BLAISE PASCAL
PT 2021-2022

DM 2 – à rendre mercredi 15 septembre *Correction*

Filtrage

Suppression du bruit thermique

1 L'objectif est d'éliminer les (très) basses fréquences tout en préservant les « hautes » fréquences. Il faut donc utiliser un **filtre passe-haut**, ce qui correspond au diagramme de Bode (b).

2 ▷ Le spectre le plus riche en harmoniques est le spectre (γ), c'est donc forcément celui du signal d'entrée qui n'a pas encore été filtré.

▷ Le filtre (a) est un passe-bas, le spectre de sortie est donc le spectre (δ) dans lequel l'harmonique basse fréquence est identique au signal d'entrée et les harmoniques haute fréquence fortement atténuées. Comme ces harmoniques décrivent les fluctuations rapides du signal, on en déduit qu'il s'agit du signal (2) dont elles ont disparu.

> *Le signal ne présentant pas de « variations brutales » (au contraire de l'exemple du signal créneau évoqué dans le cours), il est maladroit de l'évoquer ici … en revanche il est tout à fait pertinent de parler de lissage du signal.*

▷ Le filtre (b) est un passe-haut, le spectre de sortie est donc le spectre (α) dans lequel les harmoniques haute fréquence sont préservées alors que celles de basse fréquence sont fortement atténuées. Dans le domaine temporel, le signal correspondant ne doit conserver que les fluctuations rapides mais plus les évolutions lentes, et en particulier être de valeur moyenne nulle : il s'agit donc du signal (1).

▷ Le filtre (c) est un passe-bande, le spectre de sortie est donc le spectre (β) dans lequel il ne reste qu'une harmonique. Dans le domaine temporel, le signal est quasi-sinusoïdal, il s'agit donc du signal (3).

▷ Conclusion :

	Entrée du montage	Sortie filtre (a)	Sortie filtre (b)	Sortie filtre (c)
Signal	Entrée	2	1	3
Spectre	γ	δ	α	β

3 La loi des mailles dans le circuit s'écrit

$$e = u_R + u_C\,.$$

• **Limite basse fréquence :** le condensateur équivaut à un interrupteur ouvert, le courant traversant la résistance est donc nul d'où

$$u_R = Ri = 0 \qquad \text{et} \qquad u_C \underset{\text{LM}}{\underset{\uparrow}{=}} e\,.$$

• **Limite haute fréquence :** le condensateur équivaut à un fil, donc

$$u_C = 0 \qquad \text{et} \qquad u_R \underset{\text{LM}}{\underset{\uparrow}{=}} e\,.$$

• **Conclusion :** la tension de sortie du filtre passe-haut doit être nulle en basse fréquence et identique à l'entrée en haute fréquence, on déduit de ce qui précède qu'elle doit être mesurée aux bornes de la résistance, voir figure 1.

4 Par un pont diviseur de tension,

$$\underline{H} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{R}{R + \dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\underline{H} = \frac{\mathrm{j}RC\omega}{1+\mathrm{j}RC\omega}}\,.$$

Étienne Thibierge, 20 septembre 2021, www.etienne-thibierge.fr

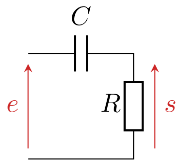

Figure 1 – Filtre RC passe-haut.

5 La pulsation de coupure du filtre est $\omega_\mathrm{c} = 1/RC$, d'où on déduit la fréquence de coupure

$$f_\mathrm{c} = \frac{\omega_\mathrm{c}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi RC}$$

et ainsi

$$\boxed{C = \frac{1}{2\pi R f_\mathrm{c}} = 1{,}6\,\mu\mathrm{F}\,.}$$

> *Pour identifier rapidement les pulsations de coupure, il est à mon avis souhaitable de connaître les formes canoniques pour les filtres du premier ordre*
>
> $$\underline{H_{PB}} = \frac{H_0}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_c}} \qquad \text{et} \qquad \underline{H_{PH}} = H_0\,\frac{j\dfrac{\omega}{\omega_c}}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_c}}\,.$$

6 La fonction de transfert s'écrit sous forme canonique

$$\underline{H} = \frac{\dfrac{\mathrm{j}f}{f_\mathrm{c}}}{1 + \dfrac{\mathrm{j}f}{f_\mathrm{c}}} \qquad \text{avec} \qquad f_\mathrm{c} = 1\,\mathrm{Hz}\,.$$

Comme $f_\mathrm{c} = 1\,\mathrm{Hz} \gg 0{,}1\,\mathrm{Hz}$, on peut raisonner sur les équivalents basse fréquence,

$$\underline{H} \sim \frac{\mathrm{j}f}{f_\mathrm{c}}\,.$$

On en déduit directement

$$|\underline{H}(0{,}1\,\mathrm{Hz})| = 0{,}1 \qquad \text{et} \qquad |\underline{H}(0{,}01\,\mathrm{Hz})| = 0{,}01$$

L'atténuation est donc **seulement d'un facteur 10**, loin du facteur 100 espéré.

> *Attention, on souhaite ici comparer l'amplitude de sortie pour une même amplitude d'entrée mais à deux fréquences différentes. On ne peut pas directement raisonner en gain. Pour que ce raisonnement soit correct, il faut l'écrire sous la forme*
>
> $$\frac{|\underline{H}(0{,}01\,\mathrm{Hz})|}{|\underline{H}(0{,}1\,\mathrm{Hz})|} = \frac{10^{G_{dB}(0{,}01\,\mathrm{Hz})/20}}{10^{G_{dB}(0{,}1\,\mathrm{Hz})/20}} = 10^{\Delta G_{dB}/20} < 10^{-2}$$
>
> *ce qui permet de conclure que la différence de gain aux deux fréquences ΔG_dB doit être supérieure à 40 dB.*

7 Dans la limite des basse fréquences $f \ll f_0$,

$$\underline{H}_n \underset{\mathrm{BF}}{\sim} \frac{\left(\mathrm{j}\dfrac{f}{f_0}\right)^n}{1}$$

La contrainte imposée par le cahier des charges se traduit par

$$\frac{(0{,}01)^n}{(0{,}1)^n} \leq \frac{1}{100} \qquad \text{soit} \qquad 10^{-n} \leq 10^{-2} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{n \geq 2\,.}$$

Le filtre utilisé doit donc être **au moins un filtre d'ordre 2**.

8 Raisonnons sur le schéma de la figure 2.

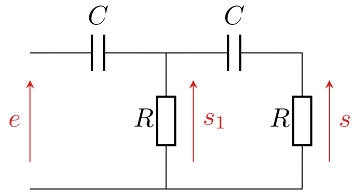

Figure 2 – Mise en cascade de deux filtres.

Par un premier pont diviseur de tension,

$$\frac{\underline{s}}{\underline{s_1}} = \frac{\mathrm{j}RC\omega}{1+\mathrm{j}RC\omega}\,.$$

En revanche, comme la résistance et le condensateur de gauche ne sont pas parcourus par le même courant (un courant part dans la résistance de droite), alors ils ne forment pas un pont diviseur de tension :

$$\frac{\underline{s_1}}{\underline{e}} \neq \frac{R}{R+1/\mathrm{j}C\omega} \quad !!!$$

Le condensateur de gauche forme un pont diviseur avec *l'association* des deux résistances et du condensateur de droite. Le condensateur et la résistance sont montés en série, d'impédance équivalente

$$\underline{Z_1} = R + \frac{1}{\mathrm{j}C\omega}\,.$$

Cette impédance est montée en parallèle avec la résistance de gauche, l'ensemble ayant pour admittance

$$\underline{Y_{\text{éq}}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{\underline{Z_1}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R+\dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}} = \frac{1}{R} + \frac{\mathrm{j}C\omega}{1+\mathrm{j}RC\omega}$$

Par un pont diviseur, on en déduit

$$\frac{\underline{s_1}}{\underline{e}} = \frac{\underline{Z_{\text{éq}}}}{\dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}+\underline{Z_{\text{éq}}}} = \frac{1}{1+\dfrac{\underline{Y_{\text{éq}}}}{\mathrm{j}C\omega}} = \frac{1}{1+\dfrac{1}{\mathrm{j}RC\omega}+\dfrac{1}{1+\mathrm{j}RC\omega}}$$

et enfin

$$\begin{aligned}
\underline{H} &= \frac{\underline{s}}{\underline{s_1}} \times \frac{\underline{s_1}}{\underline{e}} \\
&= \frac{\mathrm{j}RC\omega}{1+\mathrm{j}RC\omega} \times \frac{1}{1+\dfrac{1}{\mathrm{j}RC\omega}+\dfrac{1}{1+\mathrm{j}RC\omega}} \\
&= \frac{\mathrm{j}RC\omega}{1+\mathrm{j}RC\omega+\dfrac{1+\mathrm{j}RC\omega}{\mathrm{j}RC\omega}+1} \\
&= \frac{(\mathrm{j}RC\omega)^2}{1+3\mathrm{j}RC\omega+(\mathrm{j}RC\omega)^2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\underline{H} = \frac{(\mathrm{j}RC\omega)^2}{\mathrm{j}RC\omega+(1+\mathrm{j}RC\omega)^2}\,.}$$

On ne retrouve donc pas la forme $\underline{H_2}$ en raison du terme $\mathrm{j}RC\omega$ qui s'ajoute au dénominateur.

$\boxed{9}$ Physiquement, la différence provient du fait que le deuxième filtre prélève un courant entre la résistance et le condensateur du premier, ce qui empêche la formation d'un pont diviseur. Avec un vocabulaire plus technique, **la présence du second filtre affecte le comportement du premier car son impédance d'entrée est finie**. Si l'on souhaite empêcher ce comportement, une solution consiste à rendre infinie l'impédance d'entrée du second filtre en insérant un montage suiveur à ALI entre les deux filtres, voir figure 3.

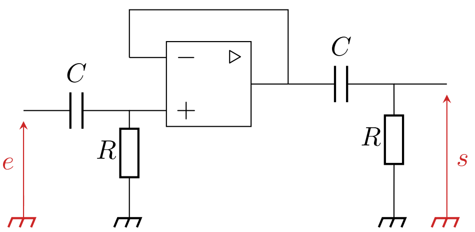

Figure 3 – Mise en cascade de deux filtres séparés d'un suiveur.