance $\overline{O_2A}$, on déduit de la formule de grandissement avec origine au centre que le capteur doit être placé à une distance

$$d' = \gamma_2\,\overline{O_2A} = 45\,\mathrm{cm}$$

en aval de la lentille divergente L_2. L'encombrement du téléobjectif vaut donc

$$\boxed{\Delta = d + d' = 60\,\mathrm{cm}\,.}$$

4 La lentille divergente permet de multiplier le grandissement par un facteur 10. En utilisant directement le résultat de la question 1, **il faudrait que la lentille (L_1) ait une focale dix fois supérieure, soit 2,0 m**.

Le résultat de la question 1 a été obtenu dans l'hypothèse où le chamois est à l'infini optique de la lentille (L_1). On vérifie donc a posteriori que la distance que nous venons de calculer est toujours beaucoup plus faible que la distance D entre le photographe et le chamois, et donc qu'utiliser directement le résultat de la question 1 est toujours légitime.

Compte tenu des distances mises en jeu, l'objectif du capteur doit être placé pratiquement dans le plan focal image de la lentille (L_1). **L'encombrement d'un tel objectif vaudrait donc 2,0 m**, ce qui serait très peu pratique à manipuler.

Exercice 8 : Microscope optique

1 Un microscope est destiné à une observation à l'œil. Pour qu'elle se fasse sans fatigue visuelle, **l'image finale doit se former à l'infini** car c'est là que l'œil observe sans accomoder. Pour que l'oculaire, modélisé par une lentille convergente, envoie l'image finale à l'infini, il faut que **l'image intermédiaire formée par l'objectif soit dans le plan focal objet de l'oculaire** : il s'agit donc d'un objet réel pour l'oculaire. Enfin, pour que l'image finale soit aussi grossie que possible, il faut que **cette image intermédiaire soit agrandie par l'objectif**. En analysant le schéma donné dans l'énoncé, si l'objectif, qui est une lentille convergente, forme l'image intermédiaire dans le plan focal objet de L_2 alors cette image est réelle.

2 Schéma représenté figure 6.

3 Schéma représenté figure 7. L'utilisation de l'angle α_{max} se justifie car c'est l'angle le plus grand sous lequel l'objet pourra être vu avec un œil qui accomode mais ne force pas : si on éloigne l'objet du ponctum proximum, alors son diamètre apparent (c'est-à-dire sa taille angulaire) diminue forcément.

4 L'objet observé dans un microscope étant bien sûr de petite taille, l'approximation des petits angles se justifie pleinement. Ainsi,

$$\alpha' \simeq \tan\alpha' = \frac{AB}{f_2'} \qquad \text{et} \qquad \alpha_{\mathrm{max}} = \frac{AB}{\delta_{\mathrm{m}}}$$

On en déduit alors

$$G_2 = \frac{\alpha'}{\alpha_{\mathrm{max}}} = \frac{\delta_{\mathrm{m}}}{f_2'} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{f_2' = \frac{\delta_{\mathrm{m}}}{G_2} = 2{,}5\,\mathrm{cm}\,.}$$

5 L'objet dont le microscope forme l'image est réel, donc $\overline{O_1A} < 0$, et l'image intermédiaire est réelle également, donc $\overline{O_1A_0} > 0$. On déduit de la relation de grandissement avec origine au centre que **le grandissement γ_1 est négatif**.

6 Appuyons-nous sur le schéma représenté figure 6. D'après le théorème de Thalès, exprimé avec des grandeurs algébriques,

$$\frac{\overline{O_1I}}{\overline{A_0B_0}} = \frac{\overline{F_1'O_1}}{\overline{F_1'A_0}}$$

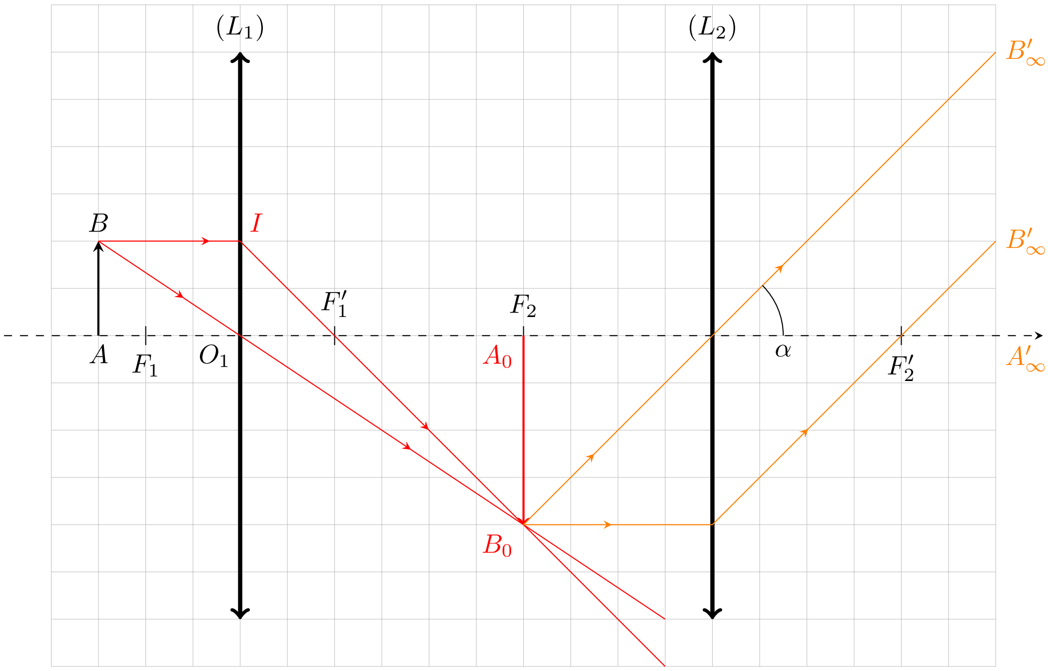


Figure 6 – Formation de l'image au travers d'un microscope. Les rayons servant à construire l'image intermédiaire A_0B_0, image de AB par la lentille L_1, sont représentés en rouge. Les rayons servant à construire l'image finale $A'B'$, image de A_0B_0 par la lentille L_2 sont représentés en orange. Plusieurs notations utiles à la suite de l'exercice sont introduites sur ce schéma. Version en couleur sur le site de la classe.

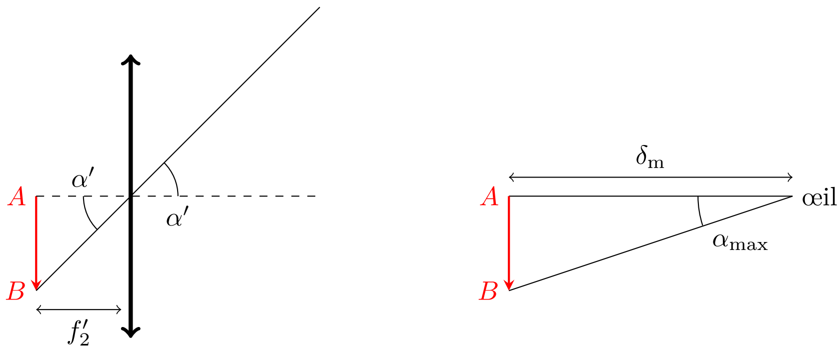


Figure 7 – Définition du grossissement commercial. L'objet AB est le même sur les deux schémas.

> *Attention à la version algébrique du théorème : pour ne pas se tromper, il faut s'assurer des signes de part et d'autre de l'égalité. Une autre possibilité, sans doute plus fiable si vous n'êtes pas sûrs de vous, est de travailler avec des distances absolues : vous déterminez ainsi une valeur absolue du résultat, et vous ajoutez le signe « à la main » à la fin du calcul.*

Or $\overline{O_1I} = \overline{AB}$ par construction du point I, $\overline{F'_1O_1} = -f'_1$ par définition, et $\overline{F'_1A_0} = \overline{F'_1F_2} = \Delta$. Comme $\gamma_1 = \overline{A_0B_0}/\overline{AB}$, on en déduit

$$\boxed{\gamma_1 = -\frac{\Delta}{f'_1}\,.}$$

$\boxed{7}$ On trouve directement

$$\boxed{f'_1 = -\frac{\Delta}{\gamma_1} = 4{,}0\,\mathrm{mm}\,.}$$

$\boxed{8}$ Pour obtenir une image à l'infini en sortie du microscope, il faut que l'image intermédiaire A_0 soit confondue avec F_2, donc

$$\overline{O_1A_0} = \overline{O_1F_2} = \overline{O_1F'_1} + \overline{F'_1F_2} = f'_1 + \Delta$$

D'après la relation de grandissement de Descartes,

$$\gamma_1 = \frac{\overline{O_1A_0}}{\overline{O_1A}} \qquad \text{soit} \qquad \overline{O_1A} = \frac{\overline{O_1A_0}}{\gamma_1} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\overline{O_1A} = -\frac{f_1'(\Delta + f_1')}{\Delta} < 0}$$

Trouver $\overline{O_1A} < 0$ est normal, car le microscope doit former une image d'un objet réel.

> *Il est également possible d'utiliser une relation de conjugaison, mais les calculs sont plus longs.*

9 L'angle sous lequel un objet de taille finie placé à la distance minimale de vision distincte δ_m est vu a été déterminé à la question 3, et vaut

$$\alpha_\mathrm{max} = \frac{AB}{\delta_\mathrm{m}}$$

L'angle α sous lequel un objet est vu en sortie du microscope dépend de la focale de l'oculaire G_2 et de la taille de l'image intermédiaire par la relation

$$\alpha = \frac{A_0B_0}{f_2'}\,.$$

Comme par ailleurs $A_0B_0 = |\gamma_1|\ AB$, on en déduit

$$\alpha = \frac{|\gamma_1|\ AB}{f_2'}$$

On aboutit enfin au grossissement $G = \alpha/\alpha_\mathrm{max}$,

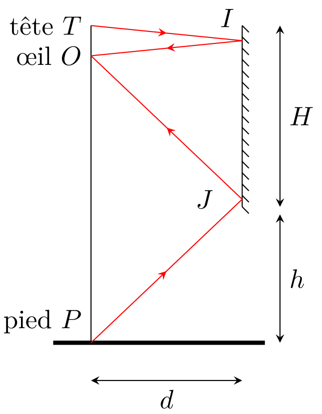
$$\boxed{G = \frac{|\gamma_1|\ \delta_\mathrm{m}}{f_2'} = 400}$$

Le grossissement G est donc **le produit des deux indications portées sur l'objectif et l'oculaire.**

Annales de concours

Exercice 9 : Hauteur d'un miroir [oral banque PT]

> *Le corrigé que je vous propose donne un raisonnement en termes de rayons lumineux qui se réfléchissent sur le miroir. Un raisonnement en termes d'image par le miroir est possible également.*



Tout au long de l'exercice, on note z les hauteurs orientées vers le haut et comptées à partir du sol.

1 Pour que l'homme puisse se voir en entier, il faut qu'un rayon issu du haut de sa tête T puisse entrer dans son œil O et même pour son pied P. D'après les lois de la réflexion, ces rayons doivent se réfléchir sur le miroir aux points I et J. Il est donc évident que ces points doivent appartenir au miroir, et donc que

$$z_I \leq h + H \qquad \text{et} \qquad z_J > h$$

Les lois de la réflexion impliquent que les triangles OJP et TIO sont isocèles, et donc

$$z_I = \frac{z_T + z_O}{2} \qquad \text{et} \qquad z_J = \frac{z_P + z_O}{2}$$

> *Cette condition peut aussi se retrouver en raisonnant sur l'image de l'homme dans le miroir, qui est son symétrique. Le théorème de Thalès donne alors le résultat.*

Ainsi les conditions deviennent

$$\boxed{h + H \geq \frac{z_T + z_O}{2} = 175\,\mathrm{cm} \qquad \text{et} \qquad h < \frac{z_P + z_O}{2} = 85\,\mathrm{cm}}$$

Ainsi, le bas du miroir doit être à une hauteur inférieure à 85 cm du sol alors que le haut du miroir doit lui être à une hauteur supérieure à 175 cm du sol pour que l'homme s'y voie entièrement. Si le bas du miroir est à la distance maximale du sol, la hauteur minimale du miroir est de 90 cm.

2 Les conditions ne dépendent pas de la distance d au miroir : **que l'homme se recule ou s'avance, il n'a pas plus de chances de se voir en entier** qu'en restant sur place.

Exercice 10 : Projecteur de cinéma [oral CCP]

1 Allez voir le premier exemple du cours ! La figure de l'énoncé n'est pas à l'échelle, ce qui était signalé par le candidat sur son compte-rendu [1].

2 D'après la relation de conjugaison de Descartes,

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \qquad \text{soit} \qquad \frac{1}{D-d} - \frac{1}{-d} = \frac{1}{f'}$$

La distance D est imposée et on cherche la distance d. Le plus efficace est de transformer cette équation fractionnaire en une équation polynomiale, en multipliant l'ensemble par $(D-d)\,d\,f'$. Cela donne

$$f'\,d + (D-d)f' = (D-d)d \qquad \text{soit} \qquad d^2 - Dd + Df' = 0\,.$$

Comme la distance d est (évidemment ...) réelle, le discriminant du polynôme doit être positif, c'est-à-dire

$$D^2 - 4Df' > 0 \qquad \text{soit} \qquad D(D-4f') > 0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{D - 4f' > 0}$$

car $D > 0$.

3 En utilisant la relation de grandissement avec origine au centre optique,

$$\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{D-d}{-d} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\gamma = 1 - \frac{D}{d}\,.}$$

Vous ne serez pas surpris de savoir qu'au cinéma l'image sur l'écran doit être la plus grande possible, il faut donc choisir d le plus petit possible. Les deux solutions de l'équation polynomiale précédente sont

$$d = \frac{D}{2} \pm \frac{\sqrt{D(D-4f')}}{2}\,.$$

Il faut donc choisir la solution avec un signe $\ominus$, soit

$$\boxed{d = \frac{D}{2} - \frac{\sqrt{D(D-4f')}}{2}\,.}$$

Dans tous les cas $D > d$ donc $\gamma < 0$: l'image est renversée, **il faut placer la pellicule à l'envers par rapport au sens de l'image voulu sur l'écran.**

4 Avec les données, $\gamma = -\ell/b$. En inversant la relation de grandissement, on en déduit

$$d = \left|\frac{D}{1-\gamma}\right| \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{d = \frac{D}{1+\ell/b} = 19\,\mathrm{cm}\,.}$$

La relation de conjugaison permet d'en déduire la distance focale,

$$f' = \frac{d}{D}(D-d) = 19\,\mathrm{cm}\,.$$

> *Comme la distance lentille-écran est beaucoup plus grande que la distance objet-lentille, tout se passe comme si l'écran était quasiment à l'infini : il n'est donc pas surprenant de trouver $f' = d$, aux chiffres non-significatifs près.*

Exercice 11 : Lunette astronomique [oral CCP]

1 Le diamètre apparent sous quel est vu la planète est l'angle formé par deux faisceaux situés de part et d'autre de la planète. Notons d le diamètre de la planète et D la distance séparant Mars de la Terre. Dans l'approximation des petits angles, $\tan\alpha \simeq \alpha$ et ainsi

$$\boxed{\alpha = \frac{d}{D}\,.}$$

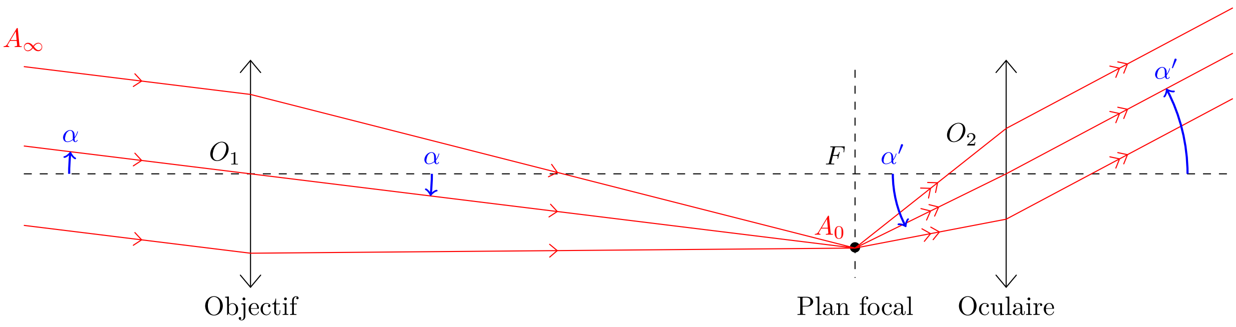
Numériquement, **le diamètre apparent est compris entre $4{,}3 \cdot 10^{-5}$ rad et $1{,}5 \cdot 10^{-4}$ rad**.

2.a Un instrument afocal forme à l'infini l'image d'un objet lui-même situé à l'infini. Former l'image à l'infini est intéressant pour un instrument d'observation puisqu'**il s'agit du lieu où l'œil n'a pas à accomoder et ne fatigue donc pas**. Pour que ce soit le cas, **le plan focal image de l'objectif doit être confondu avec le plan focal objet de l'oculaire**.

1. Vous trouverez beaucoup de compte-rendus d'épreuves orales sur le serveur « banque d'exercices d'oraux scientifiques », géré par l'association des professeurs en classe prépa scientifique : `http://beos.prepas.org/`. Vous pourrez vous-même y contribuer l'an prochain.

> *En revanche, cela n'est pas justifié pour un instrument dont le but serait de former l'image sur un capteur CCD.*

2.b La marche des rayons est représentée sur la figure ci-dessous, avec toutes les notations utiles pour la suite de l'exercice.



2.c L'angle orienté α' n'est pas de même signe que l'angle orienté α, ce qui signifie que **l'image finale est renversée**.

3.a En utilisant les notations de la figure et l'approximation des petits angles, de la trigonométrie dans les triangles O_1FA_0 et O_2FA_0 donne

$$\alpha \simeq \tan\alpha = \frac{\overline{FA_0}}{\overline{O_1F}} \qquad \text{et} \qquad \alpha' \simeq \tan\alpha' = \frac{\overline{FA_0}}{\overline{O_2F}}$$

En divisant ces égalités l'une par l'autre, il vient

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\overline{FA_0}}{\overline{O_2F}} \times \frac{\overline{O_1F}}{\overline{FA_0}} = \frac{\overline{O_1F}}{\overline{O_2F}} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{G = -\frac{f_{\mathrm{obj}}}{f_{\mathrm{oc}}} = 40\,.}$$

On remarque que $G < 0$, ce qui est cohérent avec le fait que l'image soit renversée.

3.b On en déduit qu'en sortie de la lunette Mars est perçue sous un angle de $1{,}7 \cdot 10^{-3}$ rad lorsque son diamètre apparent est minimal.

4 La question est étrangement posée ! Il n'est pas possible de contrôler précisément la position du capteur d'un appareil photo, mais seulement celle de la lentille d'entrée de l'objectif. Pour obtenir un maximum de lumière, il faut placer cette lentille sur le cercle oculaire, qui se trouve au niveau de l'image du diaphragme de l'objectif par l'oculaire. Il faut alors régler la mise au point de l'appareil à l'infini.

5 Là encore la question est étrange, puisque ni les lunettes ni les télescopes ne font partie en tant que tel du programme, quelle que soit la filière. Pour la culture et au cas où, un télescope utilise non pas deux lentilles mais une lentille et un miroir. Obtenir un miroir de très bonne qualité optique ne demande de fabriquer qu'un seul dioptre de cette qualité, alors qu'une lentille en demande deux. Il est donc plus facile de fabriquer des miroirs de bonne qualité, si bien que l'utilisation des télescopes est préférée à celle des lentilles.

Résolution de problème

Exercice 12 : Taille du tube d'un microscope

Reprenons figure 8 la construction géométrique de la marche des rayons dans le microscope, en y faisant figurer explicitement le tube du microscope, qui relie les extrémités de l'objectif et de l'oculaire.

On y constate que le diamètre d du tube contraint la taille de l'image intermédiaire : on a nécessairement $A_0B_0 \leq d/2$ (il y a un facteur $1/2$ car A_0 est sur l'axe optique). Comme l'indication portée sur l'objectif est directement la valeur absolue du grandissement transversal par l'objectif (cf. l'exercice SP4-11), on en déduit

$$AB = \frac{A_0B_0}{\gamma_1} = \frac{A_0B_0}{4}$$

et donc

$$AB \leq \frac{d}{8}\,.$$

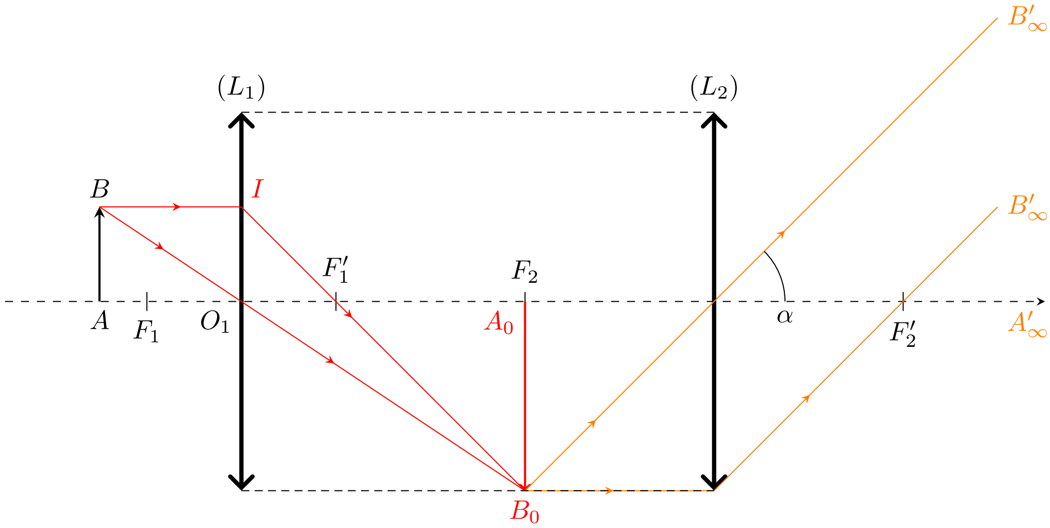


Figure 8 – Marche des rayons dans un microscope.

Sur la photo de l'énoncé, le champ visuel correspond à 4 mm, ce qui correspond à un objet de taille $AB = 2\,\mathrm{mm}$ car on a raisonné avec A sur l'axe optique, donc au centre de la photo. On en déduit que le diamètre du tube du microscope vaut

$$d = 16\,\mathrm{mm}\,,$$

ce qui est cohérent avec l'idée qu'on peut avoir des microscopes disponibles en TP de SVT.