DM 3 – à rendre lundi 27 septembre *Correction*

Systèmes linéaires

Millenium Bridge

écrit Mines MP-PC-PSI 2016

1 ▷ Système : oscillateur.

▷ Référentiel $\mathcal{R}$: terrestre, considéré galiléen.

▷ Bilan des forces :
→ Poids : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\widehat{u}_x$;
→ Force de rappel du ressort : $\vec{F}_\mathrm{r} = -k(x-\ell_0)\widehat{u}_x$;
→ Force de frottement : $\vec{F}_\mathrm{f} = -\alpha\dot{x}\widehat{u}_x$.

▷ D'après le théorème de la résultante cinétique projeté sur $\widehat{u}_x$,

$$m\left.\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OG}}{\mathrm{d}t^2}\right|_{\mathcal{R}} = \vec{P} + \vec{F}_\mathrm{r} + \vec{F}_\mathrm{f}$$

$$m\ddot{x} = -mg - k(x-\ell_0) - \alpha\dot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = -g + \frac{k\ell_0}{m}\,.$$

L'énoncé indique que l'équation doit être écrite en termes de $X = x - \widetilde{x}$, avec $\widetilde{x}$ une constante. On a alors $\dot{X} = \dot{x}$ et $\ddot{X} = \ddot{x}$. En remplaçant x par $X + \widetilde{x}$, on arrive à

$$\ddot{X} + \frac{\alpha}{m}\dot{X} + \frac{k}{m}X = -\frac{k}{m}\widetilde{x} - g + \frac{k\ell_0}{m}\,.$$

En identifiant avec l'équation donnée par l'énoncé, on pose $\omega_0^2 = k/m$ la pulsation propre et $2\xi\omega_0 = \alpha/m$, soit $\xi = \alpha/2\sqrt{km}$ le facteur d'amortissement. Par ailleurs, le second membre est nul, d'où on déduit

$$\frac{k}{m}\widetilde{x} = -g + \frac{k\ell_0}{m} \qquad \text{soit} \qquad \widetilde{x} = \ell_0 - \frac{g}{\omega_0^2}\,.$$

On obtient finalement la forme voulue

$$\boxed{\ddot{X} + 2\xi\omega_0\dot{X} + \omega_0^2 X = 0\,.}$$

2 L'équation est homogène : sa solution particulière est nulle.

- **Premier cas : $\xi = 0$.** L'équation est une équation d'oscillateur harmonique, de solutions

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)\,.$$

Condition initiale sur la position :

$$x(0) \underset{\substack{\uparrow\\\text{sol}}}{=} A \underset{\substack{\uparrow\\\text{CI}}}{=} X_0 \qquad \text{soit} \qquad A = X_0\,.$$

Condition initiale sur la vitesse :

$$\dot{x}(t) = -A\omega\sin(\omega_0 t) + B\omega_0\cos(\omega_0 t) \qquad \text{donc} \qquad \dot{x}(0) \underset{\substack{\uparrow\\\text{sol}}}{=} B\omega_0 \underset{\substack{\uparrow\\\text{CI}}}{=} V_0 \qquad \text{soit} \qquad B = \frac{V_0}{\omega_0}\,.$$

Conclusion :

$$\boxed{x(t) = X_0\cos(\omega_0 t) + \frac{V_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)\,.}$$

Il s'agit d'oscillations harmoniques non amorties.

• **Second cas : $0 < \xi < 1$.** Le polynôme caractéristique de cette équation s'écrit

$$r^2 + 2\xi\omega_0 r + {\omega_0}^2 = 0$$

et il a pour discriminant

$$\Delta = 4\xi^2{\omega_0}^2 - 4{\omega_0}^2 = 4{\omega_0}^2\left(\xi^2 - 1\right) < 0\,.$$

Les racines du polynôme caractéristique s'écrivent

$$r_\pm = \frac{-2\xi\omega_0 \pm \mathrm{i}\sqrt{4{\omega_0}^2\left(1-\xi^2\right)}}{2} = -\xi\omega_0 \pm \mathrm{i}\omega_0\sqrt{1-\xi^2}$$

Posons $\omega_\mathrm{p} = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$ la pseudo-pulsation. Les solutions de l'équation prennent la forme

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\xi\omega_0 t}\left[A\cos(\omega_\mathrm{p} t) + B\sin(\omega_\mathrm{p} t)\right]\,.$$

Condition initiale sur la position :

$$x(0) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{sol}}}{=} 1\times A \underset{\substack{\uparrow\\ \text{CI}}}{=} X_0 \qquad \text{soit} \qquad A = X_0\,.$$

Condition initiale sur la vitesse :

$$\dot{x} = -\xi\omega_0\,\mathrm{e}^{-\xi\omega_0 t}\left[A\cos(\omega_\mathrm{p} t) + B\sin(\omega_\mathrm{p} t)\right] + \mathrm{e}^{-\xi\omega_0 t}\left[-A\omega_\mathrm{p}\sin(\omega_\mathrm{p} t) + B\omega_\mathrm{p}\sin(\omega_\mathrm{p} t)\right]$$

$$\text{d'où} \qquad \dot{x}(0) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{sol}}}{=} -\xi\omega_0 \times A + 1\times\omega_\mathrm{p} B \underset{\substack{\uparrow\\ \text{CI}}}{=} V_0 \qquad \text{soit} \qquad B = \frac{V_0 + \xi\omega_0 X_0}{\omega_\mathrm{p}}$$

Conclusion :

$$\boxed{x(t) = \left[X_0\cos(\omega_\mathrm{p} t) + \frac{V_0 + \xi\omega_0 X_0}{\omega_\mathrm{p}}\sin(\omega_\mathrm{p} t)\right]\mathrm{e}^{-\xi\omega_0 t}\,.}$$

Il s'agit d'oscillations amorties.

• **Influence du vent :** Dans le cas où le vent exerce sur le système une force supplémentaire $\overrightarrow{F}_\mathrm{v} = \beta\dot{x}\widehat{u}_x$, l'équation différentielle est inchangée à ceci près que ξ doit être remplacé par

$$\xi' = \frac{\alpha - \beta}{2\sqrt{km}}\,,$$

mais ξ' n'est pas forcément positif. Si $\beta > \alpha$, tous les coefficients de l'équation différentielle ne sont plus de même signe et **le système devient instable** : au lieu de s'amortir, les oscillations du système sont amplifiées par le vent.

> *On parle alors d'amortissement négatif, qui peut conduire à de sérieux dégâts. C'est par exemple ce qui est arrivé au pont de Tacoma (je vous laisse lire Wikipédia).*

3 Repartons de l'équation différentielle obtenue question 1 avec l'ajout du forçage piéton $\overrightarrow{F}$,

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + {\omega_0}^2 x = -g + {\omega_0}^2\ell_0 - \frac{F_0}{m} - \frac{F_1}{m}\cos(2\pi f t)\,.$$

Par le même raisonnement que précédemment, on pose

$$Y = x - \widetilde{x} + \frac{F_0}{m{\omega_0}^2}$$

et on a alors égalité des dérivées de Y et de x. L'équation devient donc

$$\boxed{\ddot{Y} + 2\xi\omega_0\dot{Y} + {\omega_0}^2 Y = -\frac{F_1}{m}\cos(2\pi f t)\,.}$$

En utilisant les amplitudes complexes,

$$-\omega^2\underline{Y} + 2\mathrm{i}\xi\omega_0\omega\underline{Y} + {\omega_0}^2\underline{Y} = -\underline{E}$$
$$\left({\omega_0}^2 - \omega^2 + 2\mathrm{i}\xi\omega_0\omega\right)\underline{Y} = -\underline{E}$$
$${\omega_0}^2\left(1 - \Omega^2 + 2\mathrm{i}\xi\Omega\right)\underline{Y} = -\underline{E}$$

en posant $\Omega = \omega/\omega_0$ soit $\omega = \Omega\omega_0$. On en déduit la fonction de transfert,

$$\boxed{\underline{H} = \frac{\underline{Y}}{\underline{E}} = -\frac{1}{{\omega_0}^2}\frac{1}{1-\Omega^2+2\mathrm{i}\xi\Omega}}$$

4 Il y a résonance s'il existe une pulsation ω_r où $|\underline{H}|$ est maximal, c'est-à-dire où le module du dénominateur est minimal. Posons

$$f(\Omega) = \left|1-\Omega^2+2\mathrm{i}\xi\Omega\right|^2 = (1-\Omega^2)^2+4\xi^2\Omega^2 = (1-u)^2+4\xi^2 u\,,$$

avec $u = \Omega^2$ et ainsi

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u} = -2\times(1-u)+4\xi^2 = 2\left(-1+u+2\xi^2\right)\,.$$

Cette dérivée ne peut s'annuler que si $2\xi^2-1<0$ soit $\xi < 1/\sqrt{2}$, et dans ce cas l'annulation se fait en

$$u_\mathrm{r} = {\Omega_\mathrm{r}}^2 = 1-2\xi^2 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\omega_\mathrm{r} = \omega_0\sqrt{1-2\xi^2}\,.}$$

> *Lorsqu'il s'agit d'établir les conditions et/ou les pulstations de résonance, il faut être vigilant à ne pas faire mousser inutilement les calculs. En particulier, il est indispensable d'étudier directement le carré du module du dénominateur, sans racine ni fraction, et ne pas hésiter à introduire des notations auxilliaires.*

Comme $\xi^2 \ll 1$, alors $\omega_\mathrm{r} \simeq \omega_0$, et

$$\underline{H}(\omega_\mathrm{r}) = -\frac{1}{{\omega_0}^2}\frac{1}{1-1+2\mathrm{i}\xi} = -\frac{1}{2\mathrm{i}\xi{\omega_0}^2} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{|\underline{H}(\omega_\mathrm{r})| = \frac{1}{2\xi{\omega_0}^2}\,.}$$

5 On constate que le maximum de la courbe 1 se trouve à $\omega_\mathrm{r} = 12\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$. Comme $\omega_\mathrm{r} \simeq \omega_0$, alors

$$\boxed{\omega_0 = 12\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}\,.}$$

Le maximum de la courbe donne un gain de $9\,\mathrm{dB}$, soit

$${\omega_0}^2\,|\underline{H}(\omega_\mathrm{r})| = 10^{9/20} = 2{,}8\,.$$

D'après la question précédente, on déduit

$$\boxed{\xi = \frac{1}{2{\omega_0}^2\,|\underline{H}(\omega_\mathrm{r})|} = 0{,}18\,.}$$

6 À la résonance en élongation, la réponse du système peut devenir très supérieure à l'amplitude du forçage, ce qui peut causer des dommages à la structure (notamment sur des temps longs) et des nuisances pour les usagers, qui auront le mal de mer.

> *Nombreuses sont les copies à évoquer une destruction du pont ... heureusement, ce scénario catastrophe est loin d'être le plus probable ! L'amortissement est généralement suffisant pour que l'élongation, même à la résonance, demeure suffisamment faible pour préserver l'intégrité du pont. En outre, des phénomènes non linéaires (limite d'élasticité des matériaux) viendraient probablement se manifester avant que le pont ne soit détruit.*

7 On peut par exemple envisager d'utiliser un **accéléromètre**. Dans ce cas, il faut le placer au niveau de la hanche du piéton pour s'affranchir de la rotation de la jambe. Des **jauges de déformation** peuvent également être utilisées, mais il faut alors faire marcher le piéton sur un tapis roulant pour éviter le déplacement.

8.a On constate sur la figure 1 que le signal issu du capteur de force a une période de l'ordre de $0{,}5\,\mathrm{s}$, soit une fréquence de l'ordre de $2\,\mathrm{Hz}$. Comme il n'est **pas sinusoïdal**, il compte forcément plusieurs harmoniques, qui auront pour fréquences respectives 4, 6, $8\,\mathrm{Hz}$, etc.

8.b La fréquence d'échantillonnage de chacun des spectres est donnée par

$$f_\mathrm{e} = \frac{N}{t_\mathrm{max}-t_\mathrm{min}}\,,$$

ce qui donne respectivement $1{,}68\,\mathrm{Hz}$, $11{,}5\,\mathrm{Hz}$, $3{,}37\,\mathrm{Hz}$ et $33{,}3\,\mathrm{Hz}$. On en déduit que **le critère de Shannon $f_\mathrm{max} \leq f_\mathrm{e}/2$ n'est clairement pas respecté pour les graphes ① et ③** , qui ne rendent même pas correctement le fondamental.

> *Attention à ne pas confondre : la fréquence $f_{\max}$ du critère de Shannon est la fréquence maximale présente dans le spectre du signal ... et n'a rien à voir avec la fréquence le plus à droite de l'axe des fréquences sur la figure ! ! Ici, on ne peut d'ailleurs pas vraiment estimer $f_{\max}$: on sait qu'il y a plusieurs harmoniques ... mais de là à savoir lesquelles ?*

8.c On constate sur le graphe ④ que les pics principaux sont régulièrement espacés de 2 Hz, ce qui n'est pas le cas pour le graphe ②. Il est donc probable que le graphe ② soit inexploitable à cause du repliement de spectre : compte tenu de la fréquence d'échantillonnage, le critère de Shannon n'y est respecté que pour les deux premières harmoniques ... or le graphe ④ laisse supposer qu'il y en a davantage.

> *Pour aller plus loin que ce qui est strictement attendu dans la question, on peut confirmer cette hypothèse de manière quantitative : le pic compris entre 3 et 3,5 Hz a une fréquence qui peut s'écrire* $11{,}5 - 4 \times 2$. *Il s'agit donc très certainement de la réplique du pic correspondant à l'harmonique de rang 4.*

9 La figure 3 montre que la résonance en élongation du Millenium Bridge se trouve à une fréquence qui coïncide avec la fréquence de la marche : $2\,\mathrm{Hz} = 12\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ ... l'architecte n'a bizarrement pas été très malin ! Toujours d'après la figure 3, l'ajout d'un amortisseur harmonique a permis de dédoubler le pic de résonance en deux pics secondaires de telle sorte que **la réponse du système fasse désormais apparaître un minimum** à la pulsation correspondant à la pulsation de la marche, et qu'il n'y ait pas non plus de maximum sur aucun multiple de cette pulsation (harmoniques).