



Conduction thermique

Refaire le cours

Exercice 1 : Deux thermostats reliés par une barre

oral banque PT | 💡 1 | ✂️ 1 | Ⓞ



- ▷ Équation de la chaleur ;
- ▷ Résistance thermique ;
- ▷ Transitoire thermique ;
- ▷ Temps caractéristique de diffusion.

1 Allez voir dans votre cours :

$$D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{avec} \quad D = \frac{\lambda}{\mu c}.$$

2 Même chose :

$$R_{\text{th}} = \frac{L}{\lambda \pi a^2}.$$

3 L'hypothèse quasi-statique permet de considérer que le flux thermique échangé entre les deux solides a la même expression qu'en régime stationnaire, donné par la résistance thermique :

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{R_{\text{th}}} (T_1 - T_2).$$

Pensez aux tests de vraisemblance pour valider les signes : si $T_1 > T_2$, on sait que le flux thermique est dirigé du solide ① vers le solide ②, ce qui est cohérent avec $\Phi_{1 \rightarrow 2} > 0$ dans l'expression ci-dessus.

Procédons à un bilan enthalpique infinitésimal pour le solide ② :

$$dH \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er P}}}{=} \Phi_{1 \rightarrow 2} dt \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Joule}}}{=} C_2 dT_2 \quad \text{soit} \quad C_2 \frac{dT_2}{dt} = \frac{1}{R_{\text{th}}} (T_1 - T_2)$$

ce qui s'écrit sous forme canonique

$$\frac{dT_2}{dt} + \underbrace{\frac{1}{R_{\text{th}} C_2}}_{=1/\tau} T_2 = \frac{1}{R_{\text{th}} C_2} T_1.$$

4 C'est encore dans le cours :

$$\tau_{\text{diff}} = \frac{L^2}{D}.$$

5 Pour que l'hypothèse quasi-statique soit valable, il faut que le temps caractéristique d'évolution de la température T_2 soit très supérieur au temps caractéristique de diffusion dans la barre, soit

$$\tau \gg \tau_{\text{diff}} \quad \text{soit} \quad R_{\text{th}} C_2 \gg \frac{L^2}{D} \quad \text{d'où} \quad \frac{L}{\lambda \pi a^2} C_2 \gg \frac{L^2 \mu c}{\lambda}$$

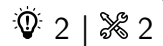
Cette inégalité peut se réécrire en faisant apparaître la masse m de la barre

$$C_2 \gg \underbrace{\mu \pi a^2 L}_{=m} c,$$

ce qui signifie que la capacité thermique du solide ② doit être très supérieure à celle de la barre.

Résistances thermiques

Exercice 2 : Plancher chauffant



- ▷ Loi de Newton ;
 ▷ Association de résistances thermiques.

- 1 Le flux thermique échangé à l'interface entre le carrelage et l'air vaut

$$\Phi_{5 \rightarrow 6} = \iint \vec{j}_{5 \rightarrow 6} \cdot \vec{dS} = hS(T_{56} - T_6)$$

Par définition,

$$R_{56} = \frac{(T_{56} - T_6)}{\Phi_{5 \rightarrow 6}} \quad \text{soit} \quad \boxed{R_{56} = \frac{1}{hS}}$$

- 2 L'hypothèse de contact thermique parfait consiste à supposer qu'il y a **continuité de la température** à l'interface entre deux matériaux, ce qui revient à dire que la résistance thermique d'interface est nulle. On en déduit le schéma électrique équivalent de la figure 1, dans lequel la température joue un rôle analogue au potentiel électrique. Le circuit d'eau n'est pas modélisé par une résistance thermique, en revanche il impose la température T_3 entre l'isolant et la chape de mortier.

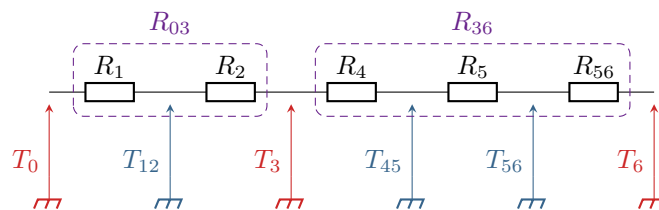


Figure 1 – Schéma électrique équivalent à l'installation. Les températures indiquées en rouge sont imposées et connues, alors que les températures d'interface indiquées en bleu sont inconnues. On note R_i la résistance thermique du matériau i et T_{ij} la température à l'interface entre les matériaux i et j .

Ainsi, les résistances R_4 de la chape de mortier, R_5 du carrelage et R_{56} d'interface sont toutes traversées par le même flux, donc montées en série. On en déduit la résistance totale

$$R_{36} = R_4 + R_5 + R_{56}$$

En utilisant l'expression de la résistance thermique d'une plaque plane $R_i = e_i/\lambda_i S$, on en déduit

$$\boxed{R_{36} = \frac{e_4}{\lambda_4 S} + \frac{e_5}{\lambda_5 S} + \frac{1}{hS} = 3,3 \cdot 10^{-4} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}}$$

- 3 La puissance thermique $\Phi_{3 \rightarrow 6}$ fournie par le plancher chauffant à l'air de la pièce est reliée aux températures par

$$\Phi_{3 \rightarrow 6} = \frac{T_3 - T_6}{R_{36}} \quad \text{soit} \quad \boxed{T_3 = T_6 + R_{36} \Phi_{3 \rightarrow 6} = 21,5^\circ \text{C}}$$

- 4 La résistance R_{56} est également traversée par le flux $\Phi_{3 \rightarrow 6}$, donc avec le même raisonnement que précédemment,

$$\Phi_{3 \rightarrow 6} = \frac{T_6 - T_{56}}{R_{56}}$$

Pour $T_{56} = T_{\max}$, on a alors

$$\boxed{\Phi_{\max} = \frac{T_{\max} - T_6}{R_{56}} = 3,6 \text{ kW}}$$

Ainsi, un plancher chauffant ne suffira à chauffer une pièce mal isolée.

En outre, une puissance limitée peut aussi poser des difficultés au démarrage du chauffage dans une pièce froide, car cela augmente évidemment le temps nécessaire pour atteindre la température souhaitée.

5 Le rendement du plancher chauffant peut être défini comme le rapport entre l'énergie réellement fournie à l'habitation et l'énergie totale fournie par l'eau chaude,

$$\eta = \frac{\Phi_{3 \rightarrow 6}}{\Phi_{3 \rightarrow 6} + \Phi_{3 \rightarrow 0}}.$$

En utilisant les températures et les résistances thermiques,

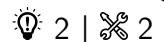
$$\eta = \frac{\frac{T_3 - T_6}{R_{36}}}{\frac{T_3 - T_6}{R_{36}} + \frac{T_3 - T_0}{R_{30}}} = \frac{T_3 - T_6}{T_3 - T_6 + \frac{R_{36}}{R_{30}}(T_3 - T_0)} \quad \text{d'où} \quad \eta = \frac{1}{1 + \frac{R_{36}}{R_{30}} \frac{T_3 - T_0}{T_3 - T_6}}.$$

Numériquement,

$$R_{30} = \frac{e_1}{\lambda_1 S} + \frac{e_2}{\lambda_2 S} = 2,7 \cdot 10^{-2} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1} \quad \text{d'où} \quad \eta = 75 \%.$$

6 Le parquet est fait en bois, qui est un conducteur thermique nettement moins bon que le carrelage. C'est un avantage en isolation, mais pas ici. Qualitativement, si la résistance thermique R_{36} augmente, alors il faudra augmenter la température T_3 de l'eau pour fournir la même puissance thermique à la pièce à chauffer ... et comme la résistance R_{30} n'est pas modifiée, alors la puissance thermique cédée au sol augmente nécessairement, ce qui a pour effet de **diminuer le rendement** de l'installation. En outre, chauffer l'eau à une température plus élevée est également **plus coûteux** en énergie ... et donc financièrement. Le bilan est donc doublement perdant : non seulement il faut consommer davantage d'énergie, mais en plus seule une moindre fraction est utile.

Exercice 3 : Chauffage d'un studio



▷ Résistances thermiques.

Le fichier Python des applications numériques est en ligne sur le site de la classe.

1 Le béton et la laine de verre sont montés en série, donc pour une surface S ,

$$R = R_b + R_i = \frac{e_b}{\lambda_{\text{béton}} S} + \frac{e_i}{\lambda_{\text{laine}} S} \quad \text{d'où} \quad U = \frac{1}{RS} = \frac{1}{\frac{e_b}{\lambda_{\text{béton}}} + \frac{e_i}{\lambda_{\text{laine}}}} = 0,55 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}.$$

2 La porte et le mur-couloir sont en parallèle, les conductances s'ajoutent et on a :

$$R_{\text{mp}} = \left(\frac{\lambda_{\text{bois}} h l}{e} + U \times (H L - h l) \right)^{-1} = 1,4 \cdot 10^{-1} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$$

3 Les deux fenêtres sont équivalentes à une seule de longueur $l_f = 2 \text{ m}$. Les diverses épaisseurs de double vitrage sont en série, et le PVC est en parallèle. La résistance équivalente du double-vitrage est

$$R_{\text{dv}} = 2 \frac{e_v}{\lambda_{\text{verre}} h_f l_f} + \frac{e_a}{\lambda_{\text{air}} h_f l_f} = 2,0 \cdot 10^{-1} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$$

La surface apparente de l'encadrement de PVC est

$$S_{\text{PVC}} = (l_f + 4e_{\text{PVC}})(h_f + 2e_{\text{PVC}}) - h_f l_f = 3,2 \cdot 10^{-1} \text{ m}^2.$$

L'association parallèle des matériaux donne

$$R_{\text{fen}} = \left(\frac{1}{R_{\text{dv}}} + \frac{\lambda_{\text{PVC}} S_{\text{PVC}}}{e_{\text{PVC}}} \right)^{-1} = 1,6 \cdot 10^{-1} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}.$$

Là-aussi, les fenêtres et leur mur porteur sont en parallèle d'où

$$R_{mf} = \left(\frac{1}{R_{fen}} + U(HL - h_f l_f - S_{PVC}) \right)^{-1} = 7,4 \cdot 10^{-2} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}.$$

4 La température étant la même de part et d'autre des murs, le studio ne reçoit aucun flux thermique de la part des autres appartements.

5 En régime permanent, la puissance \mathcal{P} nécessaire pour maintenir le studio à température constante doit compenser les fuites thermiques vers le couloir et la rue,

$$\mathcal{P} = \Phi_{couloir} + \Phi_{rue},$$

et ainsi

$$\mathcal{P} = \frac{T_s - T_c}{R_{mp}} + \frac{T_s - T_r}{R_{mf}} = 307 \text{ W}.$$

6 La différence vient bien sûr du fait que la puissance calculée ici est celle nécessaire en régime stationnaire, mais il faut une puissance nettement supérieure pour pouvoir augmenter la température de l'appartement sur une durée raisonnable.

Exercice 4 : Igloo

oral banque PT | 💡 2 | ✂️ 2



- ▷ Résistance thermique ;
- ▷ Coordonnées sphériques.

1 Entre t et $t + dt$, la demi-sphère considérée reçoit un transfert thermique

$$\delta Q_{\text{int}} = 4\mathcal{P} dt$$

produit par les quatre explorateurs ($\mathcal{P} = 50 \text{ W}$) et cède à l'extérieur un transfert thermique

$$\delta Q_{\text{ext}} = \Phi dt$$

avec Φ le flux thermique sortant de la surface considérée. En régime permanent, le bilan enthalpique s'écrit donc

$$dH = 0 = 4\mathcal{P} dt - \Phi dt \quad \text{d'où} \quad \Phi = 4\mathcal{P}.$$

Le flux thermique Φ est donc **indépendant du rayon r de la surface considérée.**

Une autre méthode consiste à considérer une coquille en forme de demi-sphère comprise entre r et $r + dr$. Le bilan d'enthalpie s'écrit

$$dH \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er } \mathcal{P}}}{=} \Phi(r) dt - \Phi(r + dr) dt \underset{\substack{\uparrow \\ \text{stat}}}{=} 0 \quad \text{d'où} \quad \frac{d\Phi}{dr} = 0.$$

La méthode utilisée ici a l'avantage de donner la valeur du flux en plus de montrer qu'il est uniforme.

2 On néglige tout transfert thermique par le sol. Dans la demi-sphère, le vecteur densité de courant thermique s'écrit

$$\vec{j} = j_r(r) \vec{u}_r.$$

Le flux sortant au travers d'une demi-sphère de rayon r s'exprime donc

$$\Phi = j_r(r) \times \frac{4\pi r^2}{2}.$$

Or d'après la loi de Fourier, avec ces symétries,

$$\vec{j} = -\lambda \frac{dT}{dr} \vec{u}_r,$$

d'où on déduit

$$\Phi = -\lambda \frac{dT}{dr} 2\pi r^2 \quad \text{soit} \quad \frac{dT}{dr} = -\frac{\Phi}{2\pi r^2 \lambda}.$$

On peut alors séparer les variables,

$$dT = -\frac{\Phi}{2\pi\lambda} \frac{dr}{r^2},$$

puis intégrer

$$\int_{T_{\text{int}}}^{T_{\text{ext}}} dT = -\frac{\Phi}{2\pi\lambda} \int_R^{R+e} \frac{dr}{r^2}$$

ce qui donne

$$T_{\text{ext}} - T_{\text{int}} = -\frac{\Phi}{2\pi\lambda} \left(-\frac{1}{R+e} + \frac{1}{R} \right).$$

Par définition de la résistance thermique, on identifie

$$\mathcal{R}_{\text{igloo}} = -\frac{1}{2\pi\lambda} \left(\frac{1}{R+e} - \frac{1}{R} \right) \quad \text{soit} \quad \boxed{\mathcal{R}_{\text{igloo}} = \frac{1}{2\pi\lambda} \frac{e}{R(R+e)} > 0.}$$

La méthode de calcul d'une résistance thermique en géométrie quelconque ne fait pas partie du programme au sens strict et il est peu probable qu'elle tombe à l'écrit, mais (à mon avis ...) se doit d'être retenue pour aller à l'oral. L'idée est de passer par l'intermédiaire de \vec{j} pour relier le flux Φ à la différence de température, surtout en contournant l'équation de la diffusion thermique.

- ▷ analyse des symétries pour identifier les variables dont dépend \vec{j} ;
- ▷ calcul du flux (qui est conservatif en régime stationnaire en l'absence de source) en fonction de la composante utile de \vec{j} ;
- ▷ utilisation de la loi de Fourier pour remplacer \vec{j} et relier Φ à la dérivée première de la température ;
- ▷ séparation des variables et intégration pour identifier \mathcal{R} .

3 D'après la question précédente, la résistance thermique de l'igloo est d'autant plus grande que le rayon R est petit : **les explorateurs ont donc intérêt à construire un petit igloo.**

La dépendance en e à R fixée est moins évidente à constater (il faut ou bien tracer, ou bien dériver), mais comme on pouvait s'y attendre la résistance thermique augmente avec e mais il n'y a pas proportionnalité comme dans le cas cartésien.

4 D'après la question 1, $\Phi = 4\mathcal{P}$. En utilisant la résistance thermique,

$$\boxed{T_{\text{int}} = T_{\text{ext}} + 4\mathcal{P}\mathcal{R}_{\text{igloo}} = 11^\circ\text{C}.$$

Bilans mésoscopiques

Exercice 5 : Conductivité thermique dépendant de la température

oral PT | 💡 1 | ✂ 2



- ▷ Bilan mésoscopique ;
- ▷ Coordonnées cartésiennes.

1 On suppose que $T = T(x)$ et donc $\vec{j} = j_x(x)\vec{e}_x$. Raisonnons sur une tranche mésoscopique de section S égale à celle de la barre, comprise entre x et $x + dx$, entre t et $t + dt$. Par la face située en x , elle reçoit le flux

$$\phi_{\text{entrant}} = j_x(x)S$$

Par la face située en $x + dx$, elle cède le flux

$$\phi_{\text{sortant}} = j_x(x + dx)S$$

Comme le régime est stationnaire, l'enthalpie est constante, si bien que

$$dH = 0 = j_x(x)S - j_x(x + dx)S = -\frac{dj_x}{dx} dx S.$$

D'après la loi de Fourier,

$$j_x = -\lambda \frac{dT}{dx} = -\frac{K}{T} \frac{dT}{dx},$$

et en remplaçant dans le premier principe, il vient

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{K}{T} \frac{dT}{dx} \right) = 0.$$

On retrouve ni plus ni moins que la conservation du flux thermique $\phi = j_x S$, logique car on est en régime stationnaire et sans terme source. Si l'énoncé n'avait pas demandé un bilan enthalpique, il aurait été plus judicieux de partir directement de ce résultat, sous la forme

$$\phi = -\frac{K}{T} \frac{dT}{dx} S = \text{cte}.$$

Une première intégration donne

$$\frac{K}{T} \frac{dT}{dx} = A = \text{cte}.$$

Pour la deuxième intégration, on peut réécrire le résultat sous la forme

$$\frac{dT}{dx} = \frac{A}{K} T \quad \text{d'où} \quad T(x) = B e^{Ax/K} \quad \text{avec} \quad A, B \text{ deux constantes.}$$

Pour cette deuxième intégration, on aurait aussi pu séparer les variables.

Pour résoudre une telle équation, il ne faut **SUUUURTOU PAS** développer les dérivées, mais au contraire procéder en deux intégrations successives.

2 En $x = 0$,

$$T(0) \underbrace{=}_{\text{CL}} T_0 \underbrace{=}_{\text{sol}} B$$

et en $x = L$,

$$T(L) \underbrace{=}_{\text{CL}} T_1 \underbrace{=}_{\text{sol}} T_0 e^{AL/K} \quad \text{soit} \quad \frac{AL}{K} = \ln \frac{T_1}{T_0} \quad \text{donc} \quad A = \frac{K}{L} \ln \frac{T_1}{T_0}.$$

Représentation graphique sur la figure 3.

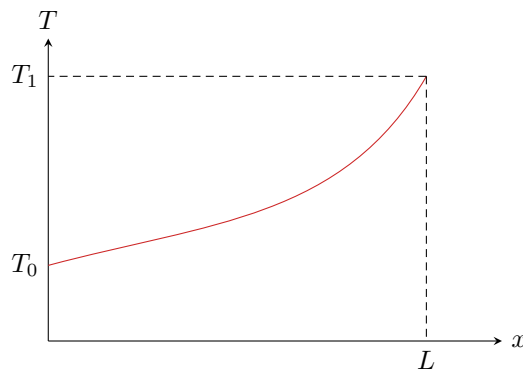


Figure 2 – Profil de température dans la barre. Attention, aucune des deux tangentes n'est horizontale : la dérivée spatiale de la température est proportionnelle au flux, qui n'est pas nul.

3 En $x = 0$, la puissance cédée par la barre à l'extérieur s'écrit

$$\mathcal{P}_{x=0} = -j_x(0)S = +\frac{K}{T(0)} S \frac{dT}{dx}(0).$$

Or on a montré que

$$\frac{dT}{dx} = \frac{A}{K} T = \frac{T}{L} \ln \frac{T_1}{T_0} \quad \text{donc} \quad \frac{dT}{dx}(0) = \frac{T_0}{L} \ln \frac{T_1}{T_0}$$

En combinant les deux résultats,

$$\mathcal{P}_{x=0} = \frac{KS}{L} \ln \frac{T_1}{T_0}.$$

De même, en $x = L$, la puissance cédée vaut

$$\mathcal{P}_{x=L} = -\frac{K}{T(L)} S \frac{dT}{dx}(L).$$

Puisque

$$\frac{dT}{dx}(L) = \frac{T(L)}{L} \ln \frac{T_1}{T_0}$$


on en déduit de même

$$\mathcal{P}_{x=L} = -\frac{KS}{L} \ln \frac{T_1}{T_0}.$$

Ces deux puissances sont opposées, autrement dit à chaque instant la barre cède d'un côté la puissance qu'elle reçoit de l'autre et n'accumule aucune énergie : c'était complètement prévisible puisque le régime est stationnaire.

Exercice 6 : Ailette de refroidissement



-  \triangleright Bilan mésoscopique ;
 \triangleright Transfert thermique conducto-convectif ;
 \triangleright Coordonnées cartésiennes.

Compte tenu des hypothèses, la température ne dépend que de la variable x , $T = T(x)$, et donc $\vec{j} = j_x(x) \vec{e}_x$.

1 Raisonnons sur la tranche mésoscopique d'ailette située entre x et $x + dx$. Procédons à un bilan thermique entre t et $t + dt$:

- \triangleright par la face située en x , elle reçoit $\delta Q_e = j_x(x) \times ab \, dt$;
- \triangleright par la face située en $x + dx$, elle cède $\delta Q_s = j_x(x + dx) \times ab \, dt$;
- \triangleright par les parois latérales, elle cède $\delta Q_{\text{lat}} = h(T(x) - T_0) \times (2a + 2b) dx \, dt$.

D'après le premier principe en régime stationnaire,

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er P}}}{\delta Q_e} - \delta Q_s - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{stat}}}{\delta Q_{\text{lat}}} = 0 \quad \text{d'où} \quad j_x(x) ab - j_x(x + dx) ab - 2h(T(x) - T_0)(a + b) dx = 0$$

et par un développement limité et en simplifiant par dx ,

$$0 = -\frac{dj_x}{dx} ab - h(T(x) - T_0)(2a + 2b).$$

D'après la loi de Fourier :

$$\lambda ab \frac{d^2 T}{dx^2} - 2h(a + b)T(x) = -2h(a + b)T_0$$

ce qui conduit au résultat

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{1}{\delta^2} T = -\frac{1}{\delta^2} T_0 \quad \text{avec} \quad \delta = \sqrt{\frac{\lambda ab}{2h(a + b)}}.$$

La grandeur δ s'interprète comme la longueur caractéristique de variation de la température dans l'ailette. Supposer l'ailette « infinie » signifie concrètement $L \gg \delta$.

2 Les racines du polynôme caractéristique sont $r_{\pm} = \pm 1/\delta$. On en déduit

$$T(x) = T_0 + A e^{-x/\delta} + B e^{x/\delta} \quad \text{avec} \quad A, B = \text{cte.}$$

Connaître la solution homogène d'une telle équation peut être utile en vue de l'oral (moins pour l'écrit), mais elle peut bien sûr se retrouver par résolution du polynôme caractéristique. Attention à ne pas confondre avec un oscillateur harmonique, qui a presque la même équation différentielle ... au signe près.

La solution particulière se trouve directement sur l'équation différentielle, et elle a la même forme que le second membre, soit ici une constante :

$$0 - \frac{1}{\delta^2} T_p = -\frac{1}{\delta^2} T_0$$

d'où le résultat annoncé $T_p = T_0$.

La température ne pouvant diverger lorsque $x \rightarrow \infty$, on a nécessairement $B = 0$. L'ailette et le composant étant en contact thermique parfait en $x = 0$,

$$T(x=0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CL}}}{=} T_c \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sol}}}{=} T_0 + A \quad \text{d'où} \quad A = T_c - T_0.$$

Finalement,

$$T(x) = T_0 + (T_c - T_0) e^{-x/\delta}.$$

3 Par définition, la puissance totale dissipée par l'ailette vaut

$$\mathcal{P} = \int_0^{+\infty} d\varphi(x) = \int_0^{+\infty} h(T_c - T_0) e^{-x/\delta} 2(a+b) dx.$$

Ainsi,

$$\mathcal{P} = 2h(a+b) \int_0^{\infty} e^{-x/\delta} dx = 2h(a+b) \left[-\delta e^{-x/\delta} \right]_0^{\infty} = 2h(a+b) \sqrt{\frac{\lambda ab}{2h(a+b)}}$$

et finalement

$$\boxed{\mathcal{P} = \sqrt{2h(a+b)ab\lambda}.}$$

4 Les deux dispositions proposées par l'énoncé occupent environ la même surface de composant (en négligeant la surface vide entre les ailettes). Pour N^2 ailettes,

$$\mathcal{P}_{\text{tot}} = N^2 \mathcal{P} = N^2 \sqrt{2h(a+b)ab\lambda}.$$

Pour une seule grande ailette,

$$\mathcal{P}'_{\text{tot}} = \sqrt{2h(Na + Nb)NaNb\lambda} = N\sqrt{N}\mathcal{P}.$$

Ainsi,

$$\frac{\mathcal{P}_{\text{tot}}}{\mathcal{P}'_{\text{tot}}} = \sqrt{N}.$$

La puissance dissipée par l'association de plusieurs ailettes est supérieure à celle dissipée par une unique ailette de grande section, car la surface de contact entre l'air et les ailettes est globalement plus importante.

Exercice 7 : Profil de température dans une plaque conductrice oral banque PT | 💡 2 | ✂ 2

1 L'intensité est

$$I = \iint_{\text{section}} J_0 \vec{u}_z \cdot dS \vec{u}_z = J_0 \ell e.$$

La puissance volumique dissipée par effet Joule vaut

$$P_J = \vec{j} \cdot \vec{E} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Ohm}}}{=} \vec{j} \cdot \frac{\vec{j}}{\sigma} = \frac{J_0^2}{\sigma}.$$

2 Appliquons le premier principe en puissance à la plaque en régime permanent. Elle reçoit de la puissance Joule et en cède à l'air sous forme conducto-convective. Ainsi,

$$\frac{dH}{dt} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er P}}}{=} P_J \times L \ell e - P_N \times 2L \ell = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{RP}}}{=} 0,$$

soit en remplaçant

$$\frac{J_0^2}{\sigma} \times L \ell e - h(T_0 - T_{\text{air}}) \times 2L \ell = 0$$

d'où on déduit

$$\boxed{T_0 = T_{\text{air}} + \frac{J_0^2 e}{2\sigma h}.$$

3 Raisonnons en régime permanent sur une tranche de plaque comprise entre x et $x + dx$ pendant une durée dt :

▷ par la face située en x , elle reçoit

$$\delta Q_e = j_x(x) L \ell dt,$$

▷ par la face située en $x + dx$, elle cède

$$\delta Q_s = j_x(x + dx) L \ell dt,$$

▷ en raison de l'effet Joule, elle reçoit

$$\delta Q_J = \frac{J_0^2}{\sigma} L \ell dx dt$$

D'après le premier principe,

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er P}}}{dH} = \delta Q_e - \delta Q_s + \delta Q_J \underset{\substack{\uparrow \\ \text{RP}}}{=} 0 \quad \text{soit} \quad j_x(x) L \ell dt - j_x(x + dx) L \ell dt + \frac{J_0^2}{\sigma} L \ell dx dt = 0$$

Par un développement limité,

$$-\frac{dj_x}{dx} dx + \frac{J_0^2}{\sigma} dx = 0$$

et en utilisant la loi de Fourier, il vient

$$\lambda \frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{J_0^2}{\sigma} = 0 \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{d^2 T}{dx^2} = -\frac{J_0^2}{2\lambda\sigma}}$$

4 Plusieurs observations qualitatives sont possibles, mais elles ne sont sûrement pas toutes attendues du candidat. Je pense que les deux premiers de la liste ci-dessous suffiraient :

- ▷ l'expression proposée est compatible avec la température T_0 déterminée précédemment : $T(x=0) = T(x=e) = T_0$;
- ▷ la température est maximale en $x = e/2$ (très facile à montrer avec la dérivée), et vaut

$$T_{\max} = T_{\text{air}} + \frac{J_0^2 e}{2h\sigma} + \frac{J_0^2 e^2}{4\lambda\sigma} = T_{\text{air}} + \frac{J_0^2 e}{2\sigma} \left(\frac{1}{h} + \frac{e}{4\lambda} \right).$$

et le profil de température est symétrique de part et d'autre, ce qui est cohérent avec le fait que le plan $x = e/2$ soit plan de symétrie ;

- ▷ si le courant J_0 augmente, alors T_{\max} augmente, ce qui est cohérent car il y a plus de puissance fournie à la plaque par effet Joule ;
- ▷ si λ et h augmentent, alors T_{\max} diminue, ce qui est cohérent ces deux grandeurs quantifient la capacité de la plaque à évacuer la chaleur ;
- ▷ si la conductivité du matériau σ augmente, alors T_{\max} diminue, ce qui est cohérent car il y a moins de puissance fournie à la plaque par effet Joule.

Le profil de température est représenté figure 3. On note les discontinuités de température aux interfaces entre la plaque et l'air, c'est-à-dire en $x = 0$ et en $x = e$.

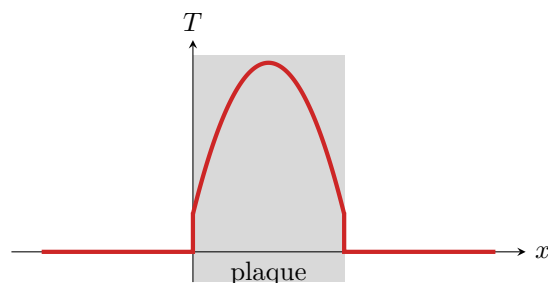


Figure 3 – Profil de température dans la plaque.

5 Avec la loi de Fourier,

$$\Phi(x) = \iint_{\text{section}} \vec{j}_{\text{th}} \cdot \vec{dS} = -\lambda \frac{dT}{dx} L \ell = \frac{J_0^2}{\sigma} L \ell \left(x - \frac{e}{2} \right).$$

Bilans thermiques divers et variés

Exercice 8 : Bilan thermique d'un astéroïde

oral banque PT | 💡 2 | ✂️ 2



- ▷ Régime permanent ;
- ▷ Source thermique ;
- ▷ Coordonnées sphériques.

Les compte-rendus des candidats mentionnent qu'il y avait beaucoup de texte parlant de, je cite, « ce qu'est un astéroïde et les métaux précieux qu'ils contiennent ». Des valeurs numériques étaient fournies au candidat ... mais ce n'est pas évident à reconstituer, on fera donc sans.

1 L'hypothèse d'équilibre thermodynamique indique que la température ne dépend **pas du temps**, et celle d'astéroïde sphérique qu'elle ne dépend **que de r** .

2 Raisonnons sur une transformation infinitésimale de durée dt .

Comme on est en régime stationnaire, c'est de toute façon sans importance : la durée de la transformation se simplifiera en fin des calculs. Il aurait été plus judicieux que l'énoncé demande de calculer les puissances thermiques.

Compte tenu de la question précédente, $\vec{j} = j_r(r) \vec{e}_r$. Le flux conductif sortant de la sphère de rayon r vaut donc

$$\phi_{\text{cond}} = \oiint_{\text{sphère}} j_r(r) \vec{e}_r \cdot dS \vec{e}_r = j_r(r) \oiint dS \quad \text{soit} \quad \phi_{\text{cond}} = 4\pi r^2 j_r(r).$$

Or d'après la loi de Fourier et compte tenu des symétries,

$$j_r = -\lambda \frac{dT}{dr}.$$

Ainsi, puisque $\delta Q_{\text{cond}} = \phi_{\text{cond}} dt$,

$$\delta Q_{\text{cond}} = -4\pi r^2 \lambda \frac{dT}{dr} dt.$$

3 On somme cette fois sur le volume de la sphère étudiée,

$$\delta Q_{\text{rad}} = \iiint \mathcal{P} d\tau dt \quad \text{d'où} \quad \delta Q_{\text{rad}} = \frac{4}{3} \pi r^3 \mathcal{P} dt.$$

4 Énoncé rigoureux : cf. cours ... le candidat mentionne de toute façon dans son compte-rendu que « ça n'intéressait pas l'examinateur qui ne voulait que l'équation ».

Étant en régime stationnaire, et comme δQ_{cond} est une énergie *cédée*,

$$dH = 0 = \delta Q_{\text{rad}} - \delta Q_{\text{cond}} \quad \text{d'où} \quad \delta Q_{\text{rad}} = \delta Q_{\text{cond}}.$$

5 Ainsi,

$$\frac{4}{3} \pi r^3 \mathcal{P} dt = -4\pi r^2 \lambda \frac{dT}{dr} dt \quad \text{soit} \quad \frac{\mathcal{P} r}{3} = -\lambda \frac{dT}{dr}.$$

On peut intégrer p.ex. en séparant les variables,

$$\int_{T_0}^{T(r)} dT = -\frac{\mathcal{P}}{3\lambda} \int_0^r r dr \quad \text{soit} \quad T(r) - T_0 = -\frac{\mathcal{P}}{3\lambda} \left(\frac{r^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right)$$

ce qui donne

$$T(r) = T_0 - \frac{\mathcal{P}}{6\lambda} r^2.$$

Remarquer qu'on obtient ici une expression de la température dans l'astéroïde de façon bien plus simple qu'en démontrant et résolvant l'équation de diffusion.

6 Appliquons le premier principe à l'astéroïde tout entier.

$$\frac{dH}{dt} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er P}}}{=} \mathcal{P} \times \frac{4}{3}\pi R^3 - \mathcal{P}_{\text{ray}} \times 4\pi R^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{stat}}}{=} 0$$

d'où on déduit

$$\mathcal{P}_{\text{ray}} = \frac{\mathcal{P}R}{3} \quad \text{soit} \quad \sigma T_s^4 = \frac{\mathcal{P}R}{3} \quad \text{d'où} \quad T_s = \left(\frac{\mathcal{P}R}{3\sigma}\right)^{1/4}.$$

On peut alors en déduire la température au centre,

$$T_0 = \left(\frac{\mathcal{P}R}{3\sigma}\right)^{1/4} + \frac{\mathcal{P}}{6\lambda}R^2.$$

Ce résultat peut également s'obtenir en écrivant la continuité du flux à la surface de l'astéroïde :

$$\phi_{\text{cond}}(r=R) = \mathcal{P}_{\text{ray}} \quad \rightsquigarrow \quad -\lambda \frac{dT}{dr} = \sigma T_s^4.$$

Cette relation traduit simplement que l'énergie ne s'accumule pas en surface de l'astéroïde : toute l'énergie atteignant sa surface par conduction est immédiatement cédée par rayonnement. Attention à ne pas confondre avec la conservation du flux : ici, le flux n'est pas conservatif à cause de la production d'énergie par radioactivité.

Exercice 9 : Gel d'un lac

oral Centrale PSI | 💡 3 | ✂ 2



- ▷ Résistance thermique ;
- ▷ Changement d'état.

1 En régime stationnaire, le plus simple est d'utiliser la résistance thermique. En notant S la surface de glace, la couche d'épaisseur e a une résistance thermique

$$R = \frac{e}{\lambda S}.$$

Le flux Φ au travers de la couche de glace vaut donc

$$\Phi = \frac{T_f - T_s}{R} = \frac{\lambda S(T_f - T_s)}{e}.$$

Or par définition $\Phi = j_Q S$ d'où on déduit

$$j_Q = \frac{\lambda(T_f - T_s)}{e}.$$

Compte tenu du sens dans lequel j'ai choisi d'orienter la différence de température, cette densité de courant thermique est orientée vers le haut, de l'eau du lac vers l'air.

Une autre méthode possible consiste à commencer par déterminer le profil de température $T(z)$ dans la glace à partir de l'équation de diffusion en régime stationnaire $\Delta T = \frac{d^2T}{dz^2} = 0$ et des conditions aux limites, puis d'utiliser la loi de Fourier.

2 Supposons le régime quasi-stationnaire, et procédons à un bilan enthalpique pour la couche infinitésimale d'eau de surface S qui gèle entre t et $t + dt$, de masse $\mu S de$. Elle ne reçoit pas de transfert thermique de la part de l'eau du lac, car elle est à la même température, et cède le transfert thermique $j_Q S dt$ à la glace. Ainsi,

$$dH \underset{\substack{\underbrace{\quad}_{\text{1er ppe}}}{=}}{=} 0 - j_Q S dt \underset{\substack{\underbrace{\quad}_{\text{gel}}}{=}}{=} -\mu S de \ell$$

car l'enthalpie de solidification est l'opposée de l'enthalpie de fusion. Ainsi,

$$\frac{\lambda(T_f - T_s)}{e} S dt = \mu S de \ell$$

d'où on déduit finalement

$$\boxed{\frac{de}{dt} = \frac{\lambda(T_f - T_s)}{\mu \ell e}}$$

3 Procédons par séparation des variables,

$$e \, de = \frac{\lambda(T_f - T_s)}{\mu \ell} dt$$

soit en intégrant

$$\int_{e(0)}^{e(t)} e \, de = \frac{\lambda(T_f - T_s)}{\mu \ell} \int_0^t dt$$

d'où

$$\frac{1}{2} [e(t)^2 - 0] = \frac{\lambda(T_f - T_s)}{\mu \ell} t$$

et ainsi

$$\boxed{e(t) = \sqrt{\frac{2\lambda(T_f - T_s)}{\mu \ell} t}}$$

Numériquement, l'épaisseur vaut 11 cm au bout d'une journée, 29 cm au bout d'une semaine et 60 cm au bout d'un mois. C'est donc dans les premiers jours de gel que la couche de glace se forme le plus rapidement : comme on le constate sur l'expression de R , la couche de glace joue le rôle d'un isolant d'autant plus performant qu'il est épais.

Pour intégrer l'équation différentielle, on peut également reconnaître

$$e \frac{de}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (e^2),$$

et utiliser la condition initiale $e(0) = 0$.

Exercice 10 : Régime sinusoïdal, onde thermique

écrit CCP MP 2014 |  3 |  2



- ▷ Régime sinusoïdal forcé ;
- ▷ Effet de peau.

1 Le sol et la température de surface sont invariantes par translation selon les axes (Ox) et (Oy), donc $T(M, t)$ également : **elle ne dépend que de z .**

2 La loi de Fourier relie le vecteur densité de flux thermique \vec{j}_{th} au gradient de température T par

$$\boxed{\vec{j}_{th} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T.}$$

3 En remplaçant dans l'équation de la chaleur,

$$\rho c j \omega f(z) e^{j\omega t} = \lambda \frac{d^2 f}{dz^2} e^{j\omega t} \quad \text{soit} \quad \frac{d^2 f}{dz^2} - \frac{\rho c}{\lambda} j \omega f(z) = 0 \quad \text{d'où} \quad \boxed{\frac{d^2 f}{dz^2} - \frac{j\omega}{D} f(z) = 0.}$$

4 Le polynôme caractéristique associé à cette équation différentielle s'écrit

$$r^2 - \frac{j\omega}{D} = 0 \quad \text{d'où} \quad r^2 = j \frac{\omega}{D} = e^{j\pi/2} \frac{\omega}{D} \quad \text{soit} \quad r = \pm e^{j\pi/4} \sqrt{\frac{\omega}{D}} = \pm \frac{1+j}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega}{D}}.$$

La solution générale s'écrit donc sous la forme

$$\boxed{f(z) = A \exp \left[(1+j) \sqrt{\frac{\omega}{2D}} z \right] + B \exp \left[-(1+j) \sqrt{\frac{\omega}{2D}} z \right].}$$

Lorsque $z \rightarrow \infty$, le premier terme de cette solution diverge alors que la température reste finie. On en déduit que **la constante A est forcément nulle**.

5 La solution sur θ s'écrit

$$\theta(z, t) = B \exp \left[-z \sqrt{\frac{\omega}{2D}} \right] \exp \left[j \left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2D}} z \right) \right]$$

Par identification avec la forme de l'énoncé, on pose

$$\delta = \sqrt{\frac{2D}{\omega}}.$$

En outre, à la surface du sol,

$$\underbrace{\theta(0, t)}_{\text{sol}} = B e^{j\omega t} = \underbrace{\alpha e^{j\omega t}}_{\text{CL}} \quad \text{d'où} \quad B = \alpha.$$

Ainsi,

$$\theta(z, t) = \alpha e^{-z/\delta} e^{j(\omega t - z/\delta)}.$$

6 En prenant la partie réelle,

$$\theta(z, t) = \text{Re} \theta(z, t) = \alpha e^{-z/\delta} \cos(\omega t - z/\delta) \quad \text{d'où} \quad T(z, t) = T_0 + \alpha e^{-z/\delta} \cos(\omega t - z/\delta).$$

La température varie sinusoidalement à la même pulsation que la température de surface, mais l'amplitude de ses variations est d'autant plus faible que l'on s'enfonce dans le sol. Le paramètre δ est la distance caractéristique sur laquelle l'amplitude diminue, c'est l'analogie d'une profondeur de peau en électromagnétisme.

Cette analogie n'est pas surprenante : l'équation de propagation des champs électromagnétiques dans un conducteur ohmique est une équation de diffusion, cf. cours sur les ondes électromagnétiques.

7 La distance L_{10} est telle que

$$e^{-L_{10}/\delta} = \frac{1}{10} \quad \text{soit} \quad -\frac{L_{10}}{\delta} = -\ln 10 \quad \text{d'où} \quad L_{10} = \delta \ln 10.$$

8 Les deux pulsations à considérer valent respectivement

$$\omega_{\text{jour}} = \frac{2\pi}{24 \text{ heures}} = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{et} \quad \omega_{\text{an}} = \frac{2\pi}{365 \text{ jours}} = 2,0 \cdot 10^{-7} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Les profondeurs caractéristiques associées valent respectivement

$$L_{10, \text{jour}} = 20 \text{ cm} \quad \text{et} \quad L_{10, \text{an}} = 3,7 \text{ m}.$$

Il faut donc enfouir la canalisation à quelques mètres sous terre pour s'affranchir des variations journalières de température.

En pratique, la géothermie de surface utilise des canalisations enfouies à environ 1 m sous le sol, ce qui est un compromis entre stabilité de la température et profondeur, donc coût, du forage.

9 D'après la question 6, on peut écrire

$$T(z, t) = T_0 + \alpha e^{-z/\delta} \cos[\omega(t - \tau)] \quad \text{avec} \quad \tau(z) = \frac{z}{\delta\omega}.$$

Le retard pour $z = L_{10} = \delta \ln 10$ s'écrit donc

$$\Delta t = \tau(L_{10}) \quad \text{soit} \quad \Delta t = \frac{\ln 10}{\omega}.$$

Numériquement,

$$\Delta t_{\text{jour}} = 8 \text{ heures } 48 \text{ minutes} \quad \text{et} \quad \Delta t_{\text{an}} = 47 \text{ jours } 17 \text{ heures}.$$

10 Le modèle développé est pertinent pour estimer des ordres de grandeur. En revanche, il ne prend pas en compte les variations saisonnières de la conductivité thermique du sol, qui dépend manifestement du taux d'humidité et donc de la pluviométrie.

Exercice 11 : Combinaison de plongée

oral CCINP PSI | 💡 3 | ✂️ 2



- ▷ Résolution de problème ;
- ▷ Transitoire thermique ;
- ▷ Résistance thermique.

On est a priori dans un régime transitoire, mais vues les données on suppose pouvoir le traiter dans le cadre de l'ARQS ... et donc utiliser les résistances thermiques.

1 La puissance P_{conv} est un flux, auquel on peut associer la résistance thermique $R_{\text{conv}} = 1/\alpha S = 0,05 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$ en prenant $S \sim 2 \text{ m}^2$ la surface de la peau. La peau et cette résistance conducto-convective sont montées en série, donc

$$R_{\text{tot}} = R_{\text{conv}} + R_{\text{peau}} = 8 \cdot 10^{-2} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}.$$

Le premier principe appliqué au baigneur pendant une durée infinitésimale dt donne

$$dH = mc_{\text{corps}} dT = -\Phi_{\text{tot}} dt + P_{\text{corps}} dt = \frac{T_{\text{mer}} - T}{R_{\text{tot}}} dt + P_{\text{corps}} dt$$

Comme la chute de température qui conduit à l'hypothermie est bien plus faible que l'écart de température entre le corps et la mer, on peut estimer grossièrement l'ordre de grandeur sans résoudre l'équation différentielle en supposant $T_{\text{mer}} - T(t) \simeq T_{\text{mer}} - T_0 = 20^\circ\text{C}$. Alors,

$$mc_{\text{corps}} \Delta T = \left(\frac{T_{\text{mer}} - T_0}{R_{\text{tot}}} + P_{\text{corps}} \right) \Delta t$$

soit

$$\Delta t = \frac{mc_{\text{corps}}}{\frac{T_{\text{mer}} - T_0}{R_{\text{tot}}} + P_{\text{corps}}} \Delta T$$

Numériquement, pour un baigneur de masse $m = 70 \text{ kg}$,

$$\Delta t \simeq 3,2 \cdot 10^3 \text{ s} = 53 \text{ minutes},$$

ce qui semble raisonnable.

2 À la résistance totale à il faut ajouter celle de la combinaison, qu'on modélise comme une paroi plane,

$$R_{\text{combi}} = \frac{e}{\lambda_{\text{néo}} S}$$

Le premier principe mis sous forme d'une équation différentielle s'écrit

$$mc_{\text{corps}} \frac{dT}{dt} + \frac{T}{R_{\text{tot}}} = \frac{T_{\text{mer}}}{R_{\text{tot}}} + P_{\text{corps}}$$

Au bout d'un temps infini, le transitoire est terminé, et seule reste la solution particulière qui est constante :

$$0 + \frac{T_{\infty}}{R_{\text{tot}}} = \frac{T_{\text{mer}}}{R_{\text{tot}}} + P_{\text{corps}} \quad \text{soit} \quad T_{\infty} = T_{\text{mer}} + R_{\text{tot}} P_{\text{corps}}.$$

On veut $T_{\infty} > T_{\text{hypo}} = 35^\circ\text{C}$, et il ne reste qu'à résoudre pour trouver e . À toi de bosser :)